II. Überlagerungen

Jeder hinreichend zusammenhängende topologische Raum besitzt eine einfach zusammenhängende, die sogenannte universelle Überlagerung. Geometrische Strukturen der Basis lassen sich oft in kanonischer Weise auf diese universelle Überlagerung liften. Die Fundamentalgruppe der Basis wirkt frei auf der universellen Überlagerung und lässt üblicherweise die gelifteten geometrischen Strukturen invariant. Die Überlagerungstheorie liefert daher ein Werkzeug mit dem das Studium geometrischer Objekte auf die einfach zusammenhängende Situation zurückgeführt werden kann. Als Beispiele seien hier nur die Theorie der Lie-Gruppen, die Riemannschen Flächen und die vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung erwähnt.

Unter schwachen Zusammenhangsvoraussetzungen ist eine vollständige Klassifikation der Überlagerungen eines Raumes mit Hilfe seiner Fundamentalgruppe möglich. Auch das Liftungsproblem lässt sich mittels der Fundamentalgruppe lösen. Schließlich können Überlagerungen dazu verwendet werden die Fundamentalgruppen mancher Räume zu bestimmen.

Einführungen in die Überlagerungstheorie finden sich etwa in [**6**, Kapitel IX], [**4**, Chapter 1.3], [**13**, Kapitel II.6], [**9**, Kapitel III.6] oder [**10**, Chapter 2]. Für eine kurze Darstellung mittels Gruppoiden siehe [**8**, Chapter 3].

II.1. Elementare Eigenschaften von Überlagerungen. Eine surjektive stetige Abbildung $p : \tilde{X} \to X$ wird eine *Überlagerung* genannt, falls jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U mit folgender Eigenschaft besitzt: Es existieren eine Indexmenge Λ und disjunkte offene Teilmengen $\tilde{U}_\lambda \subseteq \tilde{X}$, $\lambda \in \Lambda$, mit $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} \tilde{U}_\lambda$, sodass $p|_{\tilde{U}_\lambda} : \tilde{U}_\lambda \to U$ ein Homöomorphismus ist, für jedes $\lambda \in \Lambda$. In diesem Fall sagen wir U wird gleichmäßig von p überlagert. In diesem Zusammenhang werden X als *Basis*, $\tilde{X}$ als *Total*- oder *Überlagerungsraum* und p als *Überlagerungsabbildung* bezeichnet. Wir sagen auch $\tilde{X}$ ist eine Überlagerung von X, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht welche Abbildung p gemeint ist.

II.1.1. Beispiel. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) := e^{2\pi \mathbf{i} t}$, ist eine Überlagerung, die offenen Teilmengen $S^1 \setminus \{1\}$ und $S^1 \setminus \{-1\}$ werden von p gleichmäßig überlagert, siehe Lemma I.4.8.

Unter einem *Isomorphismus* zwischen zwei Überlagerungen $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ und $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ verstehen wir einen Homöomorphismus $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ für den $p_2 \circ \varphi = p_1$ gilt. Zwei Überlagerungen desselben Raums werden *isomorph* genannt, falls ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert. Ein Isomorphismus von Überlagerungen $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ wird *Automorphismus* oder *Decktransformation* von $\tilde{X}$ genannt. Die Menge der Decktransformationen einer Überlagerung bildet bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe die mit $\mathrm{Deck}(p)$ oder $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ bezeichnet wird.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

II.1.2. Bemerkung. Jede Überlagerung ist ein lokaler Homöomorphismus und daher insbesondere eine offene Abbildung.[15] Auch ist jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eine Quotientenabbildung, dh. eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn ihr Urbild $p^{-1}(U)$ offen in $\tilde{X}$ ist. Ein surjektiver lokaler Homöomorphismus muss i.A. keine Überlagerung sein, etwa ist $p : (0, 3\pi) \to S^1$, $p(t) := e^{2\pi \mathbf{i} t}$, keine Überlagerung. Weder $1 \in S^1$ noch $-1 \in S^1$ besitzen offene Umgebungen die von p gleichmäßig überlagert werden.

II.1.3. Beispiel. Ist F ein nicht leerer diskreter topologischer Raum, dann ist die kanonische Projektion $p_X : X \times F \to X$ eine Überlagerung. Jede Bijektion $\pi : F \to F$ liefert eine Decktransformation $X \times F \to X \times F$, $(x, f) \mapsto (x, \pi(f))$. Wir erhalten einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathfrak{S}(F) \to \mathrm{Deck}(p_X)$.

II.1.4. Beispiel. Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $A \subseteq X$ ein Teilraum, dann ist die Einschränkung $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ eine Überlagerung. Für diese eingeschränkte Überlagerung wird auch die Notation $\tilde{X}|_A$ verwendet.

Eine Überlagerung wird *trivial* genannt, wenn sie zu einer Überlagerung $p_X : X \times F \to X$ isomorph ist, siehe Beispiel II.1.3. Die nächste Proposition zeigt, dass Überlagerungen stets lokal trivial sind.

II.1.5. Proposition. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge die von p gleichmäßig überlagert wird. Dann existiert ein diskreter Raum F und ein Homöomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$, sodass $p_U \circ \varphi = p|_{p^{-1}(U)}$, wobei $p_U : U \times F \to U$ die kanonische Projektion bezeichnet. Die eingeschränkte Überlagerung $\tilde{X}|_U$ ist daher trivial.*

Beweis. Da U von p gleichmäßig überlagert wird existieren eine Indexmenge Λ und disjunkte offene Teilmengen $\tilde{U}_\lambda \subseteq \tilde{X}$, $\lambda \in \Lambda$, mit $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{U}_\lambda$ und so, dass $p|_{\tilde{U}_\lambda} : \tilde{U}_\lambda \to U$ ein Homöomorphismus ist, für jedes $\lambda \in \Lambda$. Wir versehen Λ mit der diskreten Topologie und betrachten die Abbildung $\psi : U \times \Lambda \to p^{-1}(U)$, $\psi(x, \lambda) := (p|_{\tilde{U}_\lambda})^{-1}(x)$. Offensichtlich ist ψ bijektiv, und es gilt $p \circ \psi = p_U$. Da ψ die offenen Mengen $U \times \{\lambda\}$ homöomorph auf die offenen Mengen $\tilde{U}_\lambda$ abbildet, ist ψ ein Homöomorphismus. Setzen wir $F := \Lambda$ und $\varphi := \psi^{-1}$, dann haben diese die in der Proposition formulierten Eigenschaften. $\square$

$$\begin{tikzcd} U \times \Lambda \arrow[rr, "\psi", "\cong"'] \arrow[dr, "p_U"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

II.1.6. Bemerkung. Offensichtlich gilt auch die folgende Umkehrung von Proposition II.1.5. Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine stetige Abbildung und existieren zu jedem

[15] Eine Abbildung $f : Y \to Z$ wird *lokaler Homöomorphismus* genannt, falls jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung U besitzt die durch f homöomorph auf eine offene Umgebung von $f(y)$ abgebildet wird. Diese Eigenschaft bleibt dann für jede in U enthaltene offene Teilmenge richtig. Lokale Homöomorphismen sind stetig und offen. Dabei heißt eine Abbildung $f : Y \to Z$ *offen,* falls sie offene Teilmengen von Y auf offene Teilmengen in Z abbildet.

Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U von x, ein diskreter Raum F und ein Homöomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ mit $p_U \circ \varphi = p|_{p^{-1}(U)}$, dann muss p schon eine Überlagerung sein.

Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $x \in X$, dann wird $F_x := p^{-1}(x)$ die *Faser* über x genannt. Aus der Definition einer Überlagerung folgt sofort, dass ihre Fasern diskrete topologische Räume sind. Die Kardinalität der Faser über x wird die *Blätterzahl* der Überlagerung an der Stelle x genannt. Die Blätterzahl einer Überlagerung definiert eine lokal konstante Funktion auf X. Für zusammenhängendes X muss daher die Blätterzahl konstant sein. Wir sprechen von einer *n-blättrigen* oder *n-fachen* Überlagerung, falls jede Faser aus genau n Punkten besteht.

II.1.7. Beispiel. Jeder Homöomorphismus $p : \tilde{X} \to X$ ist eine ein-blättrige Überlagerung. Umgekehrt muss jede ein-blättrige Überlagerung ein Homöomorphismus sein, siehe Bemerkung II.1.2.

II.1.8. Beispiel. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to S^1$ aus Beispiel II.1.1 ist eine unendlich-blättrige Überlagerung. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist die Translation $\tau_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau_n(t) := t + n$, eine Decktransformation. Wir erhalten einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{Deck}(p)$, $n \mapsto \tau_n$.

II.1.9. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $p_n : S^1 \to S^1$, $p_n(z) := z^n$, eine n-blättrige Überlagerung. Dabei ist $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Es bezeichne $G_n := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta^n = 1\} \subseteq S^1 \subseteq \mathbb{C}$ die Menge der n-ten Einheitswurzeln. Diese bilden bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen eine zu $\mathbb{Z}_n$ isomorphe Gruppe, ein Isomorphismus ist durch $\mathbb{Z}_n \xrightarrow{\cong} G_n$, $[k] \mapsto e^{2\pi \mathbf{i} k/n}$, gegeben. Jedes $\zeta \in G_n$ definiert eine Decktransformation $\rho_\zeta : S^1 \to S^1$, $\rho_\zeta(z) := \zeta z$. Wegen $p_{\zeta_1\zeta_2} = p_{\zeta_1} \circ p_{\zeta_2}$, $\zeta_1, \zeta_2 \in G_n$, erhalten wir einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}_n \cong G_n \to \mathrm{Deck}(p_n)$, $\zeta \mapsto \rho_\zeta$.

II.1.10. Beispiel. Die Abbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$, $p(z) := e^{2\pi \mathbf{i} z}$, liefert eine unendlich-blättrige Überlagerung. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $\tau_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\tau_n(z) := z + n$, eine Decktransformation. Wir erhalten einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{Deck}(p)$, $n \mapsto \tau_n$. Schränken wir diese Überlagerung auf den Teilraum $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$ ein, so erhalten wir die Überlagerung aus Beispiel II.1.8.

II.1.11. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $p_n(z) := z^n$, eine n-blättrige Überlagerung. Jede n-te Einheitswurzel $\zeta \in G_n$, siehe Beispiel II.1.9, definiert eine Decktransformation $\rho_\zeta : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $\rho_\zeta(z) := \zeta z$. Wieder haben wir einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}_n \cong G_n \to \mathrm{Deck}(p_n)$. Schränken wir diese Überlagerung auf den Teilraum $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$ ein, so erhalten wir die Überlagerung aus Beispiel II.1.9.

II.1.12. Beispiel. Die Quotientenabbildung $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist eine zweiblättrige Überlagerung. Die sogenannte *Antipodalabbildung* $A : S^n \to S^n$, $A(x) := -x$, ist eine Decktransformation. Wegen $A^2 = \mathrm{id}_{S^n}$ erhalten wir einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Deck}(p)$, $[0] \mapsto \mathrm{id}_{S^n}$, $[1] \mapsto A$.

II.1.13. Beispiel. Sind $p : \tilde{X} \to X$ und $q : \tilde{Y} \to Y$ zwei Überlagerungen, dann ist auch $p \times q : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to X \times Y$ eine Überlagerung. Mittels Induktion folgt, dass endliche Produkte von Überlagerungen wieder Überlagerungen sind. Für unendlich viele Faktoren bleibt dies jedoch nicht richtig, siehe etwa [**10**, Example 2.2.9].

II.1.14. Beispiel. Sind $p_j : \tilde{X}_j \to X$ Überlagerungen, $j \in J$, dann ist auch $\bigsqcup_{j\in J} p_j : \bigsqcup_{j\in} \tilde{X}_j \to X$ eine Überlagerung.

II.1.15. Bemerkung. Die Komposition zweier Überlagerungen ist i.A. keine Überlagerung, siehe etwa [**10**, Example 2.2.8].

Der Totalraum einer Überlagerung erbt viele topologische Eigenschaften der Basis. Auch lassen sich geometrische Strukturen der Basis oft in kanonischer Weise auf die Überlagerung liften. Der Rest dieses Abschnitts sei einigen einfachen Beispielen dazu gewidmet. Ein weniger triviales Beispiel werden wir in Abschnitt II.8 diskutieren.

II.1.16. Beispiel. Ist X ein Hausdorffraum und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann ist auch $\tilde{X}$ Hausdorffsch. Liegen zwei Punkte von $\tilde{X}$ nicht in der selben Faser so können sie auf Grund der Hausdorff Eigenschaft von X durch disjunkte offene Umgebungen der Form $p^{-1}(U)$ und $p^{-1}(V)$ getrennt werden. Liegen sie in der gleichen Faser, dann folgt direkt aus der Überlagerungseigenschaft von p, dass sie durch disjunkte offene Mengen der Form $\tilde{U}_{\lambda_1}$ und $\tilde{U}_{\lambda_2}$ getrennt werden können.

II.1.17. Beispiel. Ist X ein parakompakter Hausdorffraum und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann ist auch $\tilde{X}$ ein parakompakter Hausdorffraum.[16] Um dies einzusehen sei $\tilde{\mathcal{U}}$ eine offene Überdeckung von $\tilde{X}$. Da die Basis X parakompakt ist finden wir eine lokal endliche offene Überdeckung $\{U_j\}_{\in J}$ von X, sodass jedes U_j gleichmäßig von p überlagert wird. Es gibt daher diskrete Räume F_j mit $p^{-1}(U_j) \cong U_j \times F_j$, siehe Proposition II.1.5. Es existiert dann auch eine offene Überdeckung $\{V_j\}_{j\in J}$ von X mit $\bar{V}_j \subseteq U_j$ für jedes $j \in J$. Ist nämlich $f_j : X \to [0,1]$, $j \in J$, eine Zerlegung der Eins mit $\mathrm{supp}(f_j) \subseteq U_j$, dann können wir $V_j := \{x \in X : f_j(x) \neq 0\}$ verwenden. Beachte, dass $\bar{V}_j$ als abgeschlossene

[16] Wir erinnern uns, dass ein topologischer Raum X parakompakt heißt, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche offene Verfeinerung besitzt. Genauer, ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, dann existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von X die $\mathcal{U}$ verfeinert (dh. zu jedem $V \in \mathcal{V}$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U$) und lokal endlich ist (dh. jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung die nur endlich viele der offenen Mengen $V \in \mathcal{V}$ schneidet.) Ein Hausdorffraum ist genau dann parakompakt, wenn jede offene Überdeckung eine untergeordnete Zerlegung der Eins besitzt, siehe etwa [**6**, Kapitel VIII§5] oder [**9**, Kapitel I.8.6]. Nach einem Satz von Stone ist jeder metrisierbare Raum parakompakt, siehe [**9**, Kapitel I.8.7].

