ÜBUNGSAUFGABEN
PROSEMINAR ZU DIFFERENTIALGEOMETRIE 1

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

42. Betrachte $\mathbb{R}^{2n}$ mit Koordinaten $(x^1, y^1, \dots, x^n, y^n)$ und

$$\omega := dx^1 \wedge dy^1 + \cdots + dx^n \wedge dy^n \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$$

Zeige, $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega = n!\, dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^n$.

43. Betrachte $\mathbb{R}^{2n+1}$ mit Koordinaten $(z, x^1, y^1, \dots, x^n, y^n)$ und

$$\alpha = dz + x^1 dy^1 + \cdots + x^n dy^n \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n+1}).$$

Zeige $\alpha \wedge (d\alpha)^n = \alpha \wedge d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha = n!\, dz \wedge dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^n$.

44. Berechne die äußere Ableitung folgender Differentialformen:

(a) Bestimme df, wobei $f = (x^2 + y^2 + z^2)^\kappa \in \Omega^0(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, $\kappa \in \mathbb{R}$.
(b) Bestimme $d\alpha$, wobei $\alpha = e^{xyz} dx \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$.
(c) Bestimme $d\beta$, wobei $\beta = \sin(x + y + z) dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$.

45. Es sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit und es bezeichne $-M$ dieselbe Mannigfaltigkeit mit der umgekehrten Orientierung. Weiters sei $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Zeige $\int_{-M} \omega = -\int_M \omega$.

46. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $S^2 \subseteq U$, $f, g, h \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ und

$$\omega := f dx \wedge dy + g dx \wedge dz + h dy \wedge dz \in \Omega^2(U).$$

Weiters bezeichne $\iota : S^2 \to U$ die kanonische Inklusion, und

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to S^2, \quad \Phi(\varphi, \theta) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$$

die üblichen Kugelkoordinaten. Zeige

$$\int_{S^2} \iota^*\omega = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \Big(f(\Phi(\varphi,\theta)) \sin\theta\cos\theta - g(\Phi(\varphi,\theta)) \cos^2\theta \sin\varphi + h(\Phi(\varphi,\theta)) \cos^2\theta\cos\varphi \Big) d\varphi d\theta$$

47. Es bezeichne $\iota : S^2 \to \mathbb{R}^3$ die kanonische Inklusion und $\omega := x dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Berechne $\int_{S^2} \iota^*\omega$, einmal direkt aus der Definition des Integrals, siehe Aufgabe 46, und einmal mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Weitere Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/DGI2010.html`.