

Bemerkung $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ invertibel. Folgende sind äquiv:

1) $\exists \beta > 0: \operatorname{Re}(\lambda_i) \geq \beta \quad \forall \lambda_i \text{ Eigenwerte von } A$

2) $\exists \beta, \gamma > 0: \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| \geq \gamma \|\vec{a}\| e^{\beta t} \quad \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^N, \forall t \geq 0$

Andererseits sind folgende äquivalent

1') $\exists \lambda \text{ Eigenwert von } A \text{ mit } \operatorname{Re}(\lambda) > 0$

3) $\exists \beta, \gamma > 0: \|e^{At}\|_{\mathcal{L}} \geq \gamma e^{\beta t} \quad \forall t \geq 0.$

Satz Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ und nehmen wir an, dass $\operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0$. Dann kann man eindeutig zwei Vektorräume $E^s, E^i \subset \mathbb{R}^N$ ($s = \text{stabil}, i = \text{instabil}$) finden, die A -invariant sind, sodass $\mathbb{R}^N = E^s \oplus E^i$ und $\beta^s, \beta^i, \gamma^s, \gamma^i > 0$ existieren mit

$\vec{a} \in E^s \Rightarrow \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| \leq \gamma^s \|\vec{a}\| e^{-\beta^s t} \quad \forall t \geq 0,$

$\vec{a} \in E^i \setminus \{\vec{0}\} \Rightarrow \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| \geq \gamma^i \|\vec{a}\| e^{\beta^i t} \quad \forall t \geq 0.$

Idee des Beweises Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ und $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_N < 0$ und $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_N)$. Dann definiert man $E^i = \operatorname{span}\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$, $E^s = \operatorname{span}\{\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_N\}$ und $\vec{y}_{\vec{a}}(t) = (\vec{a} \cdot \vec{e}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \vec{a} \cdot \vec{e}_N e^{\lambda_N t})$. Somit

$\vec{a} \in E^s \Rightarrow \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| \leq N \max_{i \geq k+1} |\vec{a} \cdot \vec{e}_i| e^{\max_{i \geq k+1} \lambda_i t} \leq N \|\vec{a}\| e^{-\beta^s t}$

$\vec{a} \in E^i \Rightarrow \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| \geq \sum_{j \leq k} \frac{1}{k} |\vec{a} \cdot \vec{e}_j| e^{\min_{j \leq k} \lambda_j t} \geq \left(\frac{1}{N}\right) \|\vec{a}\| e^{\beta^i t} \geq \gamma^i$

□

Beispiel $\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(t)$

Lösung: $\vec{y}(t) = (c_1 e^{2t}, c_2 e^{-t})$.

$$E^i = \text{span} \{ \vec{e}_1 \} = \{ (c_1, 0) \}$$

$$E^s = \text{span} \{ \vec{e}_2 \} = \{ (0, c_2) \}$$

$$\vec{a} \in E^i \iff \vec{a} = (c_1, 0) = (\vec{a} \cdot \vec{e}_1, 0) \iff$$

$$\iff \vec{y}_{\vec{a}}(t) = e^{At} \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{e}_1) e^{2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| = |\vec{a} \cdot \vec{e}_1| e^{2t} = \|\vec{a}\| e^{2t}$$

$$\vec{a} \in E^s \Rightarrow \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| = |\vec{a} \cdot \vec{e}_2| e^{-t} = \|\vec{a}\| e^{-t}$$

Beispiel $\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}(t)$.

Eigenwerte: $\lambda_1 = -\sqrt{2}$, $\vec{v}_1 = (1 - \sqrt{2}, 1)$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\vec{v}_2 = (1 + \sqrt{2}, 1)$

Lösung: $\vec{y}(t) = M \vec{z}(t)$, wobei $M = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

und $\vec{z}'(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \vec{z}(t)$,

$$\begin{aligned} \text{Damit ist } \vec{y}(t) &= \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-\sqrt{2}t} \\ c_2 e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix} = \\ &= (c_1(1 - \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} + c_2(1 + \sqrt{2})e^{\sqrt{2}t}, c_1 e^{-\sqrt{2}t} + c_2 e^{\sqrt{2}t}) \end{aligned}$$

$$E^s = \text{span} \{ \vec{v}_1 \} = \{ \lambda (1 - \sqrt{2}, 1) \} \iff c_2 = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \in E^s &\Rightarrow \vec{y}_{\vec{a}}(t) = \underbrace{c_1 (1-\sqrt{2}, 1)}_{\vec{a}} e^{-\sqrt{2}t} \\ &= \underbrace{\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}}_{c_1} \vec{v}_1 e^{-\sqrt{2}t}\end{aligned}$$

$$E^i = \text{span} \{ \vec{v}_2 \} = \{ \lambda(1+\sqrt{2}, 1) \} \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$\vec{a} \in E^i \Rightarrow \vec{y}_{\vec{a}}(t) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} \vec{v}_2 e^{\sqrt{2}t}$$

