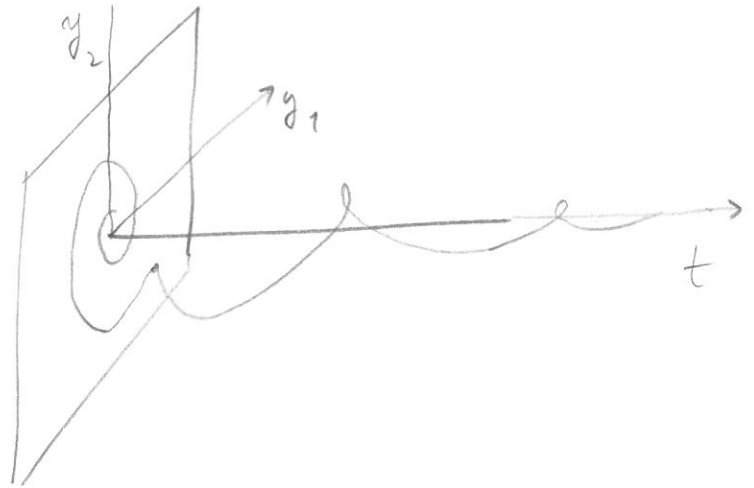
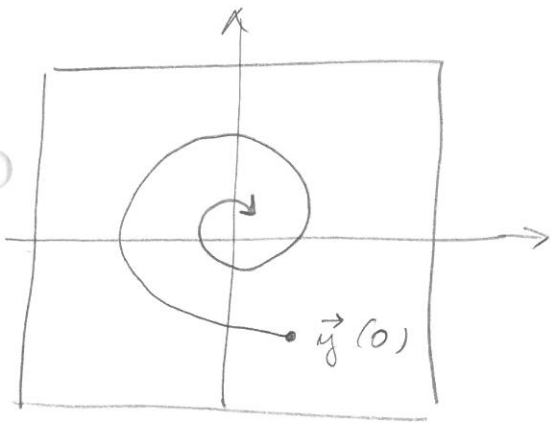


Stabilität

Beispiel :

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = (y_1'(t), y_2'(t)) = \begin{pmatrix} -1/10 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}(t) \\ \vec{y}(0) = (1, -2) \end{cases}$$



In diesem Fall sieht $\vec{y}(t) \rightarrow \vec{0}$ zu sein

(wir werden es bald beweisen).

Betrachten wir das autonome Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = \vec{f}(\vec{y}(t)) \\ \vec{y}(0) = \vec{a} \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

und nehmen wir an, dass $\vec{f} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ und $\vec{a} \in \Omega$. Dann wissen wir, dass das Problem eine einzige, globale Lösung $\vec{y}_{\vec{a}}$ auf $[0, T)$ hat.

Nehmen wir auch an, dass $T = \infty$ (das stimmt z.B., wenn $\vec{f}$ nullbar ist).

Einige Fragen:

- Existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{y}(t) = \vec{l} \in \mathbb{R}^N$?
- Falls ja, wie schnell konvergiert $\vec{y}(t) \rightarrow \vec{l}$?
- Falls nein, hat man $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{y}(t)\| = \infty$?
und wie schnell?
- Wie hängt es von $\vec{a}$ ab?

Wir werden diese Fragen nur im linearen Fall $\vec{f}(\vec{y}) = A\vec{y}$ ausführlich antworten und im nicht-linearen Fall zum Teil antworten.

Bemerkung Nehmen wir an, dass $\vec{y}(t) \rightarrow \vec{\ell} \in \mathbb{R}^N$.
 Dann $\vec{f}(\vec{\ell}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{y}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{y}'(t)$. Da $\vec{y}'(t)$ einen Limes hat, muss unbedingt $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{y}'(t) = \vec{0}$. Somit
 $\vec{f}(\vec{\ell}) = \vec{0}$.

