ÜBUNGSAUFGABEN
PROSEMINAR ZU DIFFERENTIALGEOMETRIE 1

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

7. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine stetig parametrisierte Kurve. Betrachte die reparametrisierte Kurve $c_1 := c \circ \phi : J \to \mathbb{R}^2$, wobei $\phi : J \xrightarrow{\cong} I$ ein streng monoton wachsender Homöomorphismus ist. Zeige $L_a^b(c_1) = L_{\phi(a)}^{\phi(b)}(c)$, direkt aus der Definition der Bogenlänge. Zeige auch, dass die Bogenlänge invariant unter Bewegungen ist. Gib, im glatten Fall, einen alternativen Beweis mit Hilfe der Integralformel für die Bogenlänge.

8. Es sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine glatt parametrisierte Kurve, sodass:

$$c((-\infty, 0]) \subseteq \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \qquad (x\text{-Achse})$$
$$c([0, \infty)) \subseteq \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} \qquad (y\text{-Achse})$$

Zeige, dass c nicht regulär (und daher auch nicht nach Bogenlänge) parametrisiert werden kann. *Bemerkung: Solche Kurven existieren, siehe Abschnitt 1.3 im Skriptum, erster Absatz.*

9. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Betrachte die Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t, f(t))$. Zeige, dass c regulär ist, bestimme die Tangente $T_{c(t)}c$ und leite die bekannte Formel für die Bogenlänge her.

10. Betrachte die glatte Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t^2, t^3)$. Für $0 < a < b$ bestimme die Bogenlänge $L_a^b(c)$. Bestimme eine Bogenlängenparametrisierung von $c|_{(0,\infty)}$. Besitzt die Kurve c eine reguläre Parametrisierung nahe $t = 0$?

11. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $r : I \to (0, \infty)$ eine glatte Funktion. Betrachte die Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (r(t) \cos t, r(t) \sin t)$. Zeige, dass c regulär ist, bestimme die Tangente $T_{c(t)}c$ und leite die bekannte Formel für die Bogenlänge her.

Weitere Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/DGI2010.html`.