Da $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$ hat man $AE^i \subset E^i$
und $AE^s \subset E^s$. Somit sind E^i und E^s A -invariant.

Falls A Eigenwerte hat mit $\text{Re}(\lambda_i) = 0$
kann man die Aussage des Satzes erweitern:

$$\mathbb{R}^N = E^i \oplus E^s \oplus E^z$$

$\uparrow$ Zentrumraum:
 $\text{Re}(\lambda_i) = 0$

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}^i + \vec{a}^s + \vec{a}^z \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{y}_{\vec{a}}(t) &= e^{At} (\vec{a}^i + \vec{a}^s + \vec{a}^z) = \\ &= e^{At} \vec{a}^i + e^{At} \vec{a}^s + e^{At} \vec{a}^z\end{aligned}$$

Also hat man $e^{At} E^i \subset E^i$:

$$\left[\begin{aligned} \vec{a}^i \in E^i &\Rightarrow A \vec{a}^i \in E^i \Rightarrow A^k \vec{a}^i \in E^i \\ &\Rightarrow e^{At} \vec{a}^i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \vec{a}^i \in E^i \end{aligned} \right]$$

Gleichweise $e^{At} E^s \subset E^s$, $e^{At} E^z \subset E^z$.

Somit, falls $\vec{a}^s = \vec{a}^z = \vec{0}$, $\vec{y}_{\vec{a}}(t) \in E^i \forall t \geq 0$.

○ 2D Systeme: $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.
(eventuell $\lambda_1 = \lambda_2$). $\vec{0}$ ist der einzige stationäre Punkt. Man hat verschiedene Fälle:

Instabiler Knoten: $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ (Quelle)

Stabiler Knoten: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ (Senke)

○ Sattel: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Stern-Knoten: $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ Vielfachheit 2

Tangent-Knoten: $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ Vielfachheit 1

Instabiler Strudel: $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \notin \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$

Stabiler Strudel: $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \notin \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$

Zentrum: $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$.

Bemerkungen

$\vec{0}$ instabiler Knoten / Strudel $\Rightarrow \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| \rightarrow \infty$
 $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$

$\vec{0}$ stabiler Knoten / Strudel $\Rightarrow \vec{y}_{\vec{a}}(t) \rightarrow \vec{0}$
 $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2$

$\vec{0}$ Zentrum $\Rightarrow \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\|$ konstant $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2$

$\vec{0}$ Sattel $\Rightarrow$ das Langzeitverhalten von $\vec{y}_{\vec{a}}(t)$
hängt von $\vec{a}$ ab.

Stabilität nichtlinearer Systeme

Definition Sei $\vec{l} \in \mathbb{R}^N$ ein isolierter stationärer Punkt von $\vec{y}'(t) = \vec{f}(\vec{y}(t))$ (d.h. $\vec{f}'(\vec{l}) = \vec{0}$).
 $\vec{l}$ heißt:

stabil falls $\forall U_{\vec{l}} \subset \mathbb{R}^N$ (Umgebung von $\vec{l}$) existiert
 $W_{\vec{l}}$, sodass $\vec{a} \in W_{\vec{l}} \Rightarrow \vec{y}_{\vec{a}}(t) \in U_{\vec{l}} \forall t \geq 0$

asymptotisch stabil falls $\vec{l}$ stabil ist und man $\overline{W}_{\vec{l}}$
finden kann, sodass $\vec{a} \in \overline{W}_{\vec{l}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{y}_{\vec{a}}(t) = \vec{l}$.

instabil falls es nicht stabil ist.

Beispiele aus dem linearen Fall $\vec{f}(\vec{y}) = A\vec{y}$
mit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ invertibel (somit $\vec{f} = \vec{0}$).

