

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Informell: eine gewöhnliche Differentialgl. ist eine Gleichung, die eine Funktion einer skalaren Variable und ihre Ableitungen "enthält".

Beispiel $y'(t) = \sin(y(t)), t \in I \subset \mathbb{R} \quad (1)$

Die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung (Abkürzung aus dem Englisch: 'ODE' = 'ordinary differential equation') ist deshalb eine Abbildung $t \mapsto y(t)$, die differenzierbar in I ist und die (1) löst.

Bedeutung ODEs sind extrem wichtig, da sie eine zentrale Rolle in der mathematischen Modellierung spielen. Dort ist oft die Variable t als 'Zeit' zu verstehen. Beispiele dafür sind überall; von Mechanik bis Populationsdynamik, von Verkehr auf Netzen bis Finanzmathematik, von Chemie bis Soziologie und Medizin.

Grunddefinitionen

Eine ODE der n -ten Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \quad (2)$$

← n -te Ableitung

wobei $F: U \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben, für U offen.

Eine Lösung von (2) im Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ist eine n -differenzierbar Abbildung $y: I \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t)) \in U$ und (2) gilt, für alle $t \in I$.

Beispiele

1. Stammfunktionsproblem: $y'(t) = f(t)$
mit $f \in C(\mathbb{R})$ kann als (2) umgeschrieben werden. Nimm $U = \mathbb{R}^3$ und $F(t, y, p) = p - f(t)$. Sie ist eine ODE der ersten Ordnung
2. Exponentielles Wachstum: Die Gleichung $y'(t) = \kappa y(t)$ für $\kappa \in \mathbb{R}$ ist eine ODE der 1. Ordnung ($U = \mathbb{R}^3, F(t, y, p) = p - \kappa y$)

3. Die Newtonsche-Gleichung $m y''(t) = f(t)$
 mit $m > 0$ (Masse) und $f \in C(\mathbb{R})$ (Kraft)
 ist eine ODE der 2. Ordnung
 $(U = \mathbb{R}^3, F(t, y, p, q) = m q - f(t))$

4. Die RLC-Schaltung-Gleichung
 $L y''(t) + R y'(t) + C y(t) = V(t)$
 (y Strom, L Induktivität, R Widerstand,
 C Kapazität, V Versorgung)
 ist eine ODE der 2. Ordnung
 $(U = \mathbb{R}^3, F(t, y, p, q) = L q + R p + C y - V(t))$

Sehr oft kann man $U = I \times V$ mit $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$
 nehmen, oder sogar $U = \mathbb{R}^{n+2}$, wie in Beispielen
 1.-4. Das ist allerdings nicht immer der Fall:

5. Die Gleichung $\sqrt{1 - y'(t)} = \arcsin(t) + y(t)$
 ist eine ODE der 1. Ordnung mit
 $U \subset (-1, 1) \times \mathbb{R} \times [-\infty, 1]$.

Nicht alle Gleichungen sind ODEs

6. $2 y'(t) = y(2t)$, $y'(t + y(t)) = 0$ und
 $y'(t) \geq 0$ sind keine ODEs.

Fragestellung

Wofür interessieren wir uns?

(A) Existenz: hat die ODE eine Lösung?

Die ODE $(y'(t))^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung. Die ODE $(y'(t))^2 + (y(t))^2 = 0$ hat die triviale Lösung $y = 0$.

(B) Eindeutigkeit: ist die Lösung eindeutig?

Sehr oft ist es nicht der Fall: die ODE $y'(t) = y(t)$ hat die Lösungen $y(t) = ce^t$ für $c \in \mathbb{R}$ beliebig (und diese sind alle Lösungen davon)

(C) Lösbarkeit: kann man eine Lösung berechnen?

Sehr oft ist es nicht möglich: die ODE $y'(t) = \sin(y(t))$ hat Lösungen, die durch elementare Funktionen nicht ausgedrückt werden können.

Manchmal ist es möglich: die ODE $y''(t)(y'(t) - t) = 0$ hat die zwei Familien von Lösungen $y_1(t) = c_1 t + c_2$ und $y_2(t) = \frac{t^2}{2} + c_3$, für $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

D) Stationäre Lösungen?

Die Gleichung $y'(t) = \sin(y(t))$ hat die stationären Lösungen $y(t) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Die ODE $y'(t) = ky(t)$ hat die einzige stationäre Lösung $y(t) = 0$, für $k = 0$.

E) Qualitatives Verhalten

Die Lösungen von $y'(t) = \sin(y(t))$ sind monoton und beschränkt. Die von $y'(t) = ky(t)$ sind auch monoton aber nicht beschränkt.

F) Langzeit-Verhalten

Jede Lösung y von $y'(t) = \sin(y(t))$ konvergiert für $t \rightarrow +\infty$. Die Lösung von $y'(t) = ky(t)$ konvergiert für $t \rightarrow +\infty$ genau dann, wenn $k = 0$. (Sehen Sie die geometrische Interpretation auf Seite 11).

