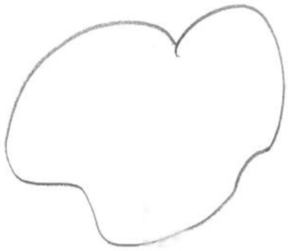
Integralrechnung

Drei Probleme

1) Fläche berechnen



2) Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ gegeben

Zu finden ist $F:(a,b)\to\mathbb{R}$,

so dass $F'=f$

3) die Flugbahn der ISS berechnen

eine einzige Lösung.

Unbestimmtes Integral

Definition Seien $f, F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I offenes Intervall. F heißt *Stammfunktion* von f, falls F differenzierbar ist und $F' = f$.

Beispiele

1) $F(x) = x^2$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 2x$.

2) $\sin$ ist eine Stammfunktion von $\cos$.

Bemerkung Nicht alle Funktionen haben eine Stammfunktion. Beispiel

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

Definition $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt (*unbestimmt*) *integrierbar*, fall f eine Stammfunktion hat.

Satz $f \in C(I) \Longrightarrow f$ ist (unbestimmt) integrierbar.

Wir werden diesen Satz später beweisen.

Satz (Struktursatz) Sei f unbestimmt integrierbar und $F' = f$. Dann G ist eine Stammfunktion von f $\iff$ $G = F + K$ für $K \in \mathbb{R}$

Beweis: $\boxed{\Leftarrow}$ $(F + K)' = F' + K' = F' + 0 = F' = f$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $(G - F)' = f - f = 0 \Rightarrow G - F = K$

Notation Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\int f(x)\,dx = \{ \text{Stammfunktionen von } f \}$$

Bemerkung Sei F eine beliebige Stammfunktion von f.

Dann $\int f(x)\,dx = \{F + K : K \in \mathbb{R}\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Notation}}}{=} F + K$

Beispiele

1) $a \in \mathbb{R}$ $\quad \int a\,dx = ax + K$
2) $\int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + K$
3) $r \neq -1$, $\quad \int x^r\,dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + K$
4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + K \qquad x \neq 0$
5) $\int e^x\,dx = e^x + K$
6) $\int \cos x\,dx = \sin x + K$, $\quad \int \sin x\,dx = \cos x + K$
7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + K \qquad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$
8) $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + K$

<u>Übung</u> Sei F die Stammfunktion von $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x$ mit $F(\pi) = 3$.
Welcher Wert hat $F(0)$?

$$F(x) = -\cos x + k$$

$$F(\pi) = -\cos\pi + k = -(-1) + k = 1 + k = 3$$

$$\Longrightarrow k = 2$$

So ist $F(x) = -\cos x + 2$ und

$$F(1) = -\cos 0 + 2 = -1 + 2 = 1$$

<u>Satz</u> (Linearität) Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ unbestimmt integrierbar. Dann $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

<u>Beweis</u> Sei $F' = f$, $G' = g$. Dann $(\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g$, sodass $\alpha f + \beta g$ ist auch unbestimmt integrierbar und die Gleichung gilt. □

<u>Anwendung</u> $\int \left(4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + e^{-3x}\right) dx =$

$$= 4 \int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int e^{-3x}\,dx = 4\left(-\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot 2\right) - \frac{1}{3} e^{-3x} + k$$

Bemerkung

- die Ableitung einer elementaren Funktion kann man immer berechnen.
- die Stammfunktion nicht:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

Satz (Partielle Integration) Seien $f, g \in C^1(I)$. Dann

$$\int f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx.$$

Beweis $(fg)' = f'g + fg'$. Dann

$$K + (fg)(x) = \int f'(x) g(x)\, dx + \int f(x) g'(x)\, dx. \quad \square$$

Beispiele

1) $\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int 1 (-\cos x)\, dx$

$= -x \cos x + \sin x + k$

2) $\int x e^{-x} = -x e^{-x} - \int 1 (-e^{-x})\, dx$

$= -x e^{-x} - e^{-x} + K$

3) $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx =$

$= x(\ln x - 1) + K$

4) $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx =$

$= x^2 e^x - 2x e^x + \int 2 e^x \, dx =$

$= x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + K$

5) $\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$

$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x (-\sin x) \, dx$

$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x)$

$\Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$

<u>Satz</u> (Substitutionsregel) Seien $f: J \to \mathbb{R}$ stetig und $g: I \to J$ mit $g \in C^1(I)$. Dann $x \in I \mapsto f(g(x))\, g'(x)$ ist integrierbar und $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(y)\, dy \Big|_{y=g(x)}$

