ÜBUNGSAUFGABEN
PROSEMINAR ZU DIFFERENTIALGEOMETRIE 1

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

1. Es bezeichne $\mathcal{G}$ die Menge der Bewegungen der Euklidischen Ebene, dh. die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von der Form $f(x) = Ax+b$, wobei $A \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass $\mathcal{G}$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet. Ordnen wir jeder Bewegung f wie oben die Matrix A zu, so erhalten wir eine Abbildung $\mathcal{G} \to \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$. Zeige, dass dies ein wohldefinierter surjektiver Gruppenhomomorphismus ist, und bestimme seinen Kern.

2. Es bezeichne $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Rotation mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}^2$ und Drehwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$. Zeige, dass ρ eine Bewegung ist, und bestimme $A \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$ mit $\rho(x) = Ax + b$.

3. Es bezeichne $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an einer Gerade g in $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass σ eine Bewegung ist, und bestimme $A \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$ mit $\sigma(x) = Ax + b$.

4. Es seien g und $\tilde{g}$ zwei sich schneidende Geraden in $\mathbb{R}^2$. Weiters bezeichnen σ und $\tilde{\sigma}$ die Spiegelungen an g und $\tilde{g}$. Zeige, dass $\sigma \circ \tilde{\sigma}$ eine Drehung ist. Bestimme ihren Mittelpunkt und Drehwinkel. Diskutiere auch den Fall paralleler Geraden.

5. Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := e^{-1/t^2}$, $f(0) := 0$, glatt (dh. C^∞) ist. Zeige weiters, dass alle Ableitungen bei 0 verschwinden.

6. Es sei $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$ eine stetig parametrisierte Kurve und $a, b, c \in I$. Zeige, $L_a^c(\sigma) = L_a^b(\sigma) + L_b^c(\sigma)$, direkt aus der Definition der Bogenlänge,

$$L_a^b(\sigma) := \sup\Big\{ \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} d\big(\sigma(t_i), \sigma(t_{i+1})\big) \;\Big|\; {\scriptstyle n\in\mathbb{N},\, t_i\in I \atop a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b} \Big\}.$$

Weitere Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/DGI2010.html`.