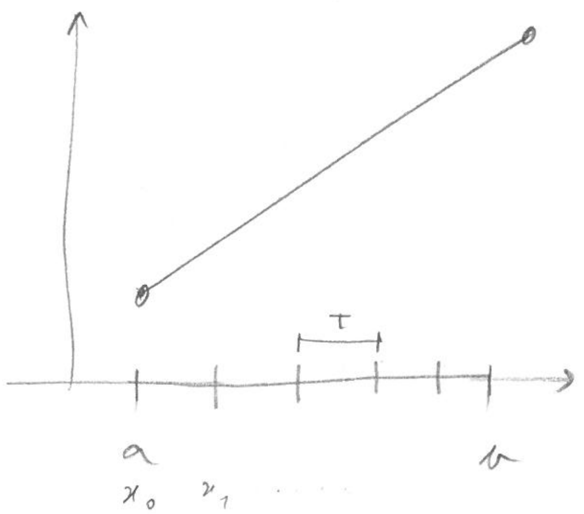
Beispiele

1) $\mathscr{C}[a,b] \subset R[a,b]$

2) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x$




$\tau = \frac{b-a}{N}$ Feinheit

$\underbrace{x_i = a + i\tau}_{\text{gleichmäßige Zerlegung}}$

▷ $h_{+N}(x) = x_i \quad , \quad x \in [x_{i-1}, x_i)$

$$\int_a^b h_{+N}(x)\,dx = \sum_{i=1}^N x_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} x_i^2 + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})^2 - \frac{1}{2} x_{i-1}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} x_N^2 - \frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \tau^2 = \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2}{N}$$

▷ $h_{-N}(x) = x_{i-1} \quad , \quad x \in [x_{i-1}, x_i)$

$$\int_a^b h_-(x)\,dx = \sum_{i=1}^N x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^N \left( -\frac{1}{2} x_{i-1}^2 - \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})^2 + \frac{1}{2} x_i^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2}{N}$$

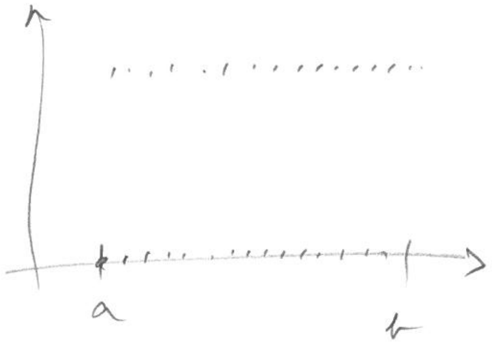
Dann

$$\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2 = \lim_{N \to +\infty} \int_a^b h_{-N} \le \int_{*a}^b f \le \int_a^{*b} f \le$$

$$\le \lim_{N \to +\infty} \int_a^b h_{+N} = \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2$$

3) $D: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Dirichlet funktion




$h_+ \in \mathcal{T}_+(D) \implies h_+ \geq 1 \implies \int_a^{*b} D \geq 1 \cdot (b-a)$

$h_- \in \mathcal{T}_-(D) \implies h_- \leq 0 \implies \int_{*a}^{b} D \leq 0$

Das impliziert, dass $D \notin R[a,b]$.

<u>Satz</u> (Integrierbarkeitskriterium) Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann $f \in R[a,b] \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists h_\pm \in \mathcal{T}_\pm(f) : \int_a^b h_+ - \int_a^b h_- < \varepsilon$

<u>Beweis</u> Nach den Definitionen von sup und inf. $\square$

☆ <u>Satz</u> $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton $\implies f \in R[a,b]$

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$ und $f$ mon. wachsend und nicht konstant. Dann ist $f$ beschränkt: $f(a) \leq f \leq f(b)$. Nehmen wir eine gleichmäßige Zerlegung mit Feinheit $\tau = \frac{b-a}{N} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, $h_+(x) = f(x_i)$, $h_-(x) = f(x_{i-1})$, $x \in [x_i; x_{i-1})$.