<u>Bemerk</u> Sei F eine Stammfunktion von f. Dann

$$(F \circ g)' = (F' \circ g)\, g' = (f \circ g)\, g'.$$

Deshalb $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + K$. $\square$

<u>Anwendungen</u>

1) $\int x \cos(3x^2)\, dx =$ $\quad$ $y = 3x^2 = g(x)$, $g'(x) = 6x$, $f(y) = \cos y$

$$= \frac{1}{6} \int 6x \cos(3x^2)\, dx = \frac{1}{6} \int \cos y\, dy \Big|_{y=3x^2} =$$

$$= \frac{1}{6} \sin y \Big|_{y=3x^2} + K = \frac{1}{6} \sin 3x^2 + K.$$

<u>Äquivalente Version:</u> $\int f(y)\, dy = \int f(g(x))\, g'(x)\, dx$

2) $\int \sqrt{r^2 - y^2}\, dy =$ $\quad$ $y = r \sin x = g(x)$, $g'(x) = r \cos x$

$$= \int \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 x}\; r \cos x\, dx = \int r \cos x \cdot r \cos x\, dx =$$

$$= r^2 \int \cos^2 x\, dx = r^2 \int \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{r^2 x}{2} + \frac{r^2 \sin 2x}{4} + K$$

Superregeln

1) $\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + K$

2) $\forall r \in \mathbb{R},\ r \neq -1 \quad \int (f(x))^r f'(x)\, dx = \dfrac{(f(x))^{r+1}}{r+1} + K$

$$\int \cos x\, (\sin x)^{2020}\, dx = \frac{(\sin x)^{2021}}{2021} + K$$

3) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)| + K$

4) $\int f'(x) \sin f(x)\, dx = -\cos f(x) + K$

5) $\int \dfrac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}\, dx = \arctan f(x) + K$

⋮

Integration von rationellen Funktionen

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$ P, Q Polynome mit Grad $p, q = 0, 1, \ldots,$

1) $p \geq q \rightsquigarrow$ dividieren

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx = \int \frac{x(x-1)+x+1}{x-1}\,dx =$$

$$= \int \frac{x(x-1)+(x-1)+2}{x-1}\,dx =$$

$$= \int (x+1)\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + K$$

2) $p < q = 1$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + K$$

3) $p < q = 2$

3.1) $Q(x) = c(x-x_1)(x-x_2)$ $\quad x_1 \neq x_2$

$$\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)} =$$

$$\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3} = \frac{ax+3a+bx-2b}{(x-2)(x+3)}$$

$a+b=0$

$3a-2b=1$

$a = 1/5,\ b = -1/5$

I.10

$$\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{5}\ln|x+3| + k$$

3.1) $Q(x) = c(x-x_1)^2$

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2} \overset{x+1=t}{=} \int \frac{t-1}{t^2}\,dt =$$

$$= \ln|t| + \frac{1}{t} + k = \ln|1+x| + \frac{1}{x+1} + k$$

3.2) $Q(x)$ hat keine Nullstelle

$$\int \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + k$$

4) $q > 2 \rightsquigarrow$ faktorisieren

Jeder $Q(x)$ hat die Form

$Q(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)\,Q_1(x)\cdots Q_m(x)$,

wobei Q_i Grad 2 und keine Nullstellen haben.

Rationale Funktionen von e^x

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx = \int \frac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx =$$

$y = e^x$

$dy = e^x\,dx$

$dx = \frac{dy}{y}$

$$= \int \frac{2}{y+\frac{1}{y}}\,\frac{dy}{y} =$$

$$= 2\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = 2\arctan y + K = 2\arctan e^x + K$$

Rationale Funktionen von sin und cos

$$y = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad x = 2\arctan y, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2}{1+y^2}$$

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2} = \frac{1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1}$$

$$= \cos 2\,\frac{x}{2} = \cos x$$

$$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$\int \frac{\sin x + 3\cos x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{\frac{2y}{1+y^2}+\frac{3(1-y^2)}{1+y^2}}{1+\frac{2y}{1+y^2}}\,\frac{2\,dy}{1+y^2}.$$