1). $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ (stabiler Knoten)

$$\vec{y}_{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \vec{a}$$

Man kann $W_{\vec{0}} = B_r(\vec{0}) = \{\|\vec{y}\| < r\} \subset U_{\vec{0}}$

$$\vec{a} \in W_{\vec{0}} \Rightarrow \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| \leq \|\vec{a}\| < r \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{y}_{\vec{a}}(t) \in B_r(\vec{0}) \subset U_{\vec{0}} \quad \forall t \geq 0.$$

Da $\vec{y}_{\vec{a}}(t) \rightarrow \vec{0} \quad \forall \vec{a}$, ist $\vec{0}$ asymp. stabil

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (Zentrum)

$$\vec{y}_{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \vec{a}$$

Nochmals ist $W_{\vec{0}} = B_r(\vec{0}) \subset U_{\vec{0}}$ in Ordnung.

$$\vec{a} \in W_{\vec{0}} \Rightarrow \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| = \|\vec{a}\| < r \quad \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow \vec{y}_{\vec{a}}(t) \in B_r(\vec{0}) \subset U_{\vec{0}} \quad \forall t \geq 0$$

In diesem Fall ist allerdings $\vec{0}$ nicht asymptotisch stabil, da $\vec{y}_{\vec{a}}(t) \not\rightarrow \vec{0}$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$.

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{Sattel})$$

$\vec{0}$ ist instabil: $\exists U_{\vec{0}} \nexists W_{\vec{0}} \exists \vec{a} \in W_{\vec{0}} \exists t \geq 0: \vec{y}_{\vec{a}}(t) \notin U_{\vec{0}}$.

Sei $U_{\vec{0}} = B_r(\vec{0})$ und $W_{\vec{0}}$ beliebig.

Nehmen wir $\vec{a} \in W_{\vec{0}}$ mit $a_2 \neq 0$.

Dann ist $\vec{y}_{\vec{a}}(t) = (a_1 e^{-t}, a_2 e^{2t})$ und

$\vec{y}_{\vec{a}}(t) \notin U_{\vec{0}}$, sobald $|a_2| e^{2t} \geq r \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2} \ln \frac{r}{|a_2|}$.

Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir an, dass $\vec{p} = \vec{0}$ ein stationärer Punkt von System $\vec{y}'(t) = \vec{f}(\vec{y}(t))$ ist.

Da $\vec{f}(\vec{y}) = \vec{f}(\vec{0}) + D\vec{f}(\vec{0})\vec{y} + o(\|\vec{y}\|)$ als $\|\vec{y}\| \rightarrow 0$, kann man checken, dass

$A = D\vec{f}(\vec{0}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ invertibel $\Rightarrow \vec{0}$ isolierter

⌈ Durch Widerspruch: sei $\vec{y}_n \in \mathbb{R}^N \setminus \{\vec{0}\}$ eine Folge von stationären Punkten mit $\vec{y}_n \rightarrow \vec{0}$.

Da $\left\| \frac{\vec{y}_n}{\|\vec{y}_n\|} \right\| = 1$, kann man $\vec{y}_{n_k}$ finden, mit $\vec{y}_{n_k} / \|\vec{y}_{n_k}\| \rightarrow \vec{\xi}$

und $\|\vec{\xi}\| = 1$. Man hat $\vec{0} = \vec{f}(\vec{y}_{n_k}) - \vec{f}(\vec{0}) = A\vec{y}_{n_k} + o(\|\vec{y}_{n_k}\|)$

und $\vec{0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A\vec{y}_{n_k}}{\|\vec{y}_{n_k}\|} = A\vec{\xi}$. Widerspruch ⌋

Satz (Konvergenz, nichtlinearer Fall)

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ die Eigenwerte von $D\vec{f}(\vec{0})$ alle mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Dann

1) $\exists U_{\vec{0}} : \forall \vec{a} \in U_{\vec{0}}$ die Lösung $\vec{y}_{\vec{a}}$ global auf $[0, \infty)$ ist und $\vec{y}_{\vec{a}} \in U_{\vec{0}} \forall t \geq 0$

2) $\exists \beta, \gamma > 0 : \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| \leq \gamma \|\vec{a}\| e^{-\beta t} \forall \vec{a} \in U_{\vec{0}}, \forall t \geq 0$.
Somit ist $\vec{0}$ asymptotisch stabil.

