ÜBUNGSAUFGABEN
PROSEMINAR ZU DIFFERENTIALGEOMETRIE 1
SOMMERSEMESTER 2010

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

1. Es bezeichne $\mathcal{G}$ die Menge der Bewegungen der Euklidischen Ebene, dh. die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ von der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass $\mathcal{G}$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet. Ordnen wir jeder Bewegung f wie oben die Matrix A zu, so erhalten wir eine Abbildung $\mathcal{G} \to \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$. Zeige, dass dies ein wohldefinierter surjektiver Gruppenhomomorphismus ist, und bestimme seinen Kern.

2. Es bezeichne $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Rotation mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}^2$ und Drehwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$. Zeige, dass ρ eine Bewegung ist, und bestimme $A \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$ mit $\rho(x) = Ax + b$.

3. Es bezeichne $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an einer Gerade g in $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass σ eine Bewegung ist, und bestimme $A \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$ mit $\sigma(x) = Ax + b$.

4. Es seien g und $\tilde{g}$ zwei sich schneidende Geraden in $\mathbb{R}^2$. Weiters bezeichnen σ und $\tilde{\sigma}$ die Spiegelungen an g und $\tilde{g}$. Zeige, dass $\sigma \circ \tilde{\sigma}$ eine Drehung ist. Bestimme ihren Mittelpunkt und Drehwinkel. Diskutiere auch den Fall paralleler Geraden.

5. Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := e^{-1/t^2}$, $f(0) := 0$, glatt (dh. C^∞) ist. Zeige weiters, dass alle Ableitungen bei 0 verschwinden.

6. Es sei $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$ eine stetig parametrisierte Kurve und $a, b, c \in I$. Zeige, $L_a^c(\sigma) = L_a^b(\sigma) + L_b^c(\sigma)$, direkt aus der Definition der Bogenlänge,

$$L_a^b(\sigma) := \sup\Big\{ \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} d\big(\sigma(t_i), \sigma(t_{i+1})\big) \;\Big|\; {\scriptstyle n \in \mathbb{N},\, t_i \in I \atop a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b} \Big\}.$$

7. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine stetig parametrisierte Kurve. Betrachte die reparametrisierte Kurve $c_1 := c \circ \phi : J \to \mathbb{R}^2$, wobei $\phi : J \xrightarrow{\cong} I$ ein streng monoton wachsender Homöomorphismus ist. Zeige $L_a^b(c_1) = L_{\phi(a)}^{\phi(b)}(c)$, direkt aus der Definition der Bogenlänge. Zeige auch, dass die Bogenlänge invariant unter Bewegungen ist. Gib, im glatten Fall, einen alternativen Beweis mit Hilfe der Integralformel für die Bogenlänge.

Siehe auch `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/DGI2010.html`.

8. Es sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine glatt parametrisierte Kurve, sodass:

$$c((-\infty, 0]) \subseteq \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \qquad (x\text{-Achse})$$
$$c([0, \infty)) \subseteq \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} \qquad (y\text{-Achse})$$

Zeige, dass c nicht regulär (und daher auch nicht nach Bogenlänge) parametrisiert werden kann. *Bemerkung: Solche Kurven existieren, siehe Abschnitt 1.3 im Skriptum, erster Absatz.*

9. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Betrachte die Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t, f(t))$. Zeige, dass c regulär ist, bestimme die Tangente $T_{c(t)}c$ und leite die bekannte Formel für die Bogenlänge her.

10. Betrachte die glatte Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t^2, t^3)$. Für $0 < a < b$ bestimme die Bogenlänge $L_a^b(c)$. Bestimme eine Bogenlängenparametrisierung von $c|_{(0,\infty)}$. Besitzt die Kurve c eine reguläre Parametrisierung nahe $t = 0$?

11. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $r : I \to (0, \infty)$ eine glatte Funktion. Betrachte die Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (r(t) \cos t, r(t) \sin t)$. Zeige, dass c regulär ist, bestimme die Tangente $T_{c(t)}c$ und leite die bekannte Formel für die Bogenlänge her.