Trigonometrische Funktionen $\quad n, m \in \mathbb{N}$

$$\int \sin x \,(\cos x)^m \, dx = -\frac{(\cos x)^{m+1}}{m+1} + k$$

$$\int \cos x \,(\sin x)^m \, dx = \frac{(\sin x)^{m+1}}{m+1} + k$$

$$\int (\sin x)^n (\cos x)^m \, dx =$$

$$= \int (\sin x)^{n-2} \left(1 - (\cos x)^2\right)(\cos x)^m \, dx =$$

$$= \int (\sin x)^{n-2} \left((\cos x)^m - (\cos x)^{m+2}\right)$$

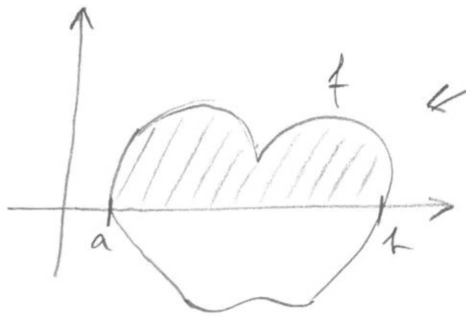
Falls n oder m ungerade sind, können wir dieses Prozeden zum Ende anwenden

Fall die beide n und m gerade sind, ersätzen wir

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Berechnen von Flächen



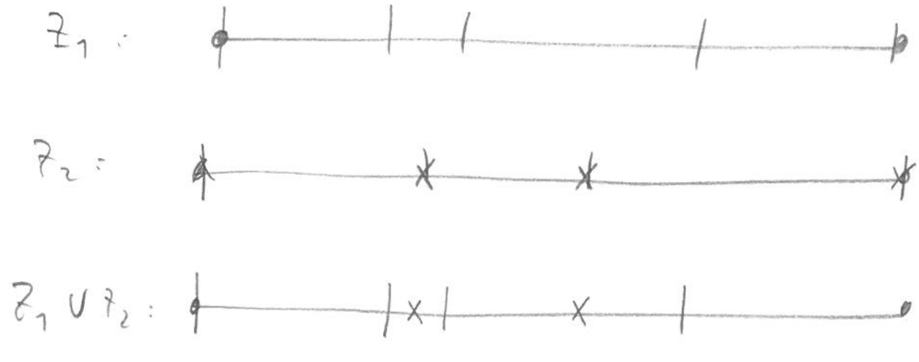
das Gebiet, das unter dem Graph von f steht

Definition $\{x_i\}_{i=0}^{N} \subset [a,b]$ ist eine Zerlegung von $[a,b]$ falls

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

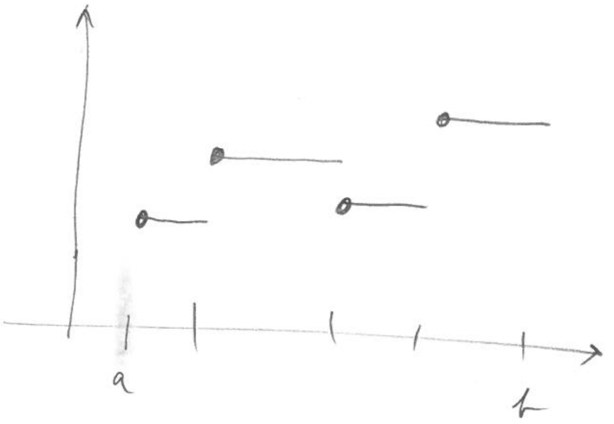
Sei $\mathcal{Z}[a,b]$ die Menge der Zerlegungen von $[a,b]$. Dann

$$Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}[a,b] \implies Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{Z}[a,b]$$



<u>Definition</u> $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine
<u>Treppenfunktion</u>, falls $\{x_0, \dots, x_N\} \in \mathcal{Z}([a, b])$
und $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$f(x) = c_j \quad \text{für} \quad x \in [x_{i-1}, x_i)$$
$$i = 1, \dots, N$$



