ÜBUNGSAUFGABEN
PROSEMINAR ZU DIFFERENTIALGEOMETRIE 1

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

18 (Koch'sche Schneeflockenkurve)**.** Ist $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$, $n \geq 1$, eine Folge von Punkten $P_i \in \mathbb{R}^2$, dann bezeichne $c_{\mathcal{P}} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ den stückweise affin parametrisierten Polygonzug durch die Punkte P_i, dh. für $t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$, $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, sei $c_{\mathcal{P}}(t) := P_i + (nt - i)(P_{i+1} - P_i)$. Beachte, dass $c_{\mathcal{P}} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig parametrisierte Kurve ist.

Definiere eine neue Folge von Punkten $\mathcal{P}'$ durch

$$\mathcal{P}' := (P_0, Q_0, R_0, S_0, P_1, Q_1, R_1, S_1, \dots, P_{n-1}, Q_{n-1}, R_{n-1}, S_{n-1}, P_n)$$

wobei:

$$\begin{aligned} Q_i &:= P_i + \tfrac{1}{3}(P_{i+1} - P_i) \\ S_i &:= P_i + \tfrac{2}{3}(P_{i+1} - P_i) \\ R_i &:= \tfrac{1}{2}(P_i + P_{i+1}) + \tfrac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (P_{i+1} - P_i) \end{aligned}$$

Fertige eine Skizze an, und zeige

$$L_0^1(c_{\mathcal{P}'}) = \tfrac{4}{3} L_0^1(c_{\mathcal{P}}), \quad \sup_{t \in [0,1]} \|c_{\mathcal{P}'}(t) - c_{\mathcal{P}}(t)\| \leq d_{\mathcal{P}}, \quad d_{\mathcal{P}'} \leq \tfrac{1}{3} d_{\mathcal{P}},$$

wobei $d_{\mathcal{P}} := \max\{\|P_{i+1} - P_i\| : i = 0, \dots, n-1\}$.

Definiere $\mathcal{P}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, rekursiv durch

$$\mathcal{P}_0 := \mathcal{P}, \quad \mathcal{P}_1 := \mathcal{P}', \quad \mathcal{P}_2 := (\mathcal{P}')', \dots \quad \mathcal{P}_{k+1} := (\mathcal{P}_k)', \dots$$

Zeige, dass die Kurven $c_k := c_{\mathcal{P}_k} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gleichmäßig gegen eine stetige Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, konvergieren. (Hinweis: Leite aus obigen Abschätzungen

$$\sup_{t \in [0,1]} \|c_{k+l}(t) - c_k(t)\| \leq \big(\tfrac{1}{3^{k+l-1}} + \dots + \tfrac{1}{3^k}\big) d_{\mathcal{P}}, \qquad k, l \in \mathbb{N},$$

her, und wende das Cauchy'sches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz an.) Zeige weiters $L_0^1(c) = \infty$.

Weitere Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/DGI2010.html`.