12. Leite eine Formel für die Krümmung der Kurve aus Aufgabe 9 her, und charakterisiere ihre Flach- und Wendepunkte.

13. Leite eine Formel für die Krümmung der Kurve aus Aufgabe 11 her, und charakterisiere ihre Flach- und Wendepunkte.

14. Bestimme die Krümmung der *Archimedische Spirale* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t \cos t, t \sin t)$ sowie alle Flachpunkte, Wendepunkte und Scheitel. Fertige eine Skizze an, und berechne die Tangente von c bei $c(0)$. Für $0 < a < b$ bestimme weiters die Bogenlänge $L_a^b(c)$.

15. Bestimme die Krümmung der *logarithmische Spirale* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (e^t \cos t, e^t \sin t)$, sowie alle Flachpunkte, Wendepunkte und Scheitel. Fertige eine Skizze an. Für $a < b$ berechne die Bogenlänge $L_a^b(c)$ sowie eine Bogenlägenparametrisierung von c. Bestimme auch die Evolute von c.

16. Bestimme die Krümmung der *Kardioide (Herzkurve)* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := ((1+\cos t) \cos t, (1+\cos t) \sin t)$, sowie alle Flachpunkte, Wendepunkte und Scheitel. Besitzt die Kurve nahe $t = \pi$ eine reguläre Parametrisierung? Für $a < b$ bestimme weiters die Bogenlänge $L_a^b(c)$. Berechne auch eine Bogenlängenparametrisierung und die Evolute der Einschränkung $c|_{(-\pi,\pi)}$.

17. Betrachte die Abbildung $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $p(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$, aus der Vorlesung. Weiters sei $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Einschränkung

$$p : \mathbb{R}^+ \times (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\lambda(\cos \theta_0, \sin \theta_0) \mid \lambda \leq 0\}$$

ein Diffeomorphismus ist, vgl. Abschnitt 1.8 im Skriptum.

18 (Koch'sche Schneeflockenkurve)**.** Ist $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$, $n \geq 1$, eine Folge von Punkten $P_i \in \mathbb{R}^2$, dann bezeichne $c_{\mathcal{P}} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ den stückweise affin parametrisierten Polygonzug durch die Punkte P_i, dh. für $t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$, $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, sei $c_{\mathcal{P}}(t) := P_i + (nt-i)(P_{i+1} - P_i)$. Beachte, dass $c_{\mathcal{P}} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig parametrisierte Kurve ist.

Definiere eine neue Folge von Punkten $\mathcal{P}'$ durch

$$\mathcal{P}' := (P_0, Q_0, R_0, S_0, P_1, Q_1, R_1, S_1, \dots, P_{n-1}, Q_{n-1}, R_{n-1}, S_{n-1}, P_n)$$

wobei:

$$\begin{aligned} Q_i &:= P_i + \tfrac{1}{3}(P_{i+1} - P_i) \\ S_i &:= P_i + \tfrac{2}{3}(P_{i+1} - P_i) \\ R_i &:= \tfrac{1}{2}(P_i + P_{i+1}) + \tfrac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (P_{i+1} - P_i) \end{aligned}$$

Fertige eine Skizze an, und zeige

$$L_0^1(c_{\mathcal{P}'}) = \tfrac{4}{3} L_0^1(c_{\mathcal{P}}), \qquad \sup_{t \in [0,1]} \|c_{\mathcal{P}'}(t) - c_{\mathcal{P}}(t)\| \leq d_{\mathcal{P}}, \qquad d_{\mathcal{P}'} \leq \tfrac{1}{3} d_{\mathcal{P}},$$

wobei $d_{\mathcal{P}} := \max\{\|P_{i+1} - P_i\| : i = 0, \dots, n-1\}$.

Definiere $\mathcal{P}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, rekursiv durch

$$\mathcal{P}_0 := \mathcal{P}, \quad \mathcal{P}_1 := \mathcal{P}', \quad \mathcal{P}_2 := (\mathcal{P}')', \dots \quad \mathcal{P}_{k+1} := (\mathcal{P}_k)', \dots$$

Zeige, dass die Kurven $c_k := c_{\mathcal{P}_k} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gleichmäßig gegen eine stetige Kurve $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, konvergieren. (Hinweis: Leite aus obigen Abschätzungen

$$\sup_{t \in [0,1]} \|c_{k+l}(t) - c_k(t)\| \leq \big(\tfrac{1}{3^{k+l-1}} + \cdots + \tfrac{1}{3^k}\big) d_{\mathcal{P}}, \qquad k, l \in \mathbb{N},$$

her, und wende das Cauchy'sches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz an.) Zeige weiters $L_0^1(c) = \infty$.