Die Menge der Treppenfunktionen ist $\mathcal{T}[a, b]$

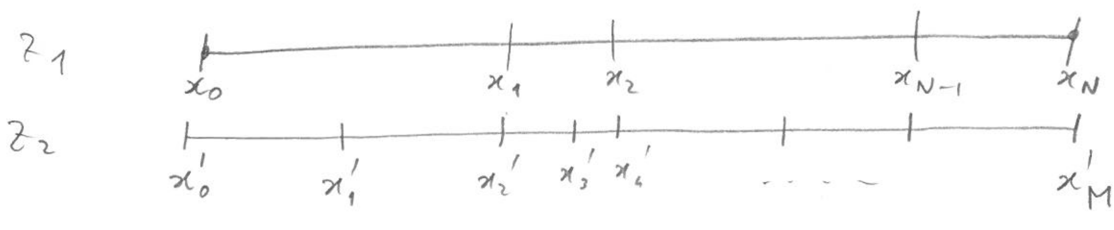
<u>Definition</u> (Integral der Treppenfunktionen)

Sei $f \in \mathcal{T}([a, b])$. Dann ist das Integral von f von a bis b so definiert

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} c_i (x_i - x_{i-1})$$

<u>Bemerkung</u> $f \in \mathcal{T}[a, b]$ kann durch viele Zerlegungen definiert werden. Der Wert $\int_a^b f(x)\, dx$ ist davon unabhängig.

<u>Beweis</u> Sei $Z_1 \subset Z_2$



$\forall\ i \in \{1, \dots, N\}\quad \exists\ j_i \in \{1, \dots, M_i\}$,

so dass $\quad x_i = x'_{j_i} < x'_{j_i+1} < \dots < x'_{j_i+M_i} = x_{i+1}$

Dann $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} c_i (x_i - x_{i-1}) =$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_i \sum_{j=j_i}^{j_i+M_i} (x_j - x_{j-1})$$

Falls $Z_1 \not\subset Z_2$ benutzen wir $Z_1 \subset Z_1 \cup Z_2$. $\Box$

<u>Proposition</u> (Eigenschaften) Seien $f, g \in \mathcal{T}[a,b]$.

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\quad \lambda f \in \mathcal{T}([a,b])$ und $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

2) $f + g \in \mathcal{T}[a,b]$ und $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

"Linearität des Integrals"

3) $f \leq g \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

<u>Beweis</u> Sei $Z = \{x_0, \dots, x_N\}$ eine Zerlegung für f <u>und</u> g. Dann ist Z eine Zerlegung für λf und $f+g$ und

1) $\displaystyle\int_a^b \lambda f = \sum_{i=1}^{N} \lambda c_i^{(f)} (x_i - x_{i-1}) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i^{(f)} (x_i - x_{i-1}) = \lambda \int_a^b f$

2) $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \sum_{i=1}^{N} (c_i^{(f)} + c_i^{(g)})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{N} c_i^{(f)} (x_i - x_{i-1}) +$

$\displaystyle\quad + \sum_{i=1}^{N} c_i^{(g)} (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f + \int_a^b g$

3) $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{i=1}^{N} c_i^{(f)} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{N} c_i^{(g)} (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b g$. $\Box$

Definition (Riemannsches Integral)

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Man definiert das obere Integral von f

$$\int_a^{*\,b} f(x)\,dx := \inf \Big\{ \int_a^b h(x)\,dx : \underbrace{h \in \mathcal{T}[a,b],\ f \le h}_{= \ \mathcal{T}_+(f) \ \neq \ \emptyset} \Big\}$$

und das untere Integral von f

$$\int_{*\,a}^{b} f(x)\,dx := \sup \Big\{ \int_a^b h(x)\,dx : \underbrace{h \in \mathcal{T}[a,b],\ h \le f}_{= \ \mathcal{T}_-(f) \ \neq \ \emptyset} \Big\}$$

Falls $\int_a^{*\,b} f(x)\,dx = \int_{*\,a}^{b} f(x)\,dx$ ist, sagen wir, dass f Riemann integrierbar in $[a,b]$ ist (kurz: "integrierbar") und schreiben $f \in R[a,b]$.

Das Integral von f ist die Zahl

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{*\,b} f(x)\,dx = \int_{*\,a}^{b} f(x)\,dx.$$

Bemerkung Die Definition erweitert die der Treppenfunktionen: Sei $f \in \mathcal{T}[a,b]$.

Dann $f \in \mathcal{T}_+(f)$, $f \in \mathcal{T}_-(f)$.