

ÜBUNGSAUFGABEN
PROSEMINAR ZU DIFFERENTIALGEOMETRIE 1

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

33. Zeige, dass auf dem Möbiusband kein globales Einheitsnormalenfeld existiert.

34. Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ zwei reelle $(n \times n)$ -Matrizen und $a, b \in \mathbb{R}^n$. Betrachte die beiden Vektorfelder $X(x) := Ax + a$ und $Y(x) := Bx + b$ auf \mathbb{R}^n und bestimme ihre Lieklammer $[X, Y]$.

35. Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine reelle $(n \times n)$ -Matrix und $X(x) := Ax$ das entsprechende lineare Vektorfeld auf \mathbb{R}^n . Bestimme den Fluss von X .

36. Es sei $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus zwischen Teilmannigfaltigkeiten. Zeige $f^*[X, Y] = [f^*X, f^*Y]$, für je zwei Vektorfelder X, Y auf N , vgl. 2.15 im Skriptum.

37. Es sei $c = (r, h) : I \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und betrachte die Rotationsfläche

$$M := \left\{ (r(t) \cos \phi, r(t) \sin \phi, h(t)) \mid t \in I, \phi \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Für die Gaußkrümmung K , mittlere Krümmung H und Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 zeige:

$$K = -\frac{r''}{r}, \quad H = \frac{rh'' + r'h'}{2rr'}, \quad \kappa_1 = \frac{h'}{r}, \quad \kappa_2 = h''r' - h'r''.$$

Bestimme auch die Hauptkrümmungsrichtungen sowie die Krümmungslinien.

38. Finde eine Fläche in \mathbb{R}^3 mit konstanter Gaußkrümmung $K = -1$.
Hinweis: Aufgabe 37.