Teilmenge eines parakompakten Raums selbst parakompakt ist. Damit sind auch $p^{-1}(\bar{V}_j) \cong \bar{V}_j \times F_j$ parakomapakt. Für jedes $j \in J$ existiert daher eine lokal endliche offene Überdeckung $\tilde{\mathcal{V}}_j$ von $p^{-1}(\bar{V}_j)$, die die Überdeckung $\{\tilde{U} \cap p^{-1}(\bar{V}_j) : \tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}\}$ verfeinert. Für jedes $j \in J$ ist dann $\tilde{\mathcal{W}}_j := \{\tilde{V} \cap p^{-1}(V_j) : \tilde{V} \in \tilde{\mathcal{V}}_j\}$ eine offene Überdeckung von $p^{-1}(V_j)$ die die Überdeckung $\{\tilde{U} \cap p^{-1}(V_j) : \tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}\}$ verfeinert. Da $\bigcup_{j\in J} V_j = X$ bildet $\tilde{\mathcal{W}} := \bigcup_{j\in J} \tilde{\mathcal{W}}_j$ eine offene Überdeckung von $\tilde{X}$ die $\tilde{\mathcal{U}}$ verfeinert. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\tilde{\mathcal{W}}$ lokal endlich ist. Mit $\{U_j\}_{j\in J}$ ist auch $\{p^{-1}(\bar{V}_j)\}_{j\in J}$ eine lokal endliche Überdeckung. Es genügt daher zu zeigen, dass zu fixem $j \in J$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ eine Umgebung von $\tilde{x}$ existiert die nur endlich viele der Überdeckungsmengen in $\tilde{\mathcal{V}}_j$ trifft. Liegt $\tilde{x}$ nicht in $p^{-1}(\bar{V}_j)$ ist dies offensichtlich, denn $p^{-1}(\bar{V}_j)$ ist abgeschlossen in $\tilde{X}$. Im Fall $\tilde{x} \in p^{-1}(\bar{V}_j)$ folgt dies aus der lokalen Endlichkeit von $\tilde{\mathcal{V}}_j$. Damit ist $\tilde{\mathcal{W}}$ eine lokal endliche offene Verfeinerung von $\tilde{\mathcal{U}}$, und $\tilde{X}$ daher parakompakt.

II.1.18. Beispiel. Ist X eine topologische Mannigfaltigkeit[17] und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann ist auch $\tilde{X}$ eine topologische Mannigfaltigkeit. Dies folgt aus Beispiel II.1.17 und der Tatsache, dass p ein lokaler Homöomorphismus ist.

II.1.19. Beispiel. Ist X eine glatte Mannigfaltigkeit und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann gibt es auf $\tilde{X}$ genau eine glatte Struktur die p zu einem lokalen Diffeomorphismus macht. Jede Decktransformation ist dann ein Diffeomorphismus von $\tilde{X}$.

II.1.20. Beispiel. Ist X eine Riemannmannigfaltigkeit und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann gibt es auf $\tilde{X}$ genau eine Riemannmetrik die p zu einer lokalen Isometrie macht. Jede Decktransformation ist dann eine Isometrie von $\tilde{X}$.

II.1.21. Beispiel. Ist X eine symplektische Mannigfaltigkeit und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann gibt es auf $\tilde{X}$ genau eine symplektische Struktur die p zu einem lokalen Symplektomorphismus macht. Jede Decktransformation ist dann ein Symplektomorphismus von $\tilde{X}$.

II.1.22. Beispiel. Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann gibt es auf $\tilde{X}$ genau eine komplexe Struktur die p zu einem lokalen Biholomorphismus macht. Jede Decktransformation ist dann ein Biholomorphismus von $\tilde{X}$.

[17]Unter einer *topologischen Mannigfaltigkeit* verstehen wir einen lokal euklidischen parakompakten Hausdorffraum. Dabei wird ein topologischer Raum *lokal euklidisch* genannt, falls jeder Punkt eine zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphe offene Umgebung besitzt. Mit Hilfe eines Satzes von Stone lässt sich zeigen, dass ein lokal euklidischer Hausdorffraum genau dann parakompakt ist, wenn er metrisierbar ist. Wir können topologische Mannigfaltigkeiten daher äquivalent als metrisierbare lokal euklidische Räume definieren.

II.2. Strikt diskontinuierliche Gruppenwirkungen. Unter einer *Linkswirkung* einer Gruppe G auf einer Menge X verstehen wir eine Abbildung (die Wirkung) $\lambda : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx := g \cdot x := \lambda_g(x) := \lambda^x(g) := \lambda(g, x)$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

(i) Für $g, h \in G$ und $x \in X$ gilt $g(hx) = (gh)x$, dh. $\lambda(g, \lambda(h, x)) = \lambda(gh, x)$.
(ii) Für das neutrale Element $1 \in G$ und $x \in X$ gilt $1x = x$, dh. $\lambda(1, x) = x$.

In dieser Situation sagen wir auch die Gruppe G wirkt von links auf der Menge X. Aus (i) und (ii) folgt $x = 1x = (g^{-1}g)x = g^{-1}(gx)$, also $\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g = \mathrm{id}_X$, oder $\lambda_{g^{-1}} = (\lambda_g)^{-1}$. Daher ist jedes λ_g bijektiv, also eine Permutation von X. Wegen (i) ist die Abbildung

$$G \to \mathfrak{S}(X), \qquad g \mapsto \lambda_g \tag{II.1}$$

ein Gruppenhomomorphismus, wobei $\mathfrak{S}(X)$ die Gruppe der Permutationen von X bezeichnet. Umgekehrt definiert jeder Homomorphismus $G \to \mathfrak{S}(X)$ in offensichtlicher Weise eine Linkswirkung von G auf X.

Eine Gruppenwirkung λ heißt *treu* wenn der Homomoprhismus (II.1) injektiv ist, wenn also nur das neutrale Element von G trivial, dh. durch die Identität, wirkt. I.A. ist der Kern von (II.1) ein Normalteiler N in G und die Wirkung (II.1) faktorisiert zu einer treuen Wirkung $G/N \to \mathfrak{S}(X)$ der Gruppe G/N auf X.

Eine Gruppenwirkung heißt *transitiv* falls zu je zwei Punkten $x, y \in X$ ein $g \in G$ mit $gx = y$ existiert. Ist $x \in X$, dann nennt man $Gx := \{gx : g \in G\}$ den *Orbit* von x. Die Wirkung ist daher transitiv genau dann wenn für einen (und dann jeden) Punkt $x \in X$ gilt $Gx = X$. Für $g \in G$ ist $\lambda_g(Gx) = Gx$, also erhalten wir eine Gruppenwirkung $G \to \mathfrak{S}(Gx)$ der Gruppe G auf dem Orbit Gx. Die Wirkung von G auf Gx ist stets transitiv. Unter der *Isotropiegruppe* eines Punktes $x \in X$ verstehen wir die Untergruppe $G^x := \{g \in G : gx = x\}$ von G. Diese besteht daher aus allen Gruppenelementen die den Punkt x stabilisieren und wird auch *Stabilisatoruntergruppe* genannt. Wir erhalten eine Bijektion $G/G^x \cong Gx$, $gG^x \mapsto gx$, zwischen den Linksnebenklassen[18] von G^x und dem Orbit Gx.

Eine Gruppenwirkung heißt *frei* wenn folgendes gilt: Ist $g \in G$ und $x \in X$ mit $gx = x$, dann folgt schon $g = 1$. In anderen Worten, für $g \neq 1$ hat $\lambda_g \in \mathfrak{S}(X)$ keinen Fixpunkt. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Isotropiegruppen trivial sind, dh. $G^x = \{1\}$ für alle $x \in X$. In diesem Fall erhalten wir für jedes $x \in X$ eine Bijektion $G \cong Gx$, $g \mapsto gx$, zwischen G und dem Orbit durch x.

Unter einer *Rechtswirkung* von G auf X verstehen wir eine Abbildung $\rho : X \times G \to X$, $(x, g) \mapsto xg := x \cdot g := \rho^g(x) := \rho_x(g) := \rho(x, g)$, mit $x1 = x$ und $(xg)h = x(gh)$ für alle $g, h \in G$. Ist $\rho : X \times G \to X$ eine Rechtswirkung, dann definiert $\lambda : G \times X \to X$, $\lambda(g, x) := \rho(x, g^{-1})$, eine Linkswirkung von G auf X. Alle mit einer Linkswirkung assozierten Begriffe besitzen daher ein offensichtliches

[18]Ist G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, dann definiert $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 \in H$ eine Äquivalenzrelation auf G. Ihre Äquivalenzklassen sind von der Form $gH = \{gh : h \in H\}$ und werden Linksnebenklassen von H genannt. Für die Menge der Linksnebenklassen schreiben wir G/H.

Analogon für Rechtswirkungen. Etwa ist eine Rechtswirkung nichts anderes als ein Anti-Homomorphismus $G \to \mathfrak{S}(X)$.

Unter einer *stetigen Linkswirkung* einer diskreten Gruppe G auf einem topologischen Raum X verstehen wir eine Linkswirkung $\lambda : G \times X \to X$ die stetig ist, wobei G mit der diskreten Topologie versehen ist. Jedes $\lambda_g : X \to X$ ist dann stetig, und wegen $(\lambda_g)^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$ ein Homöomorphismus. Eine stetige Linkswirkung liefert daher einen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Homeo}(X)$, $g \mapsto \lambda_g$, wobei $\mathrm{Homeo}(X)$ die Gruppe der Homöomorphismen von X bezeichnet. Umgekehrt definiert jeder solche Gruppenhomomorphismus eine stetige Linkswirkung der diskreten Gruppe G auf X. Analog sprechen wir von einer stetigen Rechtswirkung, falls die Wirkung $\rho : X \times G \to X$ stetig ist.

Eine stetige Wirkung einer diskreten Gruppe G auf einem topologischen Raum X wird *strikt diskontinuierlich* genannt, wenn jeder Punkt in $x \in X$ eine Umgebung U besitzt für die gilt $gU \cap U = \emptyset$, für alle $g \neq 1 \in G$. Offensichtlich muss eine strikt diskontinuierliche Gruppenwirkung frei sein, die Umkehrung gilt i.A. jedoch nicht. Aus $gU \cap U = \emptyset$ folgt $gU \cap hU = \emptyset$ für alle $g \neq h \in G$. Insbesondere ist die von X auf dem Orbit Gx induzierte Topologie diskret, die Bijektion $G \cong Gx$ also ein Homöomorphismus diskreter Räume. Für Wirkungen endlicher Gruppen ist folgende Beobachtung oft hilfreich.

II.2.1. Proposition. *Jede stetige freie Wirkung einer endlichen diskreten Gruppe auf einem Hausdorffraum ist strikt diskontinuierlich.*

Beweis. Sei also G eine endliche Gruppe die frei und stetig auf einem Hausdorffraum X wirkt. Sei nun $x \in X$. Da die Wirkung frei ist, sind die Punkte gx, $g \in G$, alle verschieden. Wegen der Hausdorffeigenschaft von X finden wir zu jedem $g \neq 1 \in G$ eine Umgebung V_g^1 von x und eine Umgebung V_g^2 von gx mit $V_g^1 \cap V_g^2 = \emptyset$. Auf Grund der Stetigkeit der Wirkung ist dann $V_g := V_g^1 \cap g^{-1}V_g^2$ eine Umgebung von x für die $gV_g \cap V_g = \emptyset$ gilt. Wegen der Endlichkeit von G ist auch $U := \bigcap_{g \neq 1} V_g$ eine Umgebung von x. Nach Konstruktion gilt $gU \cap U = \emptyset$, für alle $g \neq 1 \in G$. Also ist die Wirkung strikt diskontinuierlich. $\square$

Eine Linkswirkung von G auf X definiert eine Äquivalenzrelation auf X durch $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : gx = y$. Ihre Äquivalenzklassen stimmen mit den Orbits überein, es ist also $x \sim y$ genau dann wenn $Gx = Gy$. Die Menge der Äquivalenzklassen wird als *Orbitraum* der Wirkung bezeichnet und mit $X/G := X/\!\sim$ bezeichnet. Wir versehen X/G mit der Quotiententopologie, dh. mit der feinsten Topologie, sodass die kanonische Projektion $p : X \to X/G$ stetig ist. Eine Teilmenge V von X/G ist genau dann offen, wenn $p^{-1}(V)$ offen in X ist.

II.2.2. Beispiel. Ist G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, dann definiert $G \times H \to G$, $(g, h) \mapsto gh$, eine Rechtswirkung von H auf G. Ihre Orbits stimmen mit den Linksnebenklassen von H überein, siehe oben.

II.2.3. Proposition. *Wirkt die Gruppe G strikt diskontinuierlich auf dem topologischen Raum X, dann ist die kanonische Projektion $p : X \to X/G$ eine*

Überlagerung. Ihre Blätterzahl stimmt mit der Ordnung von G überein. Jedes Element von G liefert eine Decktransformation, und wir erhalten einen injektiven Homomorphismus von Gruppen $G \to \mathrm{Deck}(p)$.

Beweis. Offensichtlich ist p stetig und surjektiv. Weiters ist p eine offene Abbildung, denn für offenes $U \subseteq X$ ist auf Grund der Stetigkeit der Wirkung auch $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g\in G} gU$ offen in X, also $p(U)$ offen in X/G. Sei nun $x \in X$ und U eine offene Umgebung von x, sodass $gU \cap hU = \emptyset$ für alle $g \neq h \in G$. Dann sind $\{gU\}_{g\in G}$, disjunkte offene Teilmengen in X, und für die offene Menge $V := p(U) \subseteq X/G$ gilt $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{g\in G} gU$. Schließlich ist für jedes $g \in G$ die Einschränkung $p|_{gU} : gU \to V$ eine stetige Bijektion, und wegen der Offenheit von p daher ein Homöomorphismus. Also ist $p : X \to X/G$ eine Überlagerung. Für $g \in G$ liefert $\lambda_g : X \to X$, $\lambda_g(x) := gx$, einen Homöomorphismus, und da offensichtlich auch $p \circ \lambda_g = p$ gilt, ist λ_g eine Decktransformation. Die Relation $\lambda_{gh} = \lambda_g \circ \lambda_h$ besagt gerade, dass $G \to \mathrm{Deck}(X)$, $g \mapsto \lambda_g$, ein Homomorphismus ist. Dieser Homomorphismus ist injektiv, denn strikt diskontinuierliche Wirkungen sind stets treu. $\square$

II.2.4. Beispiel. Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(n, t) \mapsto n + t$, definiert eine stetige Linkswirkung der diskreten Gruppe $\mathbb{Z}$ auf dem topologischen Raum $\mathbb{R}$. Diese Wirkung ist strikt diskontinuierlich, denn für $t \in \mathbb{R}$ und $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ gilt $(n + U) \cap U = \emptyset$, wobei $U = (t - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2})$. Daher ist die Orbitprojektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ eine Überlagerung, siehe Proposition II.2.3. Bis auf den Homöomorphismus $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ ist dies die Überlagerung aus Beispiel II.1.8 oben.