19. Bestimme folgende Kurvenintegrale:

(1) $\int_c x dy$, wobei $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t, t)$.
(2) $\int_{\tilde{c}} x dy$, wobei $\tilde{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{c}(t) := (t, t^2)$.
(3) $\int_c 3x^2 dx + 4y^3 dy$, wobei $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ eine beliebige glatte Kurve von $c(0) = (0,0)$ nach $c(1) = (1,1)$ bezeichnet.

20. Betrachte die glatte geschlossene reguläre Kurve $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (\cos t, \frac{1}{2} \sin 2t) = (\cos t, \sin t \cos t)$. Fertige eine Skizze an. Verwende die Integralformel (Abschnitt 1.12)

$$U(c) = w_0(c') = \frac{1}{2\pi} \int_{c'} \eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(c'(t), c''(t)) dt, \quad \eta = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

um $U(c) = 0$ zu zeigen. (Hinweis: Es ist nicht notwendig tatsächlich eine Stammfunktion zu bestimmen.)

21. Zeichne eine orientierte glatte geschlossene Kurve in der Ebene deren Komplement mindestens sieben Zusammenhangskomponenten besitzt. Für jede dieser Zusammenhangskomponenten bestimme (heuristisch mit Hilfe der Homotopieinvarianz) die Windungszahl der Kurve um die Punkte dieser Komponente. (Die Windungszahl ist ja auf diesen Komponenten konstant, siehe Abschnitt 1.12.)

22. Zeige, dass die folgenden Relationen für Kurven in $\mathbb{R}^2$ Äquivalenzrelationen sind:

(1) Homotopie von stetigen geschlossenen Kurven.
(2) Isotopie von regulären glatten geschlossenen Kurven.

23. Leite eine Formel für die totale Krümmung einer glatten geschlossenen regulären, aber nicht notwendigerweise nach Bogenlänge parametrisierten Kurve her. Zeige, dass diese invariant unter orientierungstreuen Reparametrisierungen ist, und im bogenlängenparametrisierten Fall mit der Formel $\int_a^b \kappa(t)dt$ aus der Vorlesung übereinstimmt (Abschnitt 1.14).

24. Zeige, dass $\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ tatsächlich ein kompakter metrisierbarer und separabler topologischer Raum ist, vgl. Abschnitt 2.5 im Skriptum.

25 (Torus)**.** Es seien $0 < r < R$. Zeige, dass

$$M := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\right\}$$

eine kompakte, 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Fertige eine Skizze an! Zeige weiters, dass M diffeomorph zu der 2-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit $T := S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ ist.

26 (Klein'sche Flasche)**.** Betrachte die beiden glatten Abbildungen $\rho : S^1 \to S^1$, $\rho(x, y) := (-x, -y)$, und $\sigma : S^1 \to S^1$, $\sigma(x, y) := (x, -y)$. Betrachte weiters die Mannigfaltigkeit $T := S^1 \times S^1$ und zeige, dass $\nu : T \to T$, $\nu(z_1, z_2) := (\rho(z_1), \sigma(z_2))$ eine glatte Abbildung definiert, die $\nu \circ \nu = \mathrm{id}_T$ erfüllt. Zeige, dass

$$z \sim z' \quad :\Leftrightarrow \quad z = z' \text{ oder } \nu(z) = z'$$

eine Äquivalenzrelation auf T definiert. Es bezeichne $K := T/\sim$ den Quotientenraum und $p : T \to K$ die kanonische Projektion. Zeige, dass K mit der Struktur einer abstrakten Mannigfaltigkeit versehen werden kann, die p zu einem lokalen Diffeomorphismus macht.

27. Zeige, dass

$$f : S^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \qquad f(x, y, u, w) := \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^u & w \\ 0 & e^{-u} \end{pmatrix}$$

ein Diffeomorphismus ist.

