ÜBUNGSAUFGABEN
PROSEMINAR ZU DIFFERENTIALGEOMETRIE 1

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

19. Bestimme folgende Kurvenintegrale:
(a) $\int_c xdy$, wobei $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t,t)$.
(b) $\int_{\tilde{c}} xdy$, wobei $\tilde{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{c}(t) := (t,t^2)$.
(c) $\int_c 3x^2dx + 4y^3dy$, wobei $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine beliebige glatte Kurve von $c(0) = (0,0)$ nach $c(1) = (1,1)$ bezeichnet.

20. Betrachte die glatte geschlossene reguläre Kurve $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (\cos t, \frac{1}{2}\sin 2t) = (\cos t, \sin t \cos t)$. Fertige eine Skizze an. Verwende die Integralformel (Abschnitt 1.12)

$$U(c) = w_0(c') = \frac{1}{2\pi}\int_{c'}\eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\eta(c'(t), c''(t))dt, \quad \eta = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2},$$

um $U(c) = 0$ zu zeigen. (Hinweis: Es ist nicht notwendig tatsächlich eine Stammfunktion zu bestimmen.)

21. Zeichne eine orientierte glatte geschlossene Kurve in der Ebene deren Komplement mindestens sieben Zusammenhangskomponenten besitzt. Für jede dieser Zusammenhangskomponenten bestimme (heuristisch mit Hilfe der Homotopieinvarianz) die Windungszahl der Kurve um die Punkte dieser Komponente. (Die Windungszahl ist ja auf diesen Komponenten konstant, siehe Abschnitt 1.12.)

22. Zeige, dass die folgenden Relationen für Kurven in $\mathbb{R}^2$ Äquivalenzrelationen sind:
(a) Homotopie von stetigen geschlossenen Kurven.
(b) Isotopie von regulären glatten geschlossenen Kurven.

23. Leite eine Formel für die totale Krümmung einer glatten geschlossenen regulären, aber nicht notwendigerweise nach Bogenlänge parametrisierten Kurve her. Zeige, dass diese invariant unter orientierungstreuen Reparametrisierungen ist, und im bogenlängenparametrisierten Fall mit der Formel $\int_a^b \kappa(t)dt$ aus der Vorlesung übereinstimmt (Abschnitt 1.14).

Weitere Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/DGI2010.html`.