II.2.5. Beispiel. Die Abbildung $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(k, x) \mapsto k+x$, ist eine strikt diskontinuierliche Linkswirkung von $\mathbb{Z}^n$ auf $\mathbb{R}^n$. Nach Proposition II.2.3 ist die Orbitprojektion $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ eine unendlich-blättrige Überlagerung. Beachte, dass $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong S^1 \times \cdots \times S^1 = T^n$, vgl. Beispiel I.7.8.

II.2.6. Beispiel. Es bezeichne wieder G_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln, $n \in \mathbb{N}$, siehe Beispiel II.1.9 oben. Die Abbildung $G_n \times S^1 \to S^1$, $(\zeta, z) \mapsto \zeta z$, ist eine freie und daher strikt diskontinuierliche Linkswirkung, siehe Proposition II.2.1. Nach Proposition II.2.3 ist die Orbitprojektion $p_n : S^1 \to S^1/G_n$ eine n-blättrige Überlagerung. Für den Quotientenraum gilt $S^1/G_n \cong S^1$, wir erhalten daher wieder die Überlagerung aus Beispiel II.1.9.

II.2.7. Beispiel. Die Gruppe $\{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$ wirkt auf der Sphäre S^n durch $(\pm 1)x := \pm x$ in strikt diskontinuierlicher Weise, siehe Proposition II.2.1. Nach Proposition II.2.3 ist die Orbitprojektion $S^n \to S^n/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ eine zwei-blättrige Überlagerung, vgl. Beispiel II.1.12 oben.

II.2.8. Beispiel (Linsenräume). Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Sphäre $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$. Weiters seien $p \in \mathbb{N}$ und $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Z}$, sodass p teilerfremd zu q_j ist, für jedes $1 \leq j \leq n$. Es bezeichne $G_p \cong \mathbb{Z}_p$ die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln.

Eine elementare Rechnung zeigt, dass $G_p \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$, $\zeta \cdot (z_1, \dots, z_n) := (\zeta^{q_1} z_1, \dots, \zeta^{q_n} z_n)$, eine stetige Linkswirkung von G_p auf S^{2n-1} definiert. Diese Wirkung ist frei. Um dies einzusehen sei $k \in \mathbb{Z}$, $\zeta = e^{2\pi \mathbf{i} k/p} \in G_p$ und $(z_1, \dots, z_n) \in S^{2n-1}$ mit $\zeta \cdot (z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n)$. Wähle j, sodass $z_j \neq 0$. Aus $\zeta^{q_j} z_j = z_j$ erhalten wir dann $e^{2\pi \mathbf{i} k q_j/p} = 1$, also muss p die Zahl kq_j teilen. Da p und q_j teilerfremd sind, ist p ein Teiler von k, also $\zeta = 1$ und die Wirkung tatsächlich frei. Nach Proposition II.2.1 ist sie daher strikt diskontinuierlich. Ihr Orbitraum wird als *Linsenraum* $L(p; q_1, \dots, q_n) := S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$ bezeichnet. Etwa gilt $L(2; 1, \dots, 1) \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n-1}$. Die Orbitprojektion $S^{2n-1} \to L(p; q_1, \dots, q_n)$ ist eine p-blättrige Überlagerung, siehe Proposition II.2.3.

II.2.9. Beispiel (Kleinsche Flasche). Betrachte die Gruppe $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ mit Multiplikation $(k_1, l_1)(k_2, l_2) = \big(k_1 + (-1)^{l_1} k_2, l_1 + l_2\big)$, vgl. Beispiel I.9.9. Eine einfache Rechnung zeigt, dass $(k, l) \cdot (x, y) := \big(k + (-1)^l x, l + y\big)$ eine Linkswirkung von $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Diese Wirkung ist strikt diskontinuierlich, die Quotientenabbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ daher eine unendlich-blättrige Überlagerung, siehe Proposition II.2.3. Der Quotientenraum $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ ist zur Kleinschen Flasche aus Beispiel I.9.9 homöomorph.

II.2.10. Beispiel. Die Abbildung $A : T^2 \to T^2$, $A(z, w) := (-z, \bar{w})$, erfüllt $A^2 = \mathrm{id}_{T^2}$ und definiert eine freie Wirkung der Gruppe $\mathbb{Z}_2$ auf $T^2 = S^1 \times S^1$. Nach Proposition II.2.1 ist dies eine strikt diskontinuierliche Wirkung, die Quotientenabbildung $T^2 \to T^2/\mathbb{Z}_2$ daher eine zwei-blättrige Überlagerung, siehe Proposition II.2.3. Der Quotientenraum $T^2/\mathbb{Z}_2$ ist zur Kleinschen Flasche homöomorph, siehe Beispiel I.9.9.

II.3. Homotopieliftungseigenschaft. Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung. Jede stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ wird ein *Lift* oder eine *Hochhebung* von f über p genannt. Es stellt sich nun die Frage unter welchen Umständen so ein Lift von f existiert. Dieses Problem lässt sich elegant mit Hilfe des induzierten Homomorphismus $f_* : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ lösen, siehe Satz II.4.5 unten. Wir beginnen zunächst damit die Eindeutigkeit eines solchen Lifts zu besprechen. Die nächste Proposition besagt, dass für zusammenhängendes Y ein Lift von f schon durch den Wert bei einem einzigen Punkt vollständig festgelegt ist.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

II.3.1. Proposition. *Es seien $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, Y zusammenhängend und $\tilde{f}, \tilde{g} : Y \to \tilde{X}$ stetig mit $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$. Existiert ein Punkt $y_0 \in Y$ mit $\tilde{f}(y_0) = \tilde{g}(y_0)$, dann gilt schon $\tilde{f} = \tilde{g}$.*

Beweis. Betrachte die Teilmenge $A := \big\{y \in Y : \tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)\big\}$. Da $y_0 \in A$ ist $A \neq \emptyset$. Wir zeigen zunächst, dass A offen ist. Sei dazu $y \in A$. Wegen der Überlagerungseigenschaft von p, existiert eine Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)$, sodass $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to X$ injektiv ist. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ ist $W :=$

$\tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{g}^{-1}(\tilde{U})$ eine Umgebung von y in Y. Aus $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$ und der Injektivität von $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to X$ folgt $\tilde{f}|_W = \tilde{g}|_W$. Daher ist $W \subseteq A$ und A also offen. Schließlich zeigen wir, dass A auch abgeschlossen ist. Sei dazu $y \notin A$, also $\tilde{f}(y) \neq \tilde{g}(y)$. Da $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$ gilt jedenfalls $p(\tilde{f}(y)) = p(\tilde{g}(y))$. Aus der Überlagerungseigenschaft von p erhalten wir disjunkte Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{f}(y)$ und $\tilde{V}$ von $\tilde{g}(y)$. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ ist $W := \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{g}^{-1}(\tilde{V})$ eine Umgebung von y in Y. Aus $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ erhalten wir $W \subseteq Y \setminus A$, also ist A abgeschlossen. Aus dem Zusammenhang von Y folgt nun $A = Y$ und daher $\tilde{f} = \tilde{g}$. □

II.3.2. Proposition. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $\tilde{X}$ zusammenhängend. Dann wirkt die Gruppe der Decktransformationen strikt diskontinuierlich auf $\tilde{X}$. Insbesondere ist diese Wirkung frei.*

Beweis. Es sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Wegen der Überlagerungseigenschaft von p existiert eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{x}$, sodass $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to X$ injektiv ist. Sei nun φ eine Decktransformation mit $\varphi(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. Wir finden daher $\tilde{y} \in \tilde{U}$ mit $\varphi(\tilde{y}) \in \tilde{U}$. Da $p \circ \varphi = p$ folgt aus der Injektivität von $p|_{\tilde{U}}$, dass $\varphi(\tilde{y}) = \tilde{y}$. Aus Proposition II.3.1 erhalten wir daher $\varphi = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$. Also ist die Wirkung von $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ strikt diskontinuierlich. □

Jede Überlagerung hat die Homotopieliftungseigenschaft, siehe Satz II.3.3 unten. Der Beweis ist völlig analog zu dem Beweis von Proposition I.4.2.

II.3.3. Satz (Homotopieliftungseigenschaft). *Es seien $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $H : Y \times I \to X$ eine Homotopie und $\tilde{h} : Y \to \tilde{X}$ stetig, sodass $p \circ \tilde{h} = H_0$. Dann existiert genau eine Homotopie $\tilde{H} : Y \times I \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit von $\tilde{H}$ folgt aus Proposition II.3.1 und dem Zusammenhang von I, denn für fixes $y \in Y$ ist $I \to \tilde{X}$, $t \mapsto \tilde{H}_t(y)$ ein stetiger Lift des Weges $I \to X$, $t \mapsto H_t(y)$, mit Anfangspunkt $\tilde{H}_0(y) = \tilde{h}(y)$. Nun zur Konstruktion von $\tilde{H}$. Aus der Überlagerungseigenschaft von p erhalten wir eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von X, sodass jedes U_α von p gleichmäßig überlagert wird. Die Beweise von Lemma I.4.9 und I.4.10 lassen sich mühelos auf die vorliegende Situation verallgemeinern.

II.3.4. Lemma. *Zu jedem Punkt $y \in Y$ existieren eine offene Umgebung N von y, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$, sodass für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt $H\big(N \times [t_{i-1}, t_i]\big) \subseteq U_{\alpha_i}$.*

Beweis. Da $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von X bildet, existiert zu jedem $s \in I$ ein $\alpha_s \in A$ mit $H(y, s) \in U_{\alpha_s}$. Da H stetig ist, finden wir zu jedem $s \in I$ eine offene Umgebung N_s von y und eine offene Umgebung J_s von s mit $H(N_s \times J_s) \subseteq U_{\alpha_s}$. Klarerweise bildet $\{J_s\}_{s \in I}$ eine offene Überdeckung von I. Da I kompakt ist, existieren $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und $s_1, \dots, s_n \in I$ mit $[t_{i-1}, t_i] \subseteq J_{s_i}$, $1 \leq i \leq n$, siehe Lemma I.4.12. Betrachte nun die offene

Umgebung $N := \bigcap_{i=1}^n N_{s_i}$ von y. Für $1 \leq i \leq n$ gilt dann $H\big(N \times [t_{i-1}, t_i]\big) \subseteq H\big(N_{s_i} \times J_{s_i}\big) \subseteq U_{\alpha_{s_i}}$. Mit $\alpha_i := \alpha_{s_i}$ folgt daher die Behauptung. $\square$

II.3.5. Lemma. *Zu jedem $y \in Y$ existieren eine offene Umgebung V von y und eine stetige Abbildung $\tilde{G} : V \times I \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{G} = H|_{V \times I}$ und $\tilde{G}_0 = \tilde{h}|_V$.*

Beweis. Nach Lemma II.3.4 existieren eine offene Umgebung N von y, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$, sodass

$$H\big(N \times [t_{i-1}, t_i]\big) \subseteq U_{\alpha_i}, \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{II.2}$$

Da U_α von p gleichmäßig überlagert wird, existiert eine Indexmenge Λ_α, disjunkte offene Teilmengen $\tilde{U}_\alpha^\lambda$, $\lambda \in \Lambda_\alpha$, mit $p^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_\alpha} \tilde{U}_\alpha^\lambda$ und so, dass $p|_{\tilde{U}_\alpha^\lambda} : \tilde{U}_\alpha^\lambda \to U_\alpha$ ein Homöomorphismus ist, für jedes $\lambda \in \Lambda_\alpha$. Wegen (II.2) und $p \circ \tilde{h} = H_0$ ist $p(\tilde{h}(y)) = H_{t_0}(y) \in U_{\alpha_1}$, also existiert $\lambda_1 \in \Lambda_{\alpha_1}$ mit $\tilde{h}(y) \in \tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1}$. Betrachte die offene Umgebung $V^1 := N \cap \tilde{h}^{-1}(\tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1})$ von y und die stetige Abbildung

$$\tilde{G}^1 : V^1 \times [t_0, t_1] \to \tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1} \subseteq \tilde{X}, \qquad \tilde{G}^1 := \big(p|_{\tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1}}\big)^{-1} \circ H|_{V^1 \times [t_0, t_1]}.$$

Offensichtlich gilt $p \circ \tilde{G}^1 = H|_{V^1 \times [t_0, t_1]}$. Aus $H_0 = p \circ \tilde{h}$ erhalten wir $p \circ \tilde{G}_{t_0}^1 = H_{t_0}|_{V^1} = p \circ \tilde{h}|_{V^1}$, und da p auf $\tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1}$ injektiv ist folgt $\tilde{G}_{t_0}^1 = \tilde{h}|_{V^1}$.