28. Zeige, dass die Ableitung der Abbildung $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(A) := \det(A)$, durch folgende Formel gegeben ist:

$$Df(A)(B) = \det(A)\operatorname{tr}(A^{-1}B), \qquad A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ B \in M_n(\mathbb{R}).$$

Folgere, $T_A \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A^{-1}B) = 0\}$, $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$.

29. Zeige, dass $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (\langle x, x\rangle - 1)^2 = 0\}$ keine Darstellung von S^n als reguläre Nullstellenmenge ist.

30. Es sei A eine reelle, symmetrische nicht degenerierte $(n \times n)$-Matrix. Zeige, dass die Quadrik $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x = 1\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ bildet. Für den Tangentialraum bei $x \in K$ zeige weiters $T_x Q = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \perp Ax\}$.

31. Bestimme die Tangentialräume des Torus $M \subseteq \mathbb{R}^3$ aus Aufgabe 25.

32. Zeige, dass der Gruppenhomomorphismus $\pi : \mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}$, $\pi(t) := e^{2\pi \mathbf{i} t}$, ein lokaler Diffeomorphismus ist. Schließe, dass auch $p := \pi \times \cdots \times \pi : \mathbb{R}^n \to T^n := S^1 \times \cdots \times S^1 \subseteq \mathbb{C}^n$ einen lokalen Diffeomorphismus definiert. Für jede ganzzahlige invertierbare Matrix $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) := \{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = 1\}$ betrachte die entsprechende lineare Abbildung $\tilde{f}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{f}_A(x) := Ax$, und zeige dass es genau eine Abbildung $f_A : T^n \to T^n$ gibt, die $p \circ \tilde{f}_A = f_A \circ p$ erfüllt. Schließe, dass $f_A : T^n \to T^n$ glatt ist. Zeige weiters, dass die Zuordnung $A \mapsto f_A$ einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Diff}(T^n)$ liefert, wobei $\mathrm{Diff}(M)$ die Gruppe der Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit M bezeichnet. Gib explizit eine lokale glatte Ausdehnung von f_A auf eine offene Umgebungen von T^n in $\mathbb{C}^n$ an.

33. Zeige, dass auf dem Möbiusband kein globales Einheitsnormalenfeld existiert.

34. Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ zwei reelle $(n \times n)$-Matrizen und $a, b \in \mathbb{R}^n$. Betrachte die beiden Vektorfelder $X(x) := Ax + a$ und $Y(x) := Bx + b$ auf $\mathbb{R}^n$ und bestimme ihre Lieklammer $[X, Y]$.

35. Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine reelle $(n \times n)$-Matrix und $X(x) := Ax$ das entsprechende lineare Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$. Bestimme den Fluss von X.

36. Es sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus zwischen Teilmannigfaltigkeiten. Zeige $f^*[X, Y] = [f^*X, f^*Y]$, für je zwei Vektorfelder X, Y auf N, vgl. 2.15 im Skriptum.

37. Es sei $c = (r, h) : I \to (0, \infty) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und betrachte die Rotationsfläche

$$M := \Big\{ \big(r(t)\cos\phi, r(t)\sin\phi, h(t)\big) \,\Big|\, t \in I, \phi \in \mathbb{R} \Big\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Für die Gaußkrümmung K, mittlere Krümmung H und Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 zeige:

$$K = -\frac{r''}{r}, \quad H = \frac{rh'' + r'h'}{2rr'}, \quad \kappa_1 = \frac{h'}{r}, \quad \kappa_2 = h''r' - h'r''.$$

Bestimme auch die Hauptkrümmungrichtungen sowie die Krümmungslinien.

38. Finde eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit konstanter Gaußkrümmung $K = -1$. *Hinweis: Aufgabe 37.*

39. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, g die induzierte Riemannmetrik und ∇ die entsprechende kovariante Ableitung (Levi–Civita Konnexion) auf M. Ausgehend von der Definition der Riemannkrümmung

$$R(X,Y)(Z) := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

zeige direkt aus den Eigenschaften von ∇ (siehe 3.6 im Skriptum), dh. ohne Verwendung der zweiten Fundamentalform, dass

$$R(fX,Y)(Z) = R(X,fY)(Z) = R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)(Z),$$

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gilt. Schließe daraus, dass R als Tensorfeld interpretiert werden kann, genauer $R \in \mathcal{T}_3^1(M)$.

