# ÜBUNGSAUFGABEN
# PROSEMINAR ZU DIFFERENTIALGEOMETRIE 1

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

**39.** Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, $g$ die induzierte Riemannmetrik und $\nabla$ die entsprechende kovariante Ableitung (Levi–Civita Konnexion) auf $M$. Ausgehend von der Definition der Riemannkrümmung

$$R(X,Y)(Z) := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

zeige direkt aus den Eigenschaften von $\nabla$ (siehe 3.6 im Skriptum), dh. ohne Verwendung der zweiten Fundamentalform, dass

$$R(fX,Y)(Z) = R(X,fY)(Z) = R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)(Z),$$

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gilt. Schließe daraus, dass $R$ als Tensorfeld interpretiert werden kann, genauer $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$.

**40.** Wie in Aufgabe 39, dh. ohne Verwendung der zweiten Fundamentalform, verifiziere die folgenden algebraischen Symmetrien der Riemannkrümmung, $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$:

(a) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$
(b) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$
(c) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$
(d) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

**41.** Es seien $M$, $g$ und $\nabla$ wie oben. Weiters sei $(U,u)$ eine Karte von $M$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i} \in \mathfrak{X}(U)$ die damit assoziierten Vektorfelder, und es bezeichnen $\Gamma_{i,j}^k \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ die durch $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{i,j}^k \partial_k$ eindeutig bestimmten Funktionen (Christoffel-Symbole). Weiters sei $c : I \to U$ eine glatte Kurve, und $(u \circ c)(t) = (u^1(t), \dots, u^n(t))$ die Komponenten der Kartendarstellung von $c$. Zeige, dass die Geodätengleichung $\nabla_{c'}c' = 0$ äquivalent zu folgendem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist:

$$\frac{d^2}{dt^2}u^k(t) + \sum_{i,j=1}^n (\Gamma_{i,j}^k \circ u^{-1})(u^1(t), \dots, u^n(t)) \frac{d}{dt}u^i(t) \frac{d}{dt}u^j(t) = 0,$$

$k = 1, \dots, n = \dim(M)$. Schließe daraus, das es zu jedem $\xi \in T_xM$ genau eine Geodäte $c$ mit $c(0) = x$ und $c'(0) = \xi$ gibt.

Weitere Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/DGI2010.html`.