Beweis Sei $V_{\vec{0}}$ und $\vec{0}$ isoliert in $V_{\vec{0}}$. Mit $A = D\vec{f}(\vec{0})$ definieren wir nochmals $((\cdot, \cdot))$ und $\|\cdot\|$ wie vorher.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\|^2 &= 2(\vec{y}_{\vec{a}}(t), \vec{y}_{\vec{a}}'(t)) = \\ &= 2(\vec{y}_{\vec{a}}(t), \vec{f}(\vec{y}_{\vec{a}}(t))) = \\ &= 2(\vec{y}_{\vec{a}}(t), \vec{f}(\vec{0}) + D\vec{f}(\vec{0})\vec{y}_{\vec{a}}(t) + o(\|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\|)) \\ &\leq -2b \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\|^2 + 2(\vec{y}_{\vec{a}}(t), o(\|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\|)) \end{aligned}$$

Sei jetzt $U_{\vec{0}} \subset V_{\vec{0}}$ so klein, dass $\|o(\|\vec{z}\|)\| \leq b \|\vec{z}\|/2 \forall \vec{z} \in U_{\vec{0}}$ und nehmen wir $\vec{a} \in U_{\vec{0}}$.
Da $U_{\vec{0}}$ offen ist, bleibt $\vec{y}_{\vec{a}}(t) \in U_{\vec{0}}$ für t klein.
Für diese t hat man

$$\frac{d}{dt} \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\|^2 \leq -2b \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\|^2 + b \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\|^2$$

Durch Gronwall hat man

$$\|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 e^{-\frac{b}{2}t}$$

Wir können $U_{\vec{0}}$ der Form $U_{\vec{0}} = \{\|\vec{y}\| < r\}$.
 Dann $\vec{a} \in U_{\vec{0}} \Rightarrow \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| \leq \|\vec{a}\| < r \Rightarrow$
 $\Rightarrow \vec{y}_{\vec{a}}(t) \in U_{\vec{0}}.$

Die Lösung bleibt in $U_{\vec{0}}$, ist daher
 beschränkt und kann bis $t = \infty$ erweitert
 werden.

Aussage (2) folgt mit $\beta = b/2$ und

$\gamma = C/c$, wobei

$$c\|\vec{a}\| \leq \|\vec{a}\| \leq C\|\vec{a}\| \quad \forall \vec{a}. \quad \square$$

Bemerkung Der Satz sieht ähnlich zu dem
 entsprechenden Satz im linearen Fall, ist
 allerdings nur lokal. Die Analysis ist auf
 der Taylor-Entwicklung basiert, die nur
 lokal gilt.

Beispiel Das System $\vec{y}' = (y_2^2 - y_1, 1 - e^{y_2/2})$
 hat den einzigen stationären Punkt $\vec{0}$. Da
 $D\vec{f}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 2y_2 \\ 0 & -\frac{1}{2}e^{y_2/2} \end{pmatrix} \bigg|_{\vec{0}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ ist
 $\vec{0}$ asymptotisch stabil.

Satz (Instabilität, nichtlinearer Fall)

Sei $\vec{l}$ ein isolierter stationärer Punkt von $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y})$. Falls $D\vec{f}(\vec{l})$ einen Eigenwert mit positivem Realteil hat, ist $\vec{l}$ instabil.

Beispiel Betrachten wir $\vec{y}' = (y_1 y_2 - 1, y_1 - y_2)$.

Stationäre Punkte:

$$\begin{cases} y_1 y_2 = 1 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \iff \vec{y} = (1, 1) \text{ oder } \vec{y} = (-1, -1).$$

○ Berechnen wir $D\vec{f}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Wir haben

$$D\vec{f}(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D\vec{f}(-1, -1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{2} \text{ (Sattel)}$$

instabil

$$\downarrow$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i \text{ (stab. Strudel)}$$

stabil

Beispiel Betrachten wir die Stabilität der stationären Lösungen von $y' = \sin(y)$.

○ Stationäre Punkte $\sin(y) = 0 \iff y = k\pi$

$$\text{Da } (\sin(y))'|_{y=k\pi} = \cos(y)|_{k\pi} = \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ -1 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

sind die Punkte $y = 2m\pi$ instabil und die Punkte $y = (2m+1)\pi$ stabil.