Klassifizierung

- ① Die ODE $F(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$ heißt linear falls F linear in $(y(t), \dots, y^{(n)}(t))$ ist.

Beispiele: $t^2 y'(t) = \cos(t^3) y(t)$ ist linear
 $y'(t) = \sin(y(t))$ ist nicht linear

- ② Eine ODE ist in normaler Form, falls sie als

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

geschrieben ist.

Beispiele: $y'(t) = \sin(y(t))$ ist in normaler Form, $y'(t)y(t) = 1$ ist nicht in normaler Form (könnte allerdings in normaler Form umgeschrieben werden), $y'(t)y(t) = 0$ ist nicht in normaler Form (und kann auch in normaler Form nicht umgeschrieben werden.).

- ③ Eine ODE heißt autonom, falls sie die Form
- $$F(y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$
- hat. D.h. F ist unabhängig von t .

Beispiele $y'(t) = \sin(y(t))$ ist autonom.
 $t y''(t) = \cos(t) y(t)$ ist nicht autonom.

Gleichungen und Systeme

Wir werden sowohl ODEs als auch Systeme von ODEs betrachten, z. B.

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) + t \\ y_2'(t) = \sin(y_1(t)). \end{cases}$$

Die Notation von (2) soll man so erweitern

$$\vec{F}(t, \vec{y}(t), \vec{y}'(t), \dots, \vec{y}^{(n)}(t)) = \vec{0} \quad (2')$$

wobei $\vec{F}: U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(n+1)N} \rightarrow \mathbb{R}^N$

(N ODEs der n-ten Ordnung) und

$\vec{y} = (y_1, \dots, y_N): I \rightarrow \mathbb{R}^N$ zu finden ist.

So viel Allgemeinheit werden wir allerdings nicht brauchen, weil...

- Wichtige Bemerkung: ODEs der n-ten Ordnung kann man als ODE-Systeme von n ODEs der 1. Ordnung umschreiben

$$y(t) = y_0(t)$$

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_0'(t) = y_1(t), \\ y_1'(t) = y_2(t), \\ \vdots \\ 0 = F(t, y_0(t), y_1(t), \dots, y_{n-1}(t), y_{n-1}'(t)) \end{cases}$$

Falls die ODE in Normalform ist, ist das entsprechende System auch in Normalform.

Beispiel Schreiben wir $y'''(t) = y''(t)y'(t) + y(t) + t$ um: wir finden

$$\begin{cases} y_0' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ y_2' = y_2 y_1 + y_0 + t, \end{cases}$$

das als $\vec{y}'(t) = \vec{F}(t, \vec{y}(t))$ umgeschrieben werden kann, mit $\vec{y} = (y_0, y_1, y_2)$ und $\vec{F}(t, y_0, y_1, y_2) = (y_1, y_2, y_2 y_1 + y_0 + t)$.

Statt eine ODE der n -ten Ordnung kann man ein System von n ODEs der 1. Ordnung betrachten. Deshalb kann ein System von n ODEs der Ordnungen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ als ein System von $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ der 1. Ordnung umschreiben.

Beispiel

$$\begin{cases} y_1'' = y_1 + y_2 \\ y_2'' = \cos(y_1) \end{cases} \quad \begin{matrix} z_0 = y_1 \\ z_2 = y_2 \\ \Longleftrightarrow \end{matrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z_0' = z_1 \\ z_1' = z_0 + z_2 \\ z_2' = z_3 \\ z_3' = \cos(z_0) \end{cases}$$

Zweite wichtige Bemerkung: alle nicht autonome N -Systeme können als autonome $(N+1)$ -Systeme umgeschrieben werden;

Sei $\vec{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t)) \in \mathbb{R}^N$ eine Lösung des nicht-autonomen System:

$$\vec{F}(t, \vec{y}(t), \vec{y}'(t), \dots, \vec{y}^{(n)}(t)) = \vec{0} \in \mathbb{R}^N.$$

Dann löst $\vec{z}(t) = (z_0(t), \vec{y}(t)) \in \mathbb{R}^{N+1}$ das autonome System

$$\vec{G}(\vec{z}(t), \vec{z}'(t), \dots, \vec{z}^{(n)}(t)) = \vec{0} \in \mathbb{R}^{N+1}$$

$$\begin{aligned} \text{für } G(z_0, \vec{y}, z_0', \vec{y}', \dots, z_0^{(n)}, \vec{y}^{(n)}) &= \\ &= (z_0' - 1, \vec{F}(\vec{y}, \vec{y}', \dots, \vec{y}^{(n)})) \end{aligned}$$

und umgekehrt.