Induktiv fortfahrend erhalten wir offene Umgebungen $V^1 \supseteq V^2 \supseteq \cdots \supseteq V^n$ von y, und $\lambda_i \in \Lambda_{\alpha_i}$, sowie stetige Abbildungen $\tilde{G}^i : V^i \times [t_{i-1}, t_i] \to\subseteq \tilde{U}_{\alpha_i}^{\lambda_i} \subseteq \tilde{X}$, $1 \leq i \leq n$, sodass

$$p \circ \tilde{G}^i = H|_{V^i \times [t_{i-1}, t_i]}, \quad \tilde{G}_{t_0}^1 = \tilde{h}|_{V^1} \quad \text{und} \quad \tilde{G}_{t_{i-1}}^i = \tilde{G}_{t_{i-1}}^{i-1}|_{V^i} \quad \text{für } i = 2, \ldots, n.$$

Betrachte nun die offene Umgebung $V := V^n$ von y und definiere eine Abbildung $\tilde{G} : V \times I \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{G}|_{V \times [t_{i-1}, t_i]} := \tilde{G}^i|_{V \times [t_{i-1}, t_i]}$. Da $\tilde{G}_{t_{i-1}}^i|_V = \tilde{G}_{t_{i-1}}^{i-1}|_V$ ist dies wohldefiniert. Aus der Stetigkeit von $\tilde{G}^i|_{V \times [t_{i-1}, t_i]}$ und Lemma I.1.2 folgt, dass $\tilde{G}$ stetig ist. Aus $p \circ \tilde{G}^i = H|_{V^i \times [t_{i-1}, t_i]}$ erhalten wir $p \circ \tilde{G} = H|_{V \times I}$. Schließlich folgt aus $\tilde{G}_{t_0}^1 = \tilde{h}|_{V^1}$ auch $\tilde{G}_0 = \tilde{h}|_V$. Also hat $\tilde{G}$ alle gewünschten Eigenschaften. $\square$

Nach Lemma II.3.5 existiert zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung V^y von y und eine stetige Abbildung $\tilde{G}^y : V^y \times I \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{G}^y = H|_{V^y \times I}$ und $\tilde{G}_0^y = \tilde{h}|_{V^y}$. Wie im Beweis der Eindeutigkeit von $\tilde{H}$, erhalten wir aus Proposition II.3.1 und dem Zusammenhang von I, dass die Abbildungen $\tilde{G}^{y_1}$ und $\tilde{G}^{y_2}$ auf $(V^{y_1} \cap V^{y_2}) \times I$ übereinstimmen müssen, $y_1, y_2 \in Y$. Es existiert daher eine Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \to \tilde{X}$, sodass $\tilde{H}|_{V^y \times I} = \tilde{G}^y$, für jedes $y \in Y$. Aus den entsprechenden Eigenschaften von $\tilde{G}^y$ folgt sofort $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$. Auch die Stetigkeit von $\tilde{H}$ ist offensichtlich, denn die Einschränkungen von $\tilde{H}$ auf die offenen Teilmengen $V^y \times I$ sind stetig. Damit ist der Beweis von Satz II.3.3 vollständig. $\square$

II.3.6. Korollar (Liften von Wegen). *Es seien $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $f : I \to X$ ein Weg in X und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = f(0)$. Dann existiert genau ein Weg $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$.*

Beweis. Die folgt aus Satz II.3.3 mit $Y = \{*\}$, vgl. Proposition I.4.5. □

II.3.7. Korollar. *Es seien* $p : \tilde{X} \to X$ *eine Überlagerung, und* $f, g : I \to X$ *zwei Wege die homotop relativ Endpunkten sind. Weiters seien* $\tilde{f}, \tilde{g} : I \to \tilde{X}$ *Lifts von* f *und* g *mit gleichem Anfangspunkt* $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$. *Dann sind auch* $\tilde{f}$ *und* $\tilde{g}$ *homotop relative Endpunkten in* $\tilde{X}$. *Insbesondere haben* $\tilde{f}$ *und* $\tilde{g}$ *denselben Endpunkt,* $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.

Beweis. Es bezeichne $H : I \times I \to X$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$. Nach Satz II.3.3 existiert eine Homotopie $\tilde{H} : I \times I \to \tilde{X}$ mit $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$ und $p \circ \tilde{H} = H$. Da für $i = 0, 1$ der Weg $t \mapsto p(\tilde{H}(i,t)) = H(i,t)$ konstant ist, muss nach der Eindeutigkeitsaussage in Korollar II.3.6 auch $t \mapsto \tilde{H}(i,t)$ konstant in t sein. Also ist $\tilde{H}$ eine Homotopie relativ Endpunkten. Insbesondere gilt $\tilde{H}_1(0) = \tilde{H}_0(0) = \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$. Also ist $s \mapsto \tilde{H}_1(s)$ ein Lift von g mit Anfangspunkt $\tilde{H}_1(0) = \tilde{g}(0)$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Korollar II.3.6 schließen wir $\tilde{H}_1 = \tilde{g}$. Also ist $\tilde{H}$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$ nach $\tilde{H}_1 = \tilde{g}$. □

Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und es bezeichne $F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$ die Faser über x_0. Wir erhalten eine Abbildung

$$F_{x_0} \times \pi_1(X, x_0) \to F_{x_0}, \qquad (\tilde{x}, [f]) \mapsto \tilde{x} \cdot [f] := \tilde{f}_{\tilde{x}}(1) \tag{II.3}$$

wobei $\tilde{f}_{\tilde{x}} : I \to \tilde{X}$ den eindeutigen Lift von f mit Anfangspunkt $\tilde{f}_{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}$ bezeichnet, vgl. Korollar II.3.6. Beachte, dass dies nach Korollar II.3.7 tatsächlich wohldefiniert ist, denn der Endpunkt $\tilde{f}_{\tilde{x}}(1)$ hängt nur von der Homotopieklasse von f ab.

II.3.8. Proposition. *Ist* $p : \tilde{X} \to X$ *eine Überlagerung und* $x_0 \in X$, *dann definiert die Abbildung* (II.3) *eine Rechtswirkung der Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x_0)$ *auf der Faser* $F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$. *Diese Wirkung kommutiert mit der Linkswirkung der Gruppe der Decktransformationen* $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$, *dh.* $\varphi(\tilde{x} \cdot \sigma) = \varphi(\tilde{x}) \cdot \sigma$ *für alle* $\varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{X})$, $\tilde{x} \in F_{x_0}$ *und* $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. *Für wegzusammenhängendes* $\tilde{X}$ *ist die Rechtswirkung* (II.3) *transitiv.*

Beweis. Da das neutrale Element $1 \in \pi_1(X, x_0)$ durch die konstante Schleife c_{x_0} repräsentiert wird, gilt offensichtlich $\tilde{x} \cdot 1 = \tilde{x}$ für jedes $\tilde{x} \in F_{x_0}$. Sind f und g zwei Schleifen bei x_0 und $\tilde{x} \in F_{x_0}$, so folgt $(\widetilde{fg})_{\tilde{x}} = \tilde{f}_{\tilde{x}} \tilde{g}_{\tilde{f}_{\tilde{x}}(1)} = \tilde{f}_{\tilde{x}} \tilde{g}_{\tilde{x} \cdot [f]}$, und daher $\tilde{x} \cdot ([f][g]) = \tilde{x} \cdot [fg] = (\widetilde{fg})_{\tilde{x}}(1) = \big(\tilde{f}_{\tilde{x}} \tilde{g}_{\tilde{x} \cdot [f]}\big)(1) = \tilde{g}_{\tilde{x} \cdot [f]}(1) = (\tilde{x} \cdot [f]) \cdot [g]$. Dies zeigt, dass (II.3) tatsächlich eine Rechtswirkung auf F_{x_0} definiert. Ist $\varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{X})$ eine Decktransformation so gilt $\varphi \circ \tilde{f}_{\tilde{x}} = \tilde{f}_{\varphi(\tilde{x})}$ und wir erhalten $\varphi(\tilde{x} \cdot [f]) = \varphi(\tilde{f}_{\tilde{x}}(1)) = (\varphi \circ \tilde{f}_{\tilde{x}})(1) = \tilde{f}_{\varphi(\tilde{x})}(1) = \varphi(\tilde{x}) \cdot [f]$, also kommutiert die Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ mit der Linkswirkung der Decktransformationen. *Zur Transitivität:* Ist $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, so finden wir zu zwei gegebenen Punkten $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F_{x_0}$ einen Weg $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ und $\tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$. Da $p(\tilde{x}_0) = x_0 = p(\tilde{x}_1)$ ist

$f := p \circ \tilde{f}$ eine Schleife bei x_0 und definiert daher ein Element $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Nach Konstruktion ist $\tilde{x}_0 \cdot [f] = \tilde{x}_1$, die Wirkung also transitiv. □

Unter einer *punktierte Überlagerung* verstehen wir eine Abbildung punktierter Räume $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ deren zugrundeliegende Abbildung $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung ist. Punktierte Überlagerungen werden auch *Überlagerung mit Basispunkt* genannt. Unter einem Isomorphismus zwischen zwei punktierten Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$ verstehen wir einen Homöomorphismus punktierter Räume $\varphi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ mit $q \circ \varphi = p$. Existiert so ein Isomorphismus, dann nennen wir die beiden punktierten Überlagerungen isomorph.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \arrow[dl, "q"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

II.3.9. Definition (Charakteristische Untergruppe). Unter der *charakteristische Untergruppe* einer punktierten Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ verstehen wir die Untergruppe $\operatorname{img}(p_*) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ von $\pi_1(X, x_0)$.

II.3.10. Bemerkung. Sind $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$ zwei isomorphe punktierte Überlagerungen, dann stimmen ihre charakteristischen Untergruppen überein, denn ist $\varphi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ ein Isomorphimus punktierter Überlagerungen, dann folgt $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = (q \circ \varphi)_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = q_*\big(\varphi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big) = q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$, siehe Proposition I.6.2.

II.3.11. Proposition. *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung und es bezeichne $F_{x_0} := p^{-1}(x_0)$ die Faser über x_0. Dann gilt:*

(i) *Der Homomorphismus $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv, die charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ daher zu $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ isomorph.*

(ii) *Für eine Schleife f bei x_0 gilt $[f] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ genau dann, wenn sie sich zu einer Schleife bei $\tilde{x}_0$ liften lässt, dh. $\tilde{f}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0$.*

(iii) *Die Isotropiegruppe von $\tilde{x}_0$ bezüglich der Rechtswirkung* (II.3) *stimmt mit der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ überein. Wir erhalten daher eine injektive Abbildung*

$$\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \to F_{x_0}, \qquad \sigma \mapsto \tilde{x}_0 \cdot \sigma, \tag{II.4}$$

wobei $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ die Menge der Rechtsnebenklassen bezeichnet.

(iv) *Für $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ gilt $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0 \cdot \sigma)) = \sigma^{-1}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)\sigma$.*

Ist darüberhinaus $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, dann gilt weiters:

(v) *Die Abbildung* (II.4) *ist eine Bijektion. Die Blätterzahl von p stimmt daher mit dem Index*[19] *der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ in $\pi_1(X, x_0)$ überein.*

(vi) *Für $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F_{x_0}$ sind die charakteristischen Untergruppen $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ und $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ konjugiert*[20] *in $\pi_1(X, x_0)$.*

(vii) *Jede zu $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ konjugierte Untergruppe in $\pi_1(X, x_0)$ ist von der Form $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ für einen geeigneten Punkt $\tilde{x}_1 \in F_{x_0}$.*

(viii) *Die Gleichung $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \Phi(\varphi)$, $\varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{X})$, definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus*[21]

$$\Phi : \mathrm{Deck}(\tilde{X}) \to \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)). \tag{II.5}$$

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) folgen sofort aus Korollar II.3.7. Ad (iii): Aus (ii) sehen wir, dass die Isotropiegruppe von $\tilde{x}_0$ mit der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ übereinstimmt. Es folgt daher $\tilde{x}_0 \cdot \sigma_1 = \tilde{x}_0 \cdot \sigma_2 \Leftrightarrow \tilde{x}_0 \cdot (\sigma_1 \sigma_2^{-1}) = \tilde{x}_0 \Leftrightarrow \sigma_1 \sigma_2^{-1} \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \Leftrightarrow p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\sigma_1 = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\sigma_2$. Dies zeigt, dass (II.4) wohldefiniert und injektiv ist. Ad (iv): Sei f eine Schleife bei x_0 die σ repräsentiert, und $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ ihr Lift mit Anfangspunk $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. Nach Definition ist dann $\tilde{x}_0 \cdot \sigma = \tilde{f}(1)$. Nach Proposition I.3.5 gilt $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \beta_{\tilde{f}}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0 \cdot \sigma))$. Es folgt $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*\big(\beta_{\tilde{f}}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0 \cdot \sigma))\big) = \sigma\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0 \cdot \sigma))\big)\sigma^{-1}$ und damit die Behauptung. Sei nun $\tilde{X}$ wegzusammenhängend. Nach Proposition II.3.8 ist dann die Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf F_{x_0} transitiv, daher (II.4) surjektiv, woraus nun (v) folgt. Aus der Transitivität der Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf F_{x_0} zusammen mit (iv) folgt (vi). Auch (vii) folgt sofort aus (iv). Wenden wir uns schließlich (viii) zu. Sei $\varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{X})$. Wegen der Transitivität der Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf F_{x_0} existiert $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \sigma$. Aus (iv) erhalten wir $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \varphi(\tilde{x}_0))) = \sigma^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\sigma$, nach Bemerkung II.3.10 gilt aber auch $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \varphi(\tilde{x}_0))) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Es folgt $\sigma^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\sigma = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, also $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)$. Zusammen mit (v) sehen wir daher, dass $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \Phi(\varphi)$ tatsächlich eine Abbildung $\Phi : \mathrm{Deck}(\tilde{X}) \to \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(X, \tilde{x}_0))\big)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ definiert. Diese ist injektiv, denn die Wirkung von $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ auf F_{x_0} ist frei, siehe Proposition II.3.2. Nach Proposition II.3.8 kommutieren die Wirkungen von $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ und $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser F_{x_0}. Daher ist $\tilde{x}_0 \cdot \Phi(\varphi \circ \psi) = (\varphi \circ \psi)(\tilde{x}_0) = \varphi\big(\tilde{x}_0 \cdot \Phi(\psi)\big) = \varphi(\tilde{x}_0) \cdot \Phi(\psi) =$

[19] Ist G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, dann wird die Kardinalzahl $\sharp(G/H)$ der *Index* von H in G genannt. Der Index einer Untergruppe ist daher die Anzahl der Linksnebenklassen von H, und dies stimmt mit der Anzahl ihrer Rechtsnebenklassen überein.

[20] Zwei Untergruppen H_1 und H_2 einer Gruppe G werden *konjugiert* genannt, falls $g \in G$ mit $gH_1g^{-1} = H_2$ existiert. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Untergruppen von G.

[21] Ist G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, dann heißt $\mathcal{N}_G(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$ der *Normalisator* von H in G. Dies ist die größte Untergruppe von G, die H als Normalteiler enthält.

$(\tilde{x}_0 \cdot \Phi(\varphi)) \cdot \Phi(\psi) = \tilde{x}_0 \cdot (\Phi(\varphi)\Phi(\psi))$, also $\Phi(\varphi \circ \psi) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi)$. Damit ist auch die Homomorphismuseigenschaft von Φ gezeigt. □

II.4. Liften von Abbildungen. Unter schwachen Zusammenhangsvoraussetzungen erlaubt die charakteristische Untergruppe eine vollständige Lösung des Liftungsproblems. Wir benötigen hierfür den folgenden Zusammenhangsbegriff. Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend,* falls zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Umgebung U von x, eine wegzusammenhängende Umgebung V von x mit $V \subseteq U$ existiert. In anderen Worten, jeder Punkt in $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Umgebungen. Ist X lokal wegzusammenhängend und U eine offene Umgebung von $x \in X$, dann bilden die Punkte in U die sich durch einen Weg in U mit x verbinden lassen eine *offene* wegzusammenhängende Umgebung von x. In einem lokal wegzusammenhängenden Raum besitzt daher jeder Punkt sogar eine Umgebungsbasis aus offenen wegzusammenhängenden Umgebungen.