Dann $\int_a^b (h_+ - h_-) = \tau \sum f(x_i) - f(x_{i-1}) =$

$= \tau(f(b) - f(a)) < \varepsilon$. $\square$

## Gleichmäßige Stetigkeit

Definition $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig in $D$, falls

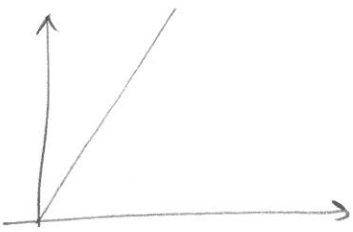
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x, y \in D : |x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Bemerkung $f$ ist stetig in $D$ falls

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in D \ \exists \delta_{\varepsilon x} > 0 \ \forall y \in D : |x - y| < \delta_{\varepsilon x} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Beispiele

1) $f : x \in [0, 1] \longrightarrow 2x$ ist gleichmäßig stetig



Sei $\varepsilon > 0$, nehmen wir

$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Bemerkung: alle Lipschitz-stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig

2) $f : x \in [0, 1] \longmapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig

Sei $\varepsilon > 0$, nehmen wir $\delta = \varepsilon^2$

3) $f : x \in [0, +\infty) \longmapsto x^2$ ist nicht gleichmäßig stetig.

4) $f : x \in [-1, 1] \longmapsto \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ ist nicht gleichmäßig stetig

Bemerkung: alle gleichmäßig stetige Funktionen sind stetig.

<u>Satz</u> (Heine-Cantor) $f \in C[a,b] \Rightarrow$

☆ $f$ ist gleichmäßig stetig in $[a,b]$.

<u>Beweis</u> Durch Widerspruch:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta, y_\delta \in [a,b] \text{ mit } |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ und } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon$$

Nehmen wir $\delta = \frac{1}{n}$ und $x_n, y_n$, so dass

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

Nach Bolzano-Weierstraßsatz seien $x_{n_k} \to x$, $y_{n_k} \to y$.

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \geq \lim_{n \to +\infty} |x_n - y_n| = \left| \lim_{n \to +\infty} x_n - y_n \right| = |x - y|$$

Deshalb $x = y$. Andererseits

$$\varepsilon \leq \lim_{n \to +\infty} \left| f(x_n) - f(y_n) \right| = \left| \lim_{n \to +\infty} f(x_n) - f(y_n) \right| =$$

$$|f(x) - f(y)| = 0;$$

was ein Widerspruch ist. □

<u>Satz</u> (Stetige Funktionen sind integrierbar) ☆

$$f \in C[a,b] \Longrightarrow f \in R[a,b]$$

<u>Beweis</u> Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ und benutzen wir die gleichmäßige Stetigkeit von $f$ mit $\varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{(b-a)}$. Nehmen wir eine Zerlegung mit Feinheit $\tau < \delta_\varepsilon$ und definieren wir

$$h_+(x) = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad h_-(x) = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f, \quad x \in [x_{i-1}, x_i).$$

Dann $h_\pm \in \mathcal{T}_\pm(f)$ und

$$\int_a^b (h_+ - h_-) \leq \sum \varepsilon (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a) = \tilde{\varepsilon}. \quad □$$

<u>Satz</u> $f \in R[a,b] \implies$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists h_\varepsilon \in \mathcal{T}[a,b]$ (oder $h_\varepsilon \in \mathcal{T}_\pm(f)$),

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b h_\varepsilon \right| < \varepsilon.$$

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach der Definition von Supremum (bzw. Infimum) existiert $h_\varepsilon \in \mathcal{T}_-(f)$, so dass

$$\int_a^b h_\varepsilon \leq \int_a^b f \leq \int_a^b h_\varepsilon + \varepsilon. \quad \square$$

<u>Bemerkung</u> Man kann den Wert $\int_a^b f$ durch die Werte von Treppenfunktionen approximieren.

<u>Satz</u> (Eigenschaften des Integrals).