Bewspril: Man kann die nicht autonome ODE $y''(t) = t^2 \cos(y(t))$ als ein autonomes System umschreiben:

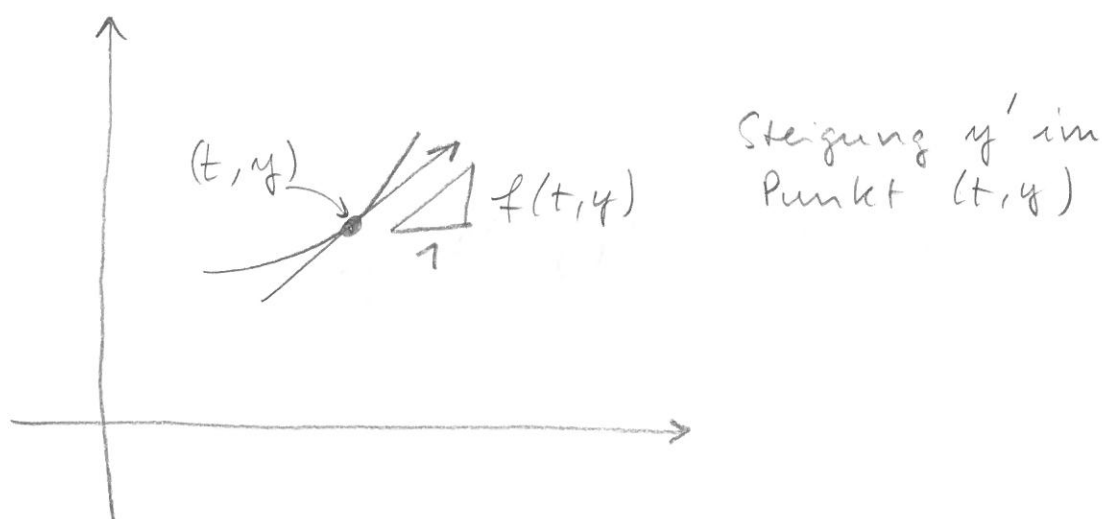
$$\begin{cases} z_0'(t) = 1 \\ y''(t) = (z_0(t))^2 \cos(y(t)) \end{cases}$$

Bemerkung: z_0 spielt die Rolle der Zeit. Deshalb hat man $z_0'(t) = 1$.

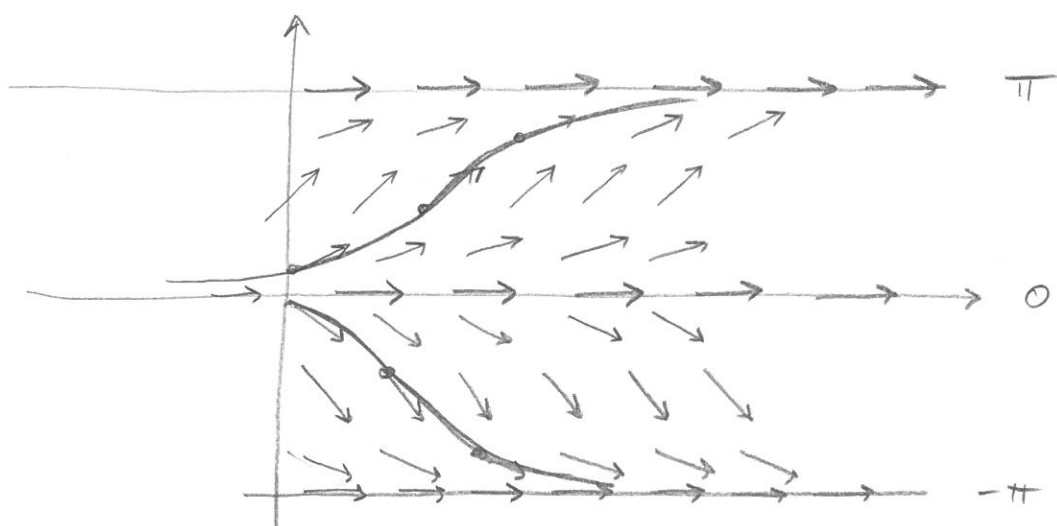
Übung

	Ord.	Linear.	Norm. Form	Autonom
$y'(t) = \sin(y(t))$	1	N	J	J
$y''(t) = \sqrt{t + y(t)}$	2	N	J	N
$ y'(t) = 1$	1	N	N	J
$y'(t)y''(t) = 0$	2	N	N	J
$y'(t) = t^2 y(t)$	1	J	J	N
$\begin{cases} y_1' = \cos(y_1 y_2) \\ y_2'' = y_1''' \end{cases}$	3	N	N	J
$\begin{cases} y_2'' = y_1 + y_3 \\ y_3'' = y_1 + y_2 \\ y_1'' = y_3 \end{cases}$	3	J	J	J
$A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ $\vec{y}''(t) = A \vec{y}(t)$	2	J	J	J

Geometrische Interpretation einer ODE
 der 1. Ordnung in Normalform
 $y'(t) = f(t, y(t))$



Fluxfeld von $y'(t) = \sin(y(t))$



Wichtige Bemerkung: die Lösungen schneiden sie sich nicht! Deshalb sind alle Lösungen beschränkt, monoton und konvergent für $t \rightarrow \pm \infty$!