II.4.1. Bemerkung. Ein lokal wegzusammenhägender Raum ist genau dann wegzusammenhängend wenn er zusammenhängend ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass in einem lokal wegzusammenhängenden Raum die Wegzusammenhangskomponenten offen und daher auch abgeschlossen sind.

II.4.2. Bemerkung. Für eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ gilt: X ist genau dann lokal wegzusammenhängend wenn $\tilde{X}$ lokal wegzusammenhängend ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass p ein lokaler Homöomorphismus ist.

II.4.3. Beispiel. Jeder lokal kontrahierbare Raum ist lokal wegzusammenhängend. Dabei heißt ein topologischer Raum *lokal kontrahierbar,* wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis kontrahierbarer Umgebungen besitzt, dh. zu jedem Punkt x und jeder Umgebung U von x existiert eine kontrahierbare Umgebung V von x mit $V \subseteq U$. Etwa sind topologische Mannigfaltigkeiten offensichtlich lokal kontrahierbar und damit auch lokal wegzusammenhängend.

II.4.4. Beispiel. Bezeichne $Z := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ und betrachte $X := \big(I \times \{0\}\big) \cup \big(Z \times I\big)$. Der Raum X ist wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend. Keiner der Punkte $(0, y) \in X$, $y \in (0, 1]$, besitzt eine Basis aus wegzusammenhängenden Umgebungen.

II.4.5. Satz (Liftungskriterium). *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung und (Y, y_0) ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender punktierter Raum. Eine Abbildung punktierter Räume $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ lässt sich genau dann zu einer Abbildung punktierter Räume $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ liften, wenn $f_*(\pi_1(Y, y_0))$ in der charakteristischen Untergruppe von p enthalten ist, dh. wenn gilt $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. In diesem Fall ist der Lift $\tilde{f}$ eindeutig.*

Beweis. Die Bedingung ist offensichtlich notwendig, denn ist $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ein Lift von f, dann erhalten wir $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = (p \circ \tilde{f})_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Die Eindeutigkeit des Lifts folgt aus Proposition II.3.1. Nun zur Konstruktion von $\tilde{f}$. Da Y wegzusammenhängend ist, siehe Bemerkung II.4.1, existiert zu jedem Punkt $y \in Y$ ein Weg $\sigma : I \to Y$ von $\sigma(0) = y_0$ nach $\sigma(1) = y$. Es ist dann $f \circ \sigma$ ein Weg in X mit Anfangspunkt $(f \circ \sigma)(0) = x_0$. Nach Korollar II.3.6 lässt sich dieser Weg über p zu einem Weg $\widetilde{f \circ \sigma}$ mit Anfangspunkt $(\widetilde{f \circ \sigma})(0) = \tilde{x}_0$ liften. Wir setzen $\tilde{f}(y) := (\widetilde{f \circ \sigma})(1)$ und überzeugen uns zunächst davon, dass dies wohldefiniert, dh. unabhängig von der Wahl von σ ist. Ist τ ein weiterer Weg von y_0 nach y, dann ist $f \circ (\sigma\bar{\tau}) = (f \circ \sigma)(\overline{f \circ \tau})$ eine Schleife bei x_0, die sich wegen $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ und Proposition II.3.11(ii) zu einer Schleife bei $\tilde{x}_0$ liften lässt. Es müssen daher die Endpunkte von $\widetilde{f \circ \sigma}$ und $\widetilde{f \circ \tau}$ übereinstimmen, $(\widetilde{f \circ \sigma})(1) = (\widetilde{f \circ \tau})(1)$, und damit ist $\tilde{f}$ wohldefiniert. Offensichtlich gilt $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$. Es bleibt noch die Stetigkeit von $\tilde{f}$ zu verifizieren. Sei dazu $y \in Y$ und $\tilde{U}$ eine offene Umgebung von $\tilde{f}(y)$, sodass $U := \pi(\tilde{U})$ offen und $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ ein Homöomorphismus ist. Da f stetig und Y lokal wegzusammenhängend ist, existiert eine wegzusammenhängende Umgebung V von y mit $f(V) \subseteq U$. Es genügt zu zeigen $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$. Sei dazu $v \in V$ und α ein Weg in V von y nach v. Dann ist $\sigma\alpha$ ein Weg von y_0 nach v, und $(\widetilde{f \circ \sigma})((p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ f \circ \alpha)$ der Lift des Weges $f \circ (\sigma\alpha)$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$. Nach Definition von $\tilde{f}$ gilt daher $\tilde{f}(v) = \big((\widetilde{f \circ \sigma})((p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ f \circ \alpha)\big)(1) = (p|_{\tilde{U}})^{-1}(f(v)) \in \tilde{U}$. Dies zeigt $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$, also ist $\tilde{f}$ stetig. □

II.4.6. Bemerkung. Da $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ injektiv ist, siehe Proposition II.3.11(i), ist die Bedingung in Satz II.4.5 äquivalent zu der Forderung, dass sich der Homomorphismus $f_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ über p_* zu einem Homomorphismus $\lambda : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ liften lässt, dh. $p_* \circ \lambda = f_*$. Das geometrische Liftungsproblem lässt sich daher genau dann lösen, wenn das entsprechende algebraische Problem lösebar ist:

$$
\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\
(Y, y_0) \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (X, x_0)
\end{tikzcd}
\qquad \Longleftrightarrow \qquad
\begin{tikzcd}
 & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(Y, y_0) \arrow[ur, dashed, "\exists \lambda"] \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}
$$

II.4.7. Beispiel. Für $n \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $[S^n, T^k] = 0$, dh. je zwei stetige Abbildung $S^n \to T^k$ sind homotop. Seien dazu $f, g : S^n \to T^k$ stetig. Betrachte die Überlagerung $p : \mathbb{R}^k \to T^k$ aus Beispiel II.2.5. Da S^n einfach zusammenhängend ist, folgt aus Satz II.4.5 die Existenz stetiger Abbildungen $\tilde{f}, \tilde{g} : S^n \to \mathbb{R}^k$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $p \circ \tilde{g} = g$. Da $\mathbb{R}^k$ kontrahierbar ist, sind $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ homotop. Damit müssen auch f und g homotop sein.

II.4.8. Beispiel. Für $n \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $[\mathbb{R}\mathrm{P}^n, T^k] = 0$, dh. je zwei stetige Abbildungen $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \to T^k$ sind homotop. Wir betrachten wieder die Überlagerung $p : \mathbb{R}^k \to T^k$. Da $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$, siehe Beispiel I.9.16, und $\pi_1(T^k) \cong \mathbb{Z}^k$, siehe Beispiel I.7.7, ist jeder Homomorphismus $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \to \pi_1(T^k)$ trivial. Sind also $f, g : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to T^k$ stetig, dann existieren $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}^k$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $p \circ \tilde{g} = g$, siehe Satz II.4.5. Da $\mathbb{R}^k$ kontrahierbar ist, sind $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ homotop, also müssen auch f und g homotop sein.

Wir nennen eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ (weg)zusammenhängend, falls $\tilde{X}$ (weg)zusammenhängend ist. Als stetiges Bild von $\tilde{X}$ muss dann auch X (weg)zusammenhängend sein. Wenn wir im Folgenden von einer zusammenhängenden Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eines lokal wegzusammenhängenden Raumes X sprechen dann impliziert dies, dass X und $\tilde{X}$ beide wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend sind, siehe die Bemerkungen II.4.1 und II.4.2.

II.4.9. Korollar. *Zwei zusammenhängende punktierte Überlagerungen eines lokal wegzusammenhängenden punktierten Raums sind genau dann isomorph, wenn ihre charakteristischen Untergruppen übereinstimmen. In diesem Fall gibt es genau einen Isomorphismus punktierter Überlagerungen zwischen ihnen.*

Beweis. Seien $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$ und $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ zwei zusammenhängende Überlagerungen von X. Existiert ein Isomorphismus punktierter Überlagerungen $\varphi : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, dann müssen die charakteristischen Untergruppen übereinstimmen, siehe Bemerkung II.3.10. Da der Isomorphismus φ als Lift der Abbildung q über p interpretiert werden kann, folgt die Eindeutigkeit des Isomorphismus aus Proposition II.3.1. Ist andererseits $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$ dann folgt aus Satz II.4.5, dass p und q zu Abbildungen punktierter Räume $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ und $\tilde{q} : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ gelifted werden können: Es ist dann $\tilde{q}^{-1} \circ \tilde{p}$ ein Automorphismus der punktierten Überlagerung p, und wegen der Eindeutigkeit solcher Automorphismen, siehe Proposition II.3.1, muss $\tilde{q}^{-1} \circ \tilde{p} = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ gelten. Ebenso folgt $\tilde{p}^{-1} \circ \tilde{q} = \mathrm{id}_{\tilde{Y}}$. Also ist $\tilde{p}$ ein Homöomorphismus und damit der gesuchte Isomorphismus punktierter Überlagerungen. □

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[rr, shift left, "\tilde{p}"] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \arrow[ll, shift left, "\tilde{q}"] \arrow[dl, "q"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

II.4.10. Korollar. *Es sei X ein einfach zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum. Dann ist jede zusammenhängende Überlagerung von X zu der trivialen ein-blättrigen Überlagerung $\mathrm{id}_X : X \to X$ isomorph. Weiters ist jede Überlagerung von X trivial.*

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus Korollar II.4.9. Sei nun $p : \tilde{X} \to X$ eine nicht notwendigerweise zusammenhängende Überlagerung. Es bezeichnen $\tilde{X}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, die Wegzusammenhangskomponenten von $\tilde{X}$ und $p_\lambda := p|_{\tilde{X}_\lambda} : \tilde{X}_\lambda \to X$. Aus dem Wegzusammenhang von X und Korollar II.3.6 folgt, dass jedes

$p_\lambda : \tilde{X}_\lambda \to X$ surjektiv ist. Ist U eine wegzusammenhängende offene Teilmenge die von p gleichmäßig überlagert wird, dann wird diese auch von p_λ gleichmäßig überlagert. Also ist jedes $p_\lambda : \tilde{X}_\lambda \to X$ eine zusammenhängende Überlagerung, und daher ein Homöomorphismus. Es folgt $\tilde{X} \cong X \times \Lambda$, also ist $p : \tilde{X} \to X$ eine triviale Überlagerung. □

II.4.11. Korollar. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine zusammenhängende Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raumes X. Weiters seien $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es existiert eine Decktransformation $\varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{X})$ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$.*
(ii) *Die Untergruppen $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ und $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ stimmen überein.*
(iii) *Für ein (und dann jedes) $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ mit $\tilde{x}_0 \cdot \sigma = \tilde{x}_1$ gilt $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)$.*
(iv) *Für einen (und dann jeden) Weg $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}_1$ liegt $[p \circ \tilde{f}]$ im Normalisator $\mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)$.*
(v) *Zu jeder Schleife $\tilde{f}$ bei $\tilde{x}_0$ existiert eine Schleife $\tilde{g}$ bei $\tilde{x}_1$ mit $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$.*

Beweis. Die Äquivalenz (i)⇔(ii) folgt aus Korollar II.4.9, denn eine Decktransformation mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ ist ein Isomorphismus punktierter Überlagerungen $\varphi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Die Äquivalenz (ii)⇔(iii) folgt aus Proposition II.3.11(iv). Die Äquivalenz (iii)⇔(iv) ist offensichtlich. Die Äquivalenz (ii)⇔(v) folgt aus Proposition II.3.11(ii). □

II.4.12. Korollar. *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine zusammenhängende punktierte Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raumes X. Dann ist* (II.5) *ein Isomorphismus von Gruppen,*

$$\mathrm{Deck}(\tilde{X}) \cong \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)\big/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Beweis. Nach Proposition II.3.11(viii) bleibt nur die Surjektivität des Homomorphsimus $\Phi : \mathrm{Deck}(\tilde{X}) \to \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)\big/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ zu zeigen. Sei also $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)$. Nach Korollar II.4.11 existiert eine Decktransformation φ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \sigma$. Es folgt $\Phi(\varphi) = \sigma$, also ist Φ surjektiv. □

II.5. Normale Überlagerungen. Normale Überlagerungen sind Überlagerungen mit maximaler Symmetrie. Genauer haben wir folgende Definition. Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ heißt *normal,* wenn für je zwei Punkte $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ eine Decktransformation $\varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{X})$ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ existiert. Eine Überlagerung ist also genau dann normal, wenn die Gruppe der Decktransformationen auf jeder Faser transitiv wirkt. Normale Überlagerungen werden manchmal auch als *reguläre* Überlagerungen bezeichnet.