40. Wie in Aufgabe 39, dh. ohne Verwendung der zweiten Fundamentalform, verifiziere die folgenden algebraischen Symmetrien der Riemannkrümmung, wobei $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$:

(1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$
(2) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$
(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$
(4) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

41. Es seien M, g und ∇ wie oben. Weiters sei (U,u) eine Karte von M, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i} \in \mathfrak{X}(U)$ die damit assoziierten Vektorfelder, und es bezeichnen $\Gamma^k_{i,j} \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ die durch $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma^k_{i,j}\partial_k$ eindeutig bestimmten Funktionen (Christoffel-Symbole). Weiters sei $c : I \to U$ eine glatte Kurve, und $(u \circ c)(t) = (u^1(t), \dots, u^n(t))$ die Komponenten der Kartendarstellung von c. Zeige, dass die Geodätengleichung $\nabla_{c'}c' = 0$ äquivalent zu folgendem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist:

$$\frac{d^2}{dt^2}u^k(t) + \sum_{i,j=1}^n (\Gamma^k_{i,j} \circ u^{-1})(u^1(t), \dots, u^n(t)) \frac{d}{dt}u^i(t) \frac{d}{dt}u^j(t) = 0,$$

$k = 1, \dots, n = \dim(M)$. Schließe daraus, das es zu jedem $\xi \in T_xM$ genau eine Geodäte c mit $c(0) = x$ und $c'(0) = \xi$ gibt.

42. Betrachte $\mathbb{R}^{2n}$ mit Koordinaten $(x^1, y^1, \dots, x^n, y^n)$ und

$$\omega := dx^1 \wedge dy^1 + \dots + dx^n \wedge dy^n \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$$

Zeige, $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega = n!\, dx^1 \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^n$.

43. Betrachte $\mathbb{R}^{2n+1}$ mit Koordinaten $(z, x^1, y^1, \dots, x^n, y^n)$ und

$$\alpha = dz + x^1 dy^1 + \dots + x^n dy^n \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n+1}).$$

Zeige $\alpha \wedge (d\alpha)^n = \alpha \wedge d\alpha \wedge \dots \wedge d\alpha = n!\, dz \wedge dx^1 \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^n$.

44. Berechne die äußere Ableitung folgender Differentialformen:

(1) Bestimme df, wobei $f = (x^2 + y^2 + z^2)^\kappa \in \Omega^0(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, $\kappa \in \mathbb{R}$.
(2) Bestimme $d\alpha$, wobei $\alpha = e^{xyz}dx \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$.
(3) Bestimme $d\beta$, wobei $\beta = \sin(x + y + z)dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$.

45. Es sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit und es bezeichne $-M$ dieselbe Mannigfaltigkeit mit der umgekehrten Orientierung. Weiters sei $\omega \in \Omega^n_c(M)$. Zeige $\int_{-M} \omega = -\int_M \omega$.

46. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $S^2 \subseteq U$, $f, g, h \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ und

$$\omega := f dx \wedge dy + g dx \wedge dz + h dy \wedge dz \in \Omega^2(U).$$

Weiters bezeichne $\iota : S^2 \to U$ die kanonische Inklusion, und

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to S^2, \quad \Phi(\varphi, \theta) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$$

die üblichen Kugelkoordinaten. Zeige

$$\int_{S^2} \iota^*\omega = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \Big(f(\Phi(\varphi,\theta)) \sin\theta\cos\theta - g(\Phi(\varphi,\theta)) \cos^2\theta \sin\varphi \\ + h(\Phi(\varphi,\theta)) \cos^2\theta\cos\varphi \Big) d\varphi d\theta$$

47. Es bezeichne $\iota : S^2 \to \mathbb{R}^3$ die kanonische Inklusion und $\omega := x dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Berechne $\int_{S^2} \iota^*\omega$, einmal direkt aus der Definition des Integrals, siehe Aufgabe 46, und einmal mit Hilfe des Satzes von Stokes.