ÜBUNGSAUFGABEN
PROSEMINAR ZU DIFFERENTIALGEOMETRIE 1

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

28. Zeige, dass die Ableitung der Abbildung $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(A) := \det(A)$, durch folgende Formel gegeben ist:

$$Df(A)(B) = \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}B), \qquad A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ B \in M_n(\mathbb{R}).$$

Folgere, $T_A \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A^{-1}B) = 0\}$, $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$.

29. Zeige, dass $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (\langle x, x\rangle - 1)^2 = 0\}$ keine Darstellung von S^n als reguläre Nullstellenmenge ist.

30. Es sei A eine reelle, symmetrische nicht degenerierte $(n\times n)$-Matrix. Zeige, dass die Quadrik $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t Ax = 1\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ bildet. Für den Tangentialraum bei $x \in K$ zeige weiters $T_xQ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \perp Ax\}$.

31. Bestimme die Tangentialräume des Torus $M \subseteq \mathbb{R}^3$ aus Aufgabe 25.

32. Zeige, dass der Gruppenhomomorphismus $\pi : \mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}$, $\pi(t) := e^{2\pi \mathbf{i} t}$, ein lokaler Diffeomorphismus ist. Schließe, dass auch $p := \pi \times \cdots \times \pi : \mathbb{R}^n \to T^n := S^1 \times \cdots \times S^1 \subseteq \mathbb{C}^n$ einen lokalen Diffeomorphismus definiert. Für jede ganzzahlige invertierbare Matrix $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) := \{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = 1\}$ betrachte die entsprechende lineare Abbildung $\tilde f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tilde f_A(x) := Ax$, und zeige dass es genau eine Abbildung $f_A : T^n \to T^n$ gibt, die $p \circ \tilde f_A = f_A \circ p$ erfüllt. Schließe, dass $f_A : T^n \to T^n$ glatt ist. Zeige weiters, dass die Zuordnung $A \mapsto f_A$ einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Diff}(T^n)$ liefert, wobei $\mathrm{Diff}(M)$ die Gruppe der Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit M bezeichnet. Gib explizit eine lokale glatte Ausdehnung von f_A auf eine offene Umgebungen von T^n in $\mathbb{C}^n$ an.

Weitere Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/DGI2010.html`.