II.5.1. Proposition. *Für eine zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eines lokal wegzusammenhängenden Raumes X sind äquivalent:*

(i) *$p : \tilde{X} \to X$ ist eine normale Überlagerung.*

(ii) *Für einen (und dann jeden) Punkt $x_0 \in X$ wirkt die Gruppe der Decktransformationen* $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ *transitiv auf der Faser $F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$.*

(iii) *Für einen (und dann jeden) Punkt $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ist die charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$.*

(iv) *Zu jeder Schleife $\tilde{f}$ in $\tilde{X}$ und jedem Punkt $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{f}(0))$ existiert eine Schleife $\tilde{g}$ bei $\tilde{x}_1$ mit $p \circ \tilde{g} = p \circ \tilde{f}$.*

In diesem Fall gilt weiters $\mathrm{Deck}(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$*, für jedes $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, und die Blätterzahl von p stimmt mit der Ordnung von* $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ *überein.*

Beweis. In der Äquivalenz (i)$\Leftrightarrow$(ii) ist nur zu zeigen, dass wenn $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ auf der Faser F_{x_0} transitiv wirkt dies dann auch für jede andere Faser gilt. Seien dazu $\tilde{y}_0$ und $\tilde{y}_1$ mit $p(\tilde{y}_0) = p(\tilde{y}_1)$ und $\tilde{x}_0 \in F_{x_0}$ beliebig. Wähle einen Weg $\tilde{f}_0 : I \to \tilde{X}$ von $\tilde{f}_0(0) = \tilde{y}_0$ nach $\tilde{f}_0(1) = \tilde{x}_0$. Weiters bezeichne $\tilde{f}_1 : I \to \tilde{X}$ den eindeutigen Weg mit $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_0$ und $\tilde{f}_1(0) = \tilde{y}_1$, siehe Korollar II.3.6. Es ist dann auch $\tilde{x}_1 := \tilde{f}_1(1) \in F_{x_0}$, nach Voraussetzung existiert daher eine Decktransformation φ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition II.3.1 folgt $\varphi \circ \tilde{f}_0 = \tilde{f}_1$, denn beide Wege liften den Weg $p \circ \tilde{f}_0$ und sie haben denselben Endpunkt $(\varphi \circ \tilde{f}_0)(1) = \tilde{x}_1 = \tilde{f}_1(1)$. Dann gilt aber auch $\varphi(\tilde{y}_0) = (\varphi \circ \tilde{f}_0)(0) = \tilde{f}_1(0) = \tilde{y}_1$. Nun zur Implikation (ii)$\Rightarrow$(iii): Sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 := p(\tilde{x}_0)$ und $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Da die Wirkung der Decktransformationen auf F_{x_0} transitiv ist, existiert $\varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{X})$ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \sigma$. Nach Korollar II.4.11 ist daher $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)$. Da dies für alle $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ gilt muss $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ sein. Ad (iii)$\Rightarrow$(ii): Seien also $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F_{x_0}$. Nach Proposition II.3.8 existiert $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ mit $\tilde{x}_0 \cdot \sigma = \tilde{x}_1$. Da $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ ist, gilt insbesondere $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)$. Nach Korollar II.4.11 existiert daher $\varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{X})$ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Also wirkt $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ transitiv auf F_{x_0}. Schließlich folgt die Äquivalenz (iv)$\Leftrightarrow$(ii) aus Korollar II.4.11. Ist nun p normal und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, dann folgt aus Korollar II.4.12 $\mathrm{Deck}(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, denn $\mathcal{N}_{\pi_1(X,p(\tilde{x}_0))}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big) = \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$ da die charakteristische Untergruppe ein Normalteiler ist. Schließlich ist $\mathrm{Deck}(\tilde{X}) \to F_{p(\tilde{x}_0)}$, $\varphi \mapsto \varphi(\tilde{x}_0)$, bijektiv, denn $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ wirkt frei und transitiv auf $F_{p(\tilde{x}_0)}$. Also stimmt die Blätterzahl mit der Ordnung von $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ überein. □

II.5.2. Beispiel. Jede zusammenhängende Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raums mit abelscher Fundamentalgruppe ist eine normale Überlagerung, siehe Proposition II.5.1, denn Untergruppen abelscher Gruppen sind stets Normalteiler.

II.5.3. Beispiel. Betrachte die normale Überlagerung $p : S^1 \to S^1$, $p(z) := z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ihre charakteristische Untergruppe ist $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$. Aus Proposition II.5.1 folgt daher $\mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$.

II.5.4. Beispiel. Jede einfach zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eines lokal wegzusammenhängenden Raums X ist normal, denn die triviale Untergruppe ist stets ein Normalteiler. In diesem Fall gilt weiters $\mathrm{Deck}(\tilde{X}) \cong \pi_1(X)$, siehe Proposition II.5.1.

II.5.5. Beispiel. Wirkt eine diskrete Gruppe G strikt diskontinuierlich von links auf einem topologischen Raum X, dann ist die Orbitprojektion $p : X \to X/G$ eine normale Überlagerung, siehe Proposition II.2.3. Ist X zusammenhängend, dann ist der Homomorphismus $G \to \mathrm{Deck}(p)$, $g \mapsto \lambda_g$, ein Isomorphismus. Ist nämlich φ eine Decktransformation, $x \in X$ beliebig und $g \in G$ mit $\varphi(x) = gx$, dann folgt aus Proposition II.3.2 schon $\varphi = \lambda_g$. Ist darüberhinaus X lokal wegzusammenhämgend, dann gilt $G \cong \mathrm{Deck}(p) \cong \pi_1(X/G, p(x_0))/p_*(\pi_1(X, x_0))$ für jedes $x_0 \in X$, siehe Proposition II.5.1. Ist schließlich X einfach zusammenhängend, dann folgt $G \cong \mathrm{Deck}(p) \cong \pi_1(X/G)$.

II.5.6. Beispiel. Betrachten wir die Überlagerung $p : S^n \to S^n/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $n \geq 2$, aus Beispiel II.2.7, so erhalten wir $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}_2$, siehe Beispiel II.5.5.

II.5.7. Beispiel. Betrachte wir die Überlagerung $p : S^{2n-1} \to S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p = L(p; q_1, \dots, q_n)$, $n \geq 2$, aus Beispiel II.2.8, dann erhalten wir $\pi_1\big(L(p; q_1, \dots, q_n)\big) \cong \mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}_p$, siehe Beispiel II.5.5.

II.5.8. Beispiel. Betrachte wir die Überlagerung $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong T^n$ aus siehe Beispiel II.2.5, so erhalten wir $\pi_1(T^n) \cong \mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}^n$, siehe Beispiel II.5.5.

II.5.9. Beispiel. Betrachten wir die Überlagerung $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \cong K$ aus Beispiel II.2.9, so erhalten wir $\pi_1(K) \cong \mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, siehe Beispiel II.5.5.

II.5.10. Beispiel. Es bezeichne $A : S^3 \to S^3$ die Antipodalabbildung, $A(x) := -x$. Die Abbildung $A \times A : S^3 \times S^3 \to S^3 \times S^3$ definiert eine freie $\mathbb{Z}_2$-Wirkung auf $S^3 \times S^3$. Aus Aufgabe 23 folgt $(S^3 \times S^3)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{SO}_4$. Mit Hilfe von Beispiel II.5.5 erhalten wir daher $\pi_1(\mathrm{SO}_4) \cong \mathbb{Z}_2$.

II.6. Konstruktion von Überlagerungen. Sei (X, x_0) ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender punktierter Raum. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass zusammenhängende punktierte Überlagerungen von (X, x_0), bis auf Isomorphie, durch ihre charakteristische Untergruppe bestimmt sind, siehe Korollar II.4.9. Es stellt sich nun die Frage, ob jede Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$ als charakteristische Untergruppe einer punktierten Überlagerung von (X, x_0) auftritt. Beispielsweise ist $\pi_1(X, x_0)$ die charakteristische Untergruppe der trivialen Überlagerung $\mathrm{id}_X : (X, x_0) \to (X, x_0)$. Das andere Extrem wäre eine Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit trivialer charakteristischer Untergruppe. Da $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ stets injektiv ist, siehe Proposition II.3.11(i), ist dies genau dann der Fall wenn $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist. Eine solche Überlagerung wird *universell* genannt.

II.6.1. Definition (Universelle Überlagerung). Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eines zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Raums X wird *universell* genannt, falls $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

II.6.2. Bemerkung. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum besitzt, bis auf Isomorphie, höchstens eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \to X$, siehe Korollar II.4.9. Wir sprechen daher von *der* universellen Überlagerung. Eine weitere schwache Zusammenhangseigenschaft der Basis stellt die Existenz einer universellen Überlagerungen sicher, siehe Satz II.6.9 unten. Universelle Überlagerungen sind stets normal, und es gilt $\operatorname{Deck}(\tilde{X}) \cong \pi_1(X)$, siehe Beispiel II.5.4.

II.6.3. Beispiel. Die Abbildung $\mathbb{R} \to S^1$ aus Beispiel II.2.4 ist die universelle Überlagerung des Kreises. Ebenso ist $\mathbb{R}^n \to T^n$, siehe Beispiel II.2.5, die universelle Überlagerung des Torus. Die Quotientenabbildung $S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ aus Beispiel II.2.7, ist die universelle Überlagerung des projektiven Raums, $n \geq 2$. Ebenso ist die Quotientenabbildung $S^{2n-1} \to L(p; q_1, \dots, q_n)$, siehe Beispiel II.2.8, die universelle Überlagerung des Linsenraums, $n \geq 2$. Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \cong K$ aus Beispiel II.2.9 ist die universelle Überlagerung der Kleinschen Flasche. Die Abbildung $S^3 \to \mathrm{SO}_3$ aus Aufgabe 18 ist die universelle Überlagerung von SO_3. Die Abbildung $S^3 \times S^3 \to \mathrm{SO}_4$ aus Beispiel II.5.10 ist die universelle Überlagerung von SO_4.

II.6.4. Bemerkung. Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte universelle Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raums X. Weiters sei $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Es bezeichne $\Phi : \operatorname{Deck}(\tilde{X}) \to \pi_1(X, x_0)$ den durch $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \Phi(\varphi)$ gegebenen Isomorphismus. Dann definiert $h \cdot \tilde{x} := \Phi^{-1}(h)(\tilde{x})$ eine strikt diskontinuierlich Linkswirkung von H auf $\tilde{X}$, siehe Proposition II.3.2. Also ist die Orbitprojektion $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}/H, \tilde{y}_0)$ eine (universelle) Überlagerung, wobei $\tilde{y}_0 := \tilde{p}(\tilde{x}_0)$, siehe Proposition II.2.3. Die Abbildung p faktorisiert zu einer surjektiven stetigen Abbildung $q : (\tilde{X}/H, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$, dh. $q \circ \tilde{p} = p$. Dieses q ist eine Überlagerung, denn jede wegzusammenhängende offene Teilmenge $U \subseteq X$ die von p gleichmäßig überlagert wird, wird auch von q gleichmäßig überlagert. Für die charakteristische Untergruppe von q gilt $q_*(\pi_1(\tilde{X}/H, \tilde{y}_0)) = H$. Betrachte dazu eine Schleife $f : I \to X$ bei x_0 und ihren Lift $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ mit $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. Dann ist $\tilde{p} \circ \tilde{f} : I \to \tilde{X}/H$ der Lift von f über q mit Anfangspunkt $(\tilde{p} \circ \tilde{f})(0) = \tilde{y}_0$. Dieser Lift ist genau dann geschlossen, wenn $\tilde{x}_0 \cdot [f] = \tilde{f}(1) \in \tilde{p}^{-1}(\tilde{y}_0) = H \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \cdot H$ liegt, und dies ist genau dann der Fall wenn $[f] \in H$, denn die Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf F_{x_0} ist frei wegen des einfachen Zusammenhangs von $\tilde{X}$. Aus Proposition II.3.11(ii) folgt daher die Behauptung über die charakteristische Untergruppe von q.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "\tilde{p}"] & \\
& (\tilde{X}/H, \tilde{y}_0) \arrow[dl, "q"] \\
(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

II.6.5. PROPOSITION (Universalität der universellen Überlagerung). *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte universelle Überlagerung des lokal wegzusammenhängenden Raumes X, und es sei $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$ eine weitere zusammenhängende Überlagerung. Dann existiert genau eine Abbildung punktierter Räume $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ mit $q \circ \tilde{p} = p$, und diese ist eine Überlagerung.*

BEWEIS. Es beizeichne $H := q_*(\pi_1(\tilde{y}, \tilde{y}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ die charakteristische Untergruppe von q. Nach Korollar II.4.9 ist q zu der punktierten Überlagerung $(\tilde{X}/H, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$ aus Bemerkung II.6.4 isomorph. O.B.d.A. dürfen wir daher $Y = \tilde{X}/H$ annehmen. Die Orbitprojektion $\tilde{p} : \tilde{X} \to \tilde{X}/H$ ist dann die gesuchte Überlagerung. □

Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung und $x_0 \in X$. Dann existieren $\tilde{x}_0 \in F_{x_0}$, offene Umgebungen $\tilde{U}$ von $\tilde{x}_0$ und U von x_0, sodass $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ ein Homöomorphismus ist. Die kanonische Inklusion $\iota : U \to X$ lässt sich dann als Komposition $\iota = p \circ (p|_{\tilde{U}})^{-1}$ schreiben. Aus $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$ folgt nun, dass $\iota_* = p_* \circ ((p|_{\tilde{U}})^{-1})_*$ der triviale Homomorphismus sein muss. Ein Raum kann daher nur dann eine universelle Überlagerung besitzen wenn er folgende Eigenschaft hat:

II.6.6. DEFINITION (Semilokal einfach zusammenhängend). Ein topologischer Raum X heißt *semilokal einfach zusammenhängend,* falls jeder Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung U besitzt, sodass jede Schleife in U bei x_0, in X nullhomotop ist. In anderen Worten, die kanonische Inklusion $U \to X$ induziert den trivialen Homomorphismus $\pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

II.6.7. BEMERKUNG. Jeder lokal kontrahierbare Raum ist semilokal einfach zusammenhängend, vgl. Bemerkung II.4.3. Insbesondere sind topologische Mannigfaltigkeiten semilokal einfach zusammenhängend. Allgemeiner ist jeder lokal einfach zusammenhängende Raum auch semilokal einfach zusammenhängend. Dabei heißt ein Raum lokal einfach zusammenhängend falls jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus einfach zusammenhängenden Umgebungen besitzt. Natürlich ist auch jeder einfach zusammenhängende Raum semilokal einfach zusammenhängend.

II.6.8. BEISPIEL. Der Teilraum $X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - \frac{1}{n}\| = \frac{1}{n}\}$ von $\mathbb{R}^2$ ist nicht semilokal einfach zusammenhängend, der Punkt $0 \in X$ besitzt keine Umgebung U deren induzierter Homomorphismus $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ trivial ist. Der Kegel CX is kontrahierbar, also einfach zusammenhängend und damit auch semilokal einfach zusammenhängend, er ist aber nicht lokal einfach zusammenhängend.

II.6.9. SATZ (Universelle Überlagerung). *Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum. Dann existiert eine universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$.*

Beweis. Wir fixieren einen Basispunkt $x_0 \in X$, und definieren $\tilde{X}$ als die Menge der Homotopieklassen relativ Endpunkten von Wegen in X mit Anfangspunkt x_0,

$$\tilde{X} := \big\{\text{Wege } \sigma : I \to X \text{ mit Anfangspunkt } \sigma(0) = x_0\big\}/\simeq .$$

Ist σ ein Weg mit $\sigma(0) = x_0$, dann schreiben wir $[\sigma] \in \tilde{X}$ für die von ihm repräsentierte Äquivalenzklasse. Offensichtlich ist

$$p : \tilde{X} \to X, \qquad p([\sigma]) := \sigma(1) \tag{II.6}$$

eine wohldefinierte Abbildung, die wegen des Wegzusammenhangs von X auch surjektiv ist. Als Basispunkt in $\tilde{X}$ wählen wir die Homotopieklasse des konstanten Weges, $\tilde{x}_0 := [c_{x_0}]$. Dann gilt $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Ist $[\sigma] \in \tilde{X}$ und $U \subseteq X$ offen, dann definieren wir eine Teilmenge $\tilde{U}_{[\sigma]} \subseteq \tilde{X}$ durch

$$\tilde{U}_{[\sigma]} := \big\{[\sigma\tau] \in \tilde{X} : \tau \text{ ein Weg in } U \text{ mit } \sigma(1) = \tau(0)\big\}.$$

Wir versehen $\tilde{X}$ mit der gröbsten Topologie, sodass alle diese Mengen $\tilde{U}_{[\sigma]}$ offen sind. Eine Abbildung $f : Z \to \tilde{X}$ ist also genau dann stetig, wenn für jede der Mengen $\tilde{U}_{[\sigma]}$ das Urbild $f^{-1}(\tilde{U}_{[\sigma]})$ offen in Z ist. Für $[\sigma] \in \tilde{U}_{[\sigma_1]} \cap \tilde{V}_{[\sigma_2]}$ gilt $[\sigma] \in \tilde{W}_{[\sigma]} \subseteq \tilde{U}_{[\sigma_1]} \cap \tilde{V}_{[\sigma_2]}$, wobei $W := U \cap V$, daher bilden die Mengen $\tilde{U}_{[\sigma]}$ sogar eine Basis der Topologie auf $\tilde{X}$.