Seien $f, g \in R[a,b]$. Dann

Linearität

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda f \in R[a,b]$ und $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

2) $f+g \in R[a,b]$ und $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

3) $f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$ (Monotonie)

4) $\forall c \in (a,b): f\big|_{[a,c]} \in R[a,c]$, $f\big|_{[c,b]} \in R[c,b]$

und $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

5) $|f| \in R[a,b]$ und $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

<u>Notation</u> Es ist hilfreich, diese Konvention zu benutzen:

$$\int_a^a f = 0, \qquad \int_b^a f = -\int_a^b f.$$

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $h_\pm^{(f)} \in \mathcal{T}_\pm(f)$ und $h_\pm^{(g)} \in \mathcal{T}_\pm(g)$ die Treppenfunktionen, die $\int_a^b h_+^{(\cdot)} - h_-^{(\cdot)} < \varepsilon$ haben. $\boxed{\text{Ad 1}}$ Sei $\lambda > 0$ (der andere Fall ist ähnlich). Dann $\lambda h_\pm^{(f)} \in \mathcal{T}_\pm(\lambda f)$ und

$$\int_a^b \lambda h_+ - \lambda h_- < \lambda \varepsilon$$ was noch beliebig ist.

$\boxed{\text{Ad 2}}$ Seien $h_\pm^{(f)} + h_\pm^{(g)} \in \mathcal{T}_\pm(f+g)$ und

$$\int_a^b \left(h_+^{(f)} + h_+^{(g)} - h_-^{(f)} - h_-^{(g)}\right) < 2\varepsilon$$ was noch beliebig ist.

$\boxed{\text{Ad 3}}$ $\mathcal{T}_+(g) \subseteq \mathcal{T}_+(f)$ $\left(\mathcal{T}_-(f) \subset \mathcal{T}_-(g)\right)$. Dann

$$\int_a^b f = \overset{*}{\int_a^b} f \leq \int_a^b g.$$

$\boxed{\text{Ad 4}}$ Wir haben, dass $h_\pm^{(f)}\big|_{[a,c]} \in \mathcal{T}_\pm(f|_{[a,c]})$ und $h_\pm^{(f)}\big|_{[c,b]} \in \mathcal{T}_\pm(f|_{[c,b]})$. Dann

$$\int_a^c h_+^{(f)} - h_-^{(f)} \underset{\uparrow}{\le} \int_a^b h_+^{(f)} - h_-^{(f)} < \varepsilon. \text{ Deshalb } f\big|_{[a,c]} \in R[a,c]$$

3), 4) für Treppenfunktionen

Der Fall $f\big|_{[c,b]}$ ist ähnlich.

Seien $h_\pm^{(1)} \in \mathcal{T}_\pm(f|_{[a,c]})$, $h_\pm^{(2)} \in \mathcal{T}_\pm(f|_{[c,b]})$

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int_a^c h_-^{(1)} \le \int_a^c f \le \int_a^c h_+^{(1)} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int_c^b h_-^{(2)} \le \int_c^b f \le \int_c^b h_+^{(2)} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann

$$\begin{aligned} -\varepsilon + \int_a^b f &\le -\varepsilon + \int_a^c h_-^{(1)} + \int_c^b h_-^{(2)} \\ &\le \int_a^c f + \int_c^b f \le \int_a^c h_+^{(1)} + \int_c^b h_+^{(2)} + \varepsilon \\ &\le \int_a^b f + \varepsilon \end{aligned}$$

und $\varepsilon$ ist beliebig.

$\boxed{\text{Ad 5}}$ Man benutzt $h_\pm^+$ (bzw $h_\pm^-$) um zu beweisen, dass $f^\pm \in R[a,b]$. Dann ist auch $f^+ + f^- = |f| \in R[a,b]$

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_a^b f^+ + f^-\right| \underset{\uparrow}{\le} \int_a^b |f^+| + \int_a^b |f^-| = \int_a^b |f|$$

mit den Treppenfunktionen.

□