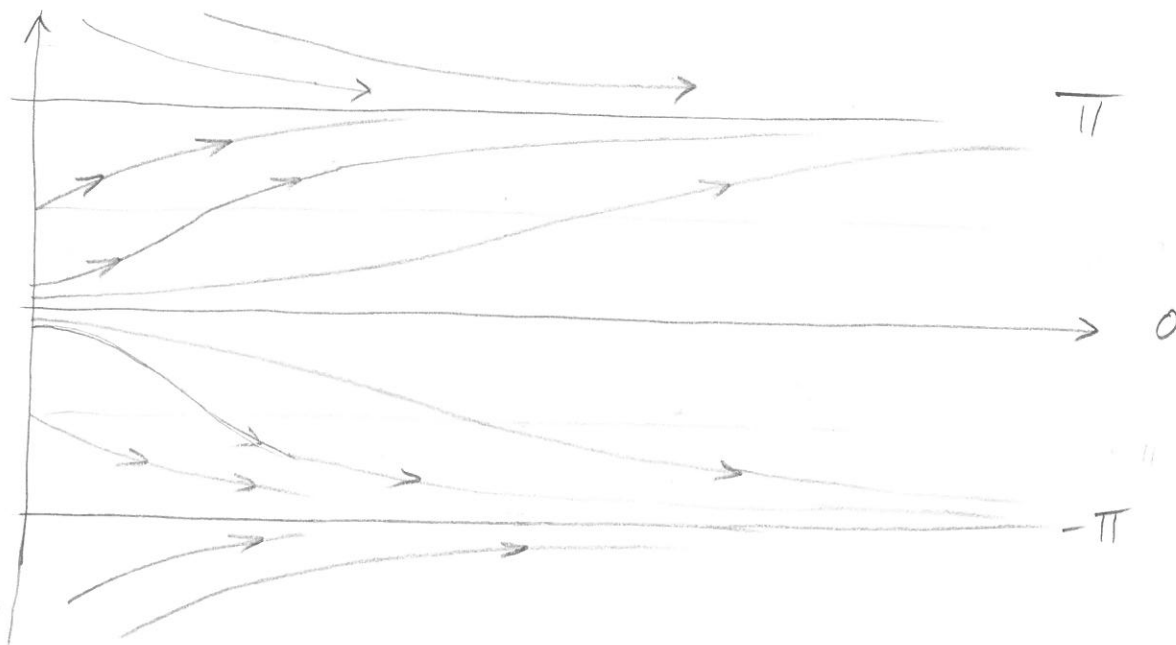
Die Lösung $\vec{y}$ kann nur zu denen $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^N$ konvergieren, die $\vec{f}(\vec{\ell}) = \vec{0}$ erfüllen.

Definition $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^N$ heißt stationär (für $\vec{f}$),
 falls $\vec{f}(\vec{\ell}) = \vec{0}$.

Bemerkung Falls $\vec{\ell}$ stationär ist, ist
 $\vec{y}_{\vec{\ell}}(t) \equiv \vec{\ell}$ eine stationäre Lösung des
 Cauchy-Problem.

Beispiel $y'(t) = \sin(y(t))$

$$\sin(\ell) = 0 \iff \ell = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$



Im linearen Fall $\vec{f}(\vec{y}) = A\vec{y}$ ist $\vec{e}$ stationär genau dann, wenn $A\vec{y} = \vec{0}$.

Wenn A invertibel ist, ist der einzige stationäre Punkt $\vec{y} = \vec{0}$.

Wenn A nicht invertibel ist, ist $\text{Ker} A$ die Menge der stationären Punkten, die dann nicht isoliert sind.

Lemma Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ mit $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall \lambda_i$ Eigenwerte von A . Dann existiert ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf $\mathbb{R}^N$ und $b > 0$, sodass

$$(A\xi, \xi) \leq -b(\xi, \xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Gleichweise, falls $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ findet man

$$(A\xi, \xi) \geq b(\xi, \xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Idee des Beweises Sei $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_N < 0$. Dann

$$(A\xi, \xi) \leq \max \lambda_i \|\xi\|^2,$$

und $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)$. Wenn $A = M^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) M$,

$(\vec{a}, \vec{b}) = (M\vec{a}, M\vec{b})$ ergibt mit

$$\begin{aligned} (A\xi, \xi) &= (\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) M\xi, M\xi) \geq \max \lambda_i \|M\xi\|^2 \\ &\geq \max \lambda_i (\xi, \xi). \end{aligned}$$

Falls $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ muss man die reelle kanonische Form benutzen.

Satz 2 Sei $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ invertibel. Folgende sind äquiv:

1) $\exists \beta > 0 : \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq -\beta \quad \forall \lambda_i$ Eigenwert von A ;

2) $\exists \gamma, \beta > 0 : \forall \vec{a} \in \mathbb{R}^N$
 $\|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| \leq \gamma \|\vec{a}\| e^{-\beta t} \quad \forall t \geq 0$

3) $\exists \gamma, \beta > 0 : \|e^{At}\|_{\mathcal{L}} \leq \gamma e^{-\beta t} \quad \forall t \geq 0$

In diesen Fälle hat man, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} c \|\vec{a}\| e^{-\beta t} = 0$$

und $\vec{y}_{\vec{a}}(t) \rightarrow \vec{0}$ exponentiell-schnell.