Ist γ ein Weg in X mit Anfangspunkt $\gamma(0) = x_0$, dann definiert

$$\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}, \qquad \tilde{\gamma}(t) := [s \mapsto \gamma(ts)], \tag{II.7}$$

einen Weg in $\tilde{X}$ mit Anfangspunkt $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ und Endpunkt $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma]$. Die Stetigkeit von $\tilde{\gamma}$ lässt sich leicht mit Hilfe der obigen Beschreibung stetiger Abbildungen nach $\tilde{X}$ verifizieren. Weiters gilt offensichtlich $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, also ist $\tilde{\gamma}$ ein Lift von γ. Daraus folgt nun insbesondere, dass der Raum $\tilde{X}$ wegzusammenhängend ist, denn $\tilde{\gamma}$ verbindet den Basispunkt $\tilde{x}_0$ mit $[\gamma]$.

Die Abbildung (II.6) ist stetig, denn ist $[\sigma] \in \tilde{X}$ und $U \subseteq X$ offen mit $p([\sigma]) \in U$, dann ist $[\sigma] \in \tilde{U}_{[\sigma]}$ und $\tilde{U}_{[\sigma]} \subseteq p^{-1}(U)$.

Wir zeigen als nächstes, dass $p : \tilde{X} \to X$ tatsächlich eine Überlagerung ist. Sei dazu $x \in X$. Da X lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend ist, existiert eine wegzusammenhängende offene Umgebung U von x mit der Eigenschaft, dass die Inklusion $U \to X$ den trivialen Homomorphismus $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ induziert. Es bezeichne $F_x = p^{-1}(x) \subseteq \tilde{X}$, die Menge der Homotopieklassen von Wegen von x_0 nach x. Dann gilt zunächst

$$\tilde{U}_{[\sigma_1]} \cap \tilde{U}_{[\sigma_2]} = \emptyset \qquad \text{falls } [\sigma_1] \neq [\sigma_2] \in F_x. \tag{II.8}$$

Um dies einzusehen nehmen wir an es gilt $\tilde{U}_{[\sigma_1]} \cap \tilde{U}_{[\sigma_2]} \neq \emptyset$. Dann existieren zwei Wege τ_1 und τ_2 in U mit Anfangspunkt $\tau_1(0) = x = \tau_2(0)$, sodass $\sigma_1\tau_1 \simeq \sigma_2\tau_2$ relative Endpunkten in X. Da $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ trivial ist, gilt $\tau_1\bar{\tau}_2 \simeq c_x$ relativ Endpunkten in X. Es folgt $\sigma_1 \simeq \sigma_1\tau_1\bar{\tau}_2 \simeq \sigma_2$ relative Endpunkten in X, also $[\sigma_1] = [\sigma_2] \in \tilde{X}$. Dies zeigt (II.8). Da U wegzusammenhängend ist, folgt sofort $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\sigma]\in F_x} \tilde{U}_{[\sigma]}$. Es bleibt noch zu zeigen, dass für jedes $[\sigma] \in F_x$

$$p|_{\tilde{U}_{[\sigma]}} : \tilde{U}_{[\sigma]} \to U \tag{II.9}$$

ein Homöomorphismus ist. Wegen des Wegzusammenhangs von U ist (II.9) surjektiv. Aus der Trivialität von $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$, folgt die Injektivität von (II.9). Da p stetig ist, bleibt bloß noch zu zeigen, dass (II.9) eine offene Abbildung ist. Sei dazu $[\gamma] \in \tilde{U}_{[\sigma]}$ und $\tilde{W} \subseteq \tilde{U}_{[\sigma]}$ offen mit $[\gamma] \in \tilde{W}$. Dann existiert eine wegzusammenhängende offene Umgebung V von $\gamma(1)$ mit $\tilde{V}_{[\gamma]} \subseteq \tilde{W}$. Für diese gilt $p(\tilde{V}_{[\gamma]}) = V$, also ist $p(\tilde{W}) \supseteq V$ eine Umgebung von $p([\gamma])$. Dies zeigt, dass (II.9) eine offene Abbildung, und damit ein Homöomorphismus ist. Daher ist (II.6) tatsächlich eine zusammenhängende Überlagerung.

Schließlich ist noch $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$ zu verifizieren. Nach Proposition II.3.11(i) genügt es $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = 0$ zu überprüfen. Sei also γ eine Schleife bei x_0 mit $[\gamma] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Nach Proposition II.3.11(ii) ist der Lift $\tilde{\gamma}$, siehe (II.7), ein geschlossener Weg, dh. $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$. Da $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma]$, bedeutet dies aber gerade, dass $[\gamma] = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. Also ist jedes Element in $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ trivial und daher $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = 0$. Damit ist der Beweis des Satzes vollständig. □

II.6.10. Korollar. *Es sei (X, x_0) ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender punktierter Raum, und $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Dann existiert eine zusammenhängende punktierte Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit charakteristischer Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz II.6.9 und Bemerkung II.6.4. □

Aus Korollar II.4.9 und Korollar II.6.10 erhalten wir nun folgende vollständige Klassifikation der zusammenhängenden punktierten Überlagerungen eines hinreichend zusammenhängenden punktierten Raums.

II.6.11. Korollar (Klassifikation punktierter Überlagerungen). *Sei (X, x_0) ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender punktierter Raum. Die Korrespondenz die jeder zusammenhängenden punktierten Überlagerung von (X, x_0) ihre charakteristische Untergruppe zuordnet, definiert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen zusammenhängender punktierter Überlagerungen von (X, x_0) und den Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.*

Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine wegzusammenhängende Überlagerung und $x_0 \in X$, dann sind die charakteristischen Untergruppen $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, $\tilde{x}_0 \in F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$, alle konjugiert in $\pi_1(X, x_0)$, siehe Proposition II.3.11(vi). Die *Konjugationsklasse der charakteristischen Untergruppe* ist daher auch ohne Basispunkt in $\tilde{X}$ wohldefiniert. Aus Korollar II.6.11 und Proposition II.3.11(vii) erhalten wir folgende vollständige Klassifikation der zusammenhängenden Überlagerungen eines hinreichend zusammenhängenden Raums.

II.6.12. Korollar (Klassifikation von Überlagerungen). *Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender Raum, und $x_0 \in X$. Die Korrespondenz die jeder zusammenhängenden Überlagerung von X die Konjugationsklasse ihrer charakteristische Untergruppe zuordnet, definiert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen zusammenhängender Überlagerungen von X und den Konjugationsklassen von Untergruppen in $\pi_1(X, x_0)$.*

II.7. Darstellungen der Fundamentalgruppe. Wir wollen in diesem Abschnitt eine etwas andere Klassifikation der Überlagerungen diskutieren. Diese liefert eine genaue Beschreibung aller, nicht notwendigerweise zusammenhängenden, Überlagerungen eines hinreichend zusammenhängenden Raums.

Wir erinnern uns, siehe Proposition II.3.8, dass jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eine Rechtswirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser $p^{-1}(x_0)$ definiert, wobei $x_0 \in X$ ein beliebiger Basispunkt ist. Ist $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ ein Isomorphismus von Überlagerungen, $q : \tilde{Y} \to X$, dann liefert die Einschränkung von φ eine äquivariante Bijektion $\varphi_0 := \varphi|_{p^{-1}(x_0)} : p^{-1}(x_0) \to q^{-1}(x_0)$, dh. $\varphi_0(\tilde{x}_0 \cdot \sigma) = \varphi_0(\tilde{x}_0) \cdot \sigma$, für alle $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ und alle $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Ist nämlich $f : I \to X$ eine Schleife bei x_0 und $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ der Lift über p mit Anfangspunkt $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$, dann ist $\varphi \circ \tilde{f} : I \to \tilde{Y}$ der Lift von f über q mit Anfangspunkt $(\varphi \circ \tilde{f})(0) = \varphi_0(\tilde{x}_0)$ woraus sofort die Äquivarianz von φ_0 folgt, denn $\varphi_0(\tilde{x}_0) \cdot [f] = (\varphi \circ \tilde{f})(1) = \varphi_0(\tilde{f}(1)) = \varphi_0(\tilde{x}_0 \cdot [f])$.

Wir nennen zwei Rechtswirkungen $\rho_i : S_i \times G \to S_i$, $i = 1, 2$, einer Gruppe G äquivalent falls eine äquivariante Bijektion $\varphi : S_1 \to S_2$ exstiert, dh. $\varphi(s \cdot g) = \varphi(s) \cdot g$, für alle $s \in S_1$ und alle $g \in G$. Isomorphe Überlagerungen liefern daher äquivalenten Rechtswirkungen der Fundamentalgruppe.

II.7.1. Satz. *Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum und $x_0 \in X$. Ordnen wir einer Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ die Rechtswirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser $p^{-1}(x_0)$ zu, so erhalten wir eine bijektive Korrespondenz zwischen der Menge der Isomorphieklassen von Überlagerungen von X und den Äquivalenzklassen von Rechtswirkungen von $\pi_1(X, x_0)$.*

Beweis. Zu einer gegebenen Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf einer Menge S konstruieren wir zunächst eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$, sodass die auf $p^{-1}(x_0)$ induzierte Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ äquivalent zu der gegebenen Wirkung auf S ist. Es bezeichne dazu $q : \tilde{Y} \to X$ die universelle Überlagerung von X, siehe Satz II.6.9. Wähle $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}$ mit $q(\tilde{y}_0) = x_0$, und bezeichne mit $\Phi : \mathrm{Deck}(\tilde{Y}) \to \pi_1(X, x_0)$ den duch $\varphi(\tilde{y}_0) = \tilde{y}_0 \cdot \Phi(\varphi)$ gegebenen Isomorphismus. Auf $\tilde{Y} \times S$ betrachten wir die Linkswirkung $\sigma \cdot (\tilde{y}, s) := \big(\Phi^{-1}(\sigma)(\tilde{y}), s \cdot (\sigma^{-1})\big)$,

$(\tilde{y}, s) \in \tilde{Y} \times S$, $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Es bezeichne $\tilde{X} := (\tilde{Y} \times S)/\pi_1(X, x_0)$ den Orbitraum, und $p : \tilde{X} \to X$ die durch $p([\tilde{y}, s]) := q(\tilde{y})$ definierte Abbildung. Beachte, dass p wohldefiniert, stetig und surjektiv ist. Tatsächlich ist p eine Überlagerung, denn jede wegzusammenhängende offene Teilmenge in X die von q gleichmäßig überlagert wird, wird auch von p gleichmäßig überlagert, siehe Proposition II.1.5. Die Abbildung $\varphi : S \to p^{-1}(x_0)$, $\varphi(s) := [\tilde{y}_0, s]$ ist eine Bijektion, denn die Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf $q^{-1}(x_0)$ ist frei und transitiv. Sei nun $f : I \to X$ eine Schleife bei x_0, und $\tilde{f} : I \to \tilde{Y}$ der Lift mit Anfangspunkt $\tilde{f}(0) = \tilde{y}_0$. Zu gegebenem $s \in S$ ist dann $I \to \tilde{X}$, $t \mapsto [\tilde{f}(t), s]$, ein Lift von f über p mit Anfangspunkt $\varphi(s)$. Es folgt $\varphi(s) \cdot [f] = [\tilde{f}(1), s] = \big[\tilde{y}_0 \cdot [f], s\big] = \big[\Phi^{-1}([f])(\tilde{y}_0), s\big] = \big[\tilde{y}_0, s \cdot [f]\big] = \varphi(s \cdot [f])$. Also ist $\varphi : S \to p^{-1}(x_0)$ eine äquivariante Bijektion. Bis auf Äquivalenz erhalten wir also jede Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ aus einer Überlagerung von X, dh. die Korrespondenz ist surjektiv.

Nun zur Injektivität der Korrespondenz: Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und es bezeichnen $F := p^{-1}(x_0)$ die Faser über x_0 versehen mit der üblichen Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$. Es genügt zu zeigen, dass die oben konstruierte Überlagerung $(\tilde{Y} \times F)/\pi_1(X, x_0) \to X$ isomorph zu der Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist. Wir definieren eine Abbildung $\tilde{\varphi} : \tilde{Y} \times F \to \tilde{X}$ wie folgt. Sind $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, und $\tilde{x}_0 \in F$, dann wählen wir einen Weg $f : I \to \tilde{Y}$ von $f(0) = \tilde{y}_0$ nach $f(1) = \tilde{y}$ und bezeichnen mit $\widetilde{(q \circ f)}_{\tilde{x}_0}$ den eindeutigen Lift des Weges $q \circ f : I \to X$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$. Auf Grund des einfachen Zusammenhangs von $\tilde{Y}$ ist der Endpunkt $\tilde{\varphi}(\tilde{y}, \tilde{x}_0) := \widetilde{(q \circ f)}_{\tilde{x}_0}(1)$ unabhängig von der Wahl von f. Ist $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ dann gilt $\tilde{\varphi}\big(\Phi^{-1}(\sigma)\tilde{y}, \tilde{x}_0 \cdot (\sigma^{-1})\big) = \tilde{\varphi}(\tilde{y}, \tilde{x}_0)$, also faktorisiert $\tilde{\varphi}$ zu einer Abbildung $\varphi : (\tilde{Y} \times F)/\pi_1(X, x_0) \to \tilde{X}$. Es lässt sich nun leicht verifizieren, dass φ ein Isomorphismus von Überlagerungen ist. □

II.7.2. Bemerkung. Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum, $x_0 \in X$, ρ eine Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf einer Menge S und $p : \tilde{X} \to X$ die entsprechende Überlagerung, siehe Satz II.7.1. Es ist dann $\tilde{X}$ zusammenhängend genau dann, wenn ρ transitiv ist. In diesem Fall stimmt die Konjugationsklasse der Charakteristischen Untergruppe von p mit der Konjugationsklasse der Isotropiegruppe $\{\sigma \in \pi_1(X, x_0) : s \cdot \sigma = s\}$ überein, wobei $s \in S$ beliebig ist.[22] Insbesondere ist p genau dann universell, wenn die Wirkung ρ transitiv und frei ist. Im transitiven (zusammenhängenden) Fall ist p genau dann eine normale Überlagerung, wenn eine (und dann jede) Isotropiegruppe $\{\sigma \in \pi_1(X, x_0) : s \cdot \sigma = s\}$ einen Normalteiler in $\pi_1(X, x_0)$ bildet.