Beweis

• Ad 1) $\Rightarrow$ 2) Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ (ansonsten ist $\vec{y}_{\vec{0}} \equiv \vec{0}$),
 somit $\vec{y}_{\vec{a}} \neq \vec{0}$. Sei $(\cdot, \cdot)$ wie im Lemma gegeben und
 $\|\cdot\|$ die entsprechende Norm. Dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\|^2 &= 2 \langle \vec{y}_{\vec{a}}'(t), \vec{y}_{\vec{a}}(t) \rangle = \\ &= 2 \langle A \vec{y}_{\vec{a}}(t), \vec{y}_{\vec{a}}(t) \rangle \leq -2\beta \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{und } \|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 e^{-2\beta t}$$

Die Aussage folgt, da die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|$
 äquivalent sind.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ad 2) } \Rightarrow \text{ 3) } \quad \|e^{At}\|_{\mathcal{L}} &= \sup_{\|\vec{a}\| \neq 0} \frac{\|\vec{a} e^{At}\|}{\|\vec{a}\|} = \\ &= \sup_{\|\vec{a}\| \neq 0} \frac{\|\vec{y}_{\vec{a}}(t)\|}{\|\vec{a}\|} \leq \gamma e^{-\beta t} \end{aligned}$$

3) $\Rightarrow$ 1) Durch Widerspruch: sei $\lambda + i\mu$
 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ ein Eigenwert von A . Schreiben wir
 $A = M \tilde{J} M^{-1}$, wo $\tilde{J}$ die reelle kanonische Form ist,
 mit

$$\tilde{J} = \left(\begin{array}{cc|ccc} \lambda & \mu & & & \\ -\mu & \lambda & & & \\ \hline & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & & n \end{array} \right) \quad (\text{sehen Sie unten}).$$

Dann ist $\vec{y}(t) = M(e^{\lambda t} \cos \mu t, e^{\lambda t} \sin \mu t, 0, \dots, 0)$
 eine Lösung mit $\vec{y}(0) \neq \vec{0}$ und $\|\vec{y}(t)\| \not\rightarrow 0$ für
 $t \rightarrow \infty$. Andererseits sollte man haben:

$$\begin{aligned} \|\vec{y}(t)\| &= \|\vec{y}(0) e^{At}\| \leq \|\vec{y}(0)\| \|e^{At}\|_2 \\ &\stackrel{3)}{\leq} \|\vec{y}(0)\| e^{-\beta t} \rightarrow 0. \quad \square \end{aligned}$$

Reelle kanonische Form: $\lambda_i \neq \lambda_j, \bar{\lambda}_j$

$$\tilde{J} = \text{diag}(\tilde{J}_{n_1^1}(\lambda_1), \dots, \tilde{J}_{n_{s_1}^1}(\lambda_1), \dots, \tilde{J}_{n_1^k}(\lambda_k), \dots, \tilde{J}_{n_{s_k}^k}(\lambda_k))$$

mit $\tilde{J}_n(\lambda) = J_n(\lambda)$ falls $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$\tilde{J}_n(\lambda \pm i\mu) = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} \lambda & \mu & 1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & \mu & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & & & & & 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & & & & & 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{array} \right]$$

Anwendung

Falls $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle λ_i Eigenwerte von A hat man, dass

$$\vec{y}_{\vec{a}}(t) \rightarrow \vec{0} \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

unabhängig von $\vec{a}$ und exponentiell schnell.

○ Beispiel Sei $\vec{y}' = \begin{pmatrix} -1/10 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}$. Die Eigenwerte von A sind die Lösungen $\lambda_{1,2}$ von $0 = \left(-\frac{1}{10} - \lambda\right)(-\lambda) + 1$.

$$\text{Man hat } \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{1}{10} \pm \sqrt{\frac{1}{100} - 4}}{2} = \lambda^2 + \frac{\lambda}{10} + 1$$

$$\text{und } \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = -\frac{1}{20} < 0.$$

○ Gemäß dem Satz hat man $\vec{y}(t) \rightarrow \vec{0}$

exponentiell schnell, unabhängig von $\vec{y}(0)$.