II.7.3. Bemerkung. Es sei G eine Gruppe und S eine Menge. Jeder Rechtswirkung ρ von G auf S können wir eine Linkswirkung λ von G auf S zuordnen,

[22]In diesem Fall sind die Isotropiegruppen von $s \in S$ alle konjugiert.

$\lambda(g,s) := \rho(s,g^{-1})$. Offensichtlich liefert dies eine Bijektion zwischen den Linkswirkungen von G auf S und den Rechtswirkungen von G auf S. Eine Linkswirkung von G auf S ist aber nichts anderes als ein Homomorphismus $G \to \mathfrak{S}(S)$. Aus Satz II.7.1 erhalten wir daher eine bijektive Korrespondenz zwischen Isomorphieklassen von Überlagerungen eines Raums (X,x_0) und Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\pi_1(X,x_0) \to \mathfrak{S}(S)$. Dabei sind zwei Homomorphismen $\lambda_i : \pi_1(X,x_0) \to \mathfrak{S}(S_i)$, $i = 1,2$, äquivalent, wenn eine Bijektion $\varphi : S_1 \to S_2$ existiert, sodass $\varphi \circ \lambda_1(\sigma) \circ \varphi^{-1} = \lambda_2(\sigma)$, für alle $\sigma \in \pi_1(X,x_0)$. Wollen wir alle Überlagerungen von (X,x_0) mit vorgegebener Blätterzahl bestimmen, genügt es daher eine Menge S gegebener Kardinalität zu wählen und alle Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\pi_1(X,x_0) \to \mathfrak{S}(S)$ zu bestimmen. Dabei sind zwei Homomorphismen $\lambda_1, \lambda_2 : \pi_1(X,x_0) \to \mathfrak{S}(S)$ äquivalent, falls $\tau \in \mathfrak{S}(S)$ existiert, sodass $\tau \circ \lambda_1(\sigma) \circ \tau^{-1} = \lambda_2(\sigma)$, für alle $\sigma \in \pi_1(X,x_0)$.

II.7.4. Beispiel. Wir wollen alle zwei-fachen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ bestimmen. Diese stehen in bijektiver Korrespondenz mit Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\pi_1(S^1 \vee S^1) \to \mathfrak{S}_2 := \mathfrak{S}(\{1,2\})$, siehe Bemerkung II.7.3. Da $\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}_2$ abelsch ist, sind zwei solche Homomorphismen nur dann äquivalent wenn sie übereinstimmen. Da $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \langle a,b \mid -\rangle$ stehen diese Homomorphismen in bijektiver Korrespondenz mit $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$, dabei entspricht einem Homomorphismus $\varphi : \langle a,b \mid -\rangle \to \mathfrak{S}_2$ das Paar $\big(\varphi(a),\varphi(b)\big) \in \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$.[23] Es gibt daher genau vier (Äquivalenzklassen von) Homomorphismen $\pi_1(S^1 \vee S^1) \to \mathfrak{S}_2$, und damit genau vier Isomorphieklassen zwei-blättriger Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$. Bis auf eine sind sie alle zusammenhängend.

II.7.5. Beispiel. Wir wollen alle drei-fachen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ bestimmen. Diese stehen in bijektiver Korrespondenz mit Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\pi_1(S^1 \vee S^1) \to \mathfrak{S}_3 := \mathfrak{S}(\{1,2,3\})$. Da $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \langle a,b \mid -\rangle$, stehen diese Homomorphismen in bijektiver Korrespondenz mit $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$, einem Homomorphismus φ entspricht dabei das Paar $(\varphi(a),\varphi(b))$. Mit wenig Aufwand lässt sich folgende Liste verifizieren, sie enthält aus jeder Äquivalenzklasse von Homomorphismen (Paaren) genau einen Repräsentanten.[24]

$\varphi(a)$	()	()	()	(12)	(12)	(12)	(12)	(123)	(123)	(123)	(123)
$\varphi(b)$	()	(12)	(123)	()	(12)	(13)	(123)	()	(12)	(123)	(132)
zush.	nein	nein	ja	nein	nein	ja	ja	ja	ja	ja	ja

Es gibt daher genau 11 drei-fache Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$, und 7 davon sind zusammenhängend.

[23] Dies folgt aus der Tatsache, dass wir einen Homomorphimus $\langle a,b \mid -\rangle$ auf den Erzeugern a und b beliebig vorgeben können und er dadurch schon vollständig festgelegt ist.

[24] Wir verwenden hier die übliche Zyklenschreibweise für Elemente in $\mathfrak{S}_3$. Etwa bezeichnet (12) die Transposition von 1 und 2, (123) bezeichnet eine zyklische Permutation, und () bezeichnet die identische Permutation.

II.7.6. Beispiel. Wir wollen alle drei-fachen Überlagerungen der Kleinschen Flasche K bestimmen. Wir erinnern uns, dass $\pi_1(K) \cong \langle a, b \mid a^2b^{-2}\rangle$, siehe Beispiel I.9.9. Wieder genügt es die Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\langle ab \mid a^2b^{-2}\rangle \to \mathfrak{S}_3$ zu bestimmen. Die Zuordnung $\varphi \mapsto (\varphi(a), \varphi(b))$ liefert eine Bijektion von der Menge der Homomorphismen $\langle ab \mid a^2b^{-2}\rangle \to \mathfrak{S}_3$ auf die Menge der Paare $(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ mit $\sigma^2 = \tau^2$. Folgende Liste enthält aus jeder Äquivalenzklasse von Homomorphismen (Paaren) genau einen Repräsentanten.

$\varphi(a)$	()	()	(12)	(12)	(12)	(123)
$\varphi(b)$	()	(12)	()	(12)	(13)	(123)
zush.	nein	nein	nein	nein	ja	ja

Es gibt daher, bis auf Isomorphie, genau sechs drei-blättrige Überlagerungen der Kleinschen Flasche, und zwei davon sind zusammenhängend.

II.8. Überlagerungen topologischer Gruppen. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G die mit einer Topologie versehen ist, sodass *Multiplikation* $\mu : G\times G \to G$, $(g, h) \mapsto \mu(g, h) := gh$ und *Inversion* $\nu : G \to G$, $g \mapsto \nu(g) := g^{-1}$ stetig sind.

II.8.1. Beispiel. Jede Untergruppe einer topologischen Gruppe ist bezüglich der Teilraumtopologie eine topologische Gruppe. Produkte topologischer Gruppen sind wieder topologische Gruppen.

II.8.2. Beispiel. Jede Gruppe, versehen mit der diskreten Topologie, ist eine topologische Gruppe.

II.8.3. Beispiel. $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$, versehen mit der üblichen Topologie, bilden bezüglich der Addition abelsche topologische Gruppen. Allgemeiner kann jeder topologische Vektorraum bezüglich der Addition als abelsche topologische Gruppe aufgefaßt werden.

II.8.4. Beispiel. $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, versehen mit der von $\mathbb{C}$ induzierten Topologie, bildet bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen eine abelsche topologische Gruppen. Als Untergruppen con $\mathbb{C}^\times$ sind auch S^1, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ abelsche topologische Gruppen. Der Torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ ist eine abelsche kompakte topologische Gruppe.

II.8.5. Beispiel. Die Matrizengruppen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, versehen mit der von $\mathbb{R}^{n^2}$ bzw. $\mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Topologie, bilden bezüglich der Multiplikation von Matrizen topologische Gruppen. Daher bilden auch die Untergruppe O_n, U_n, SO_n, SU_n, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ topologische Gruppen.

Unter einem *H-Raum*[25] verstehen wir einen punktierten Raum (X, e) zusammen mit einer Abbildung punktierter Räume $\mu : (X, e) \times (X, e) \to (X, e)$, sodass

[25] H-Raum, nach Heinz Hopf.

$\mu \circ (\mathrm{id}_X, c_e)$ und $\mu \circ (c_e, \mathrm{id}_X)$ beide homotop relativ Basispunkt zu id_X sind. Dabei bezeichnet $c_e : (X, e) \to (X, e)$ die konstante Abbildung, $c_e(x) := e$. Die Abbildung μ wird auch als *Multiplikation* bezeichnet.

II.8.6. Beispiel. Jede topologische Gruppe ist ein H-Raum. In diesem Fall gilt sogar $\mu \circ (\mathrm{id}_X \times c_e) = \mathrm{id}_X$ und $\mu \circ (c_e \circ \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X$, wobei μ die Gruppenmultiplikation und e das neutrale Element bezeichnen.

II.8.7. Proposition (Fundamentalgruppe von H-Räumen). *Es sei (X, e) ein H-Raum mit Multiplikation $\mu : (X, e) \times (X, e) \to (X, e)$. Dann stimmt der induzierte Homomorphismus*

$$\mu_* : \pi_1(X, e) \times \pi_1(X, e) = \pi_1\big((X, e) \times (X, e)\big) \to \pi_1(X, e)$$

mit der Multiplikation in $\pi_1(X, e)$ überein, dh. für $\sigma, \tau \in \pi_1(X, e)$ gilt $\mu_*(\sigma, \tau) = \sigma\tau$. Insbesondere ist $\pi_1(X, e)$ abelsch.

Beweis. Es seien $f, g : I \to X$ zwei Schleifen bei e. Betrachte die stetige Abbildung $H := \mu \circ (f \times g) : I \times I \to X$, $H(s, t) = \mu(f(s), g(t))$. Beachte, dass H die vier Eckpunkte von $I \times I$ auf e abbildet. Weiters seien $\iota_1 : I \to I \times I$, $\iota_1(s) := (s, 0)$, $\iota_2 : I \to I \times I$, $\iota_2(t) := (1, t)$, und $\iota_3 : I \to I \times I$, $\iota_3(t) := (t, t)$. Da $I \times I$ einfach zusammenhängend ist, gilt $\iota_1\iota_2 \simeq \iota_3$ relativ Endpunkte, also auch $(H \circ \iota_1)(H \circ \iota_2) \simeq H \circ \iota_3$ relativ Endpunkte, und damit $[H \circ \iota_1][H \circ \iota_2] = [H \circ \iota_3] \in \pi_1(X, e)$. Wegen $(H \circ \iota_3)(t) = \mu(f(t), g(t))$ ist $[H \circ \iota_3] = \mu_*([f], [g]) \in \pi_1(X, e)$. Da $(H \circ \iota_1)(s) = \mu(f(s), g(0)) = \mu(f(s), e) = (\mu \circ (\mathrm{id}_X, c_e) \circ f)(s)$ ist $H \circ \iota_1 = \mu \circ (\mathrm{id}_X, c_e) \circ f \simeq \mathrm{id}_X \circ f = f$ relativ Enpunkte, denn $\mu \circ (\mathrm{id}_X, c_e) \simeq \mathrm{id}_X$ relativ Basispunkt. Daher gilt $[H \circ \iota_1] = [f] \in \pi_1(X, e)$. Analog folgt aus $\mu \circ (c_e, \mathrm{id}_X) \simeq \mathrm{id}_X$, dass $[H \circ \iota_2] = [g] \in \pi_1(X, e)$. Insgesamt erhalten wir $[f][g] = [H \circ \iota_1][H \circ \iota_2] = [H \circ \iota_3] = \mu_*([f], [g])$, womit die erste Behauptung bewiesen ist. Seien nun $\iota_4 : I \to I \times I$, $\iota_4(t) := (0, t)$, und $\iota_5 : I \to I \times I$, $\iota_5(s) := (s, 1)$. Wie oben folgt $\iota_4\iota_5 \simeq \iota_3$ relativ Endpunkte, $[H \circ \iota_4][H \circ \iota_5] = [H \circ \iota_3] = \mu_*([f], [g]) \in \pi_1(X, e)$, $[H \circ \iota_4] = [g]$, $[H \circ \iota_5] = [f]$ und damit $[g][f] = \mu_*([f], [g])$, also ist $\pi_1(X, e)$ abelsch. Der Beweis der Kommutativität von $\pi_1(X, e)$ kann durch ein etwas algebraischeres Argument ersetzt werden, denn da die Multiplikation in $\pi_1(X, e)$ von einer stetigen Abbildung induziert wird muss sie ein Homomorphismus sein, und dies ist nur für abelsche Gruppen möglich, siehe Bemerkung II.8.8 unten. □

II.8.8. Bemerkung. Für eine Gruppe Γ ist die Multiplikation $\mu : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ genau dann ein Homomorphismus, wenn Γ abelsch ist, denn $\mu\big((g_1, h_1)(g_2, h_2)\big) = \mu(g_1g_2, h_1h_2) = g_1g_2h_1h_2$ und $\mu(g_1, h_1)\mu(g_2, h_2) = g_1h_1g_2h_2$.

II.8.9. Beispiel. Es sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e und Multiplikation $\mu : G \times G \to G$. Da (G, e) durch μ zu einem H-Raum wird, siehe Beispiel II.8.6, ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ abelsch, siehe Proposition II.8.7. Für zwei Schleifen $f, g : I \to G$ bei e repräsentiert die Schleife

$\mu\circ(f,g):I\to G$, $t\mapsto f(t)g(t)=\mu(f(t),g(t))$, das Produkt $[f][g]\in\pi_1(G,e)$. Weiters stimmt die von der Inversion $\nu:G\to G$ induzierte Abbildung $\nu_*:\pi_1(G,e)\to\pi_1(G,e)$ mit der Inversion in $\pi_1(G,e)$ überein, dh. für eine Schleife $g:I\to G$ bei e repräsentiert die Schleife $t\mapsto(\nu\circ g)(t)=g(t)^{-1}$ das inverse Element $[g]^{-1}\in\pi_1(G,e)$. Dies folgt aus der Relation $c_e=\mu\circ(\nu,\mathrm{id}_G)$, denn mittels Proposition II.8.7 erhalten wir $1=(c_e)_*\sigma=(\mu\circ(\nu,\mathrm{id}_G))_*\sigma=\mu_*(\nu_*\sigma,\sigma)=(\nu_*\sigma)\sigma$, also $\nu_*\sigma=\sigma^{-1}$ für alle $\sigma\in\pi_1(G,e)$.

Wir wollen diesen Abschnitt mit zwei Anwendungen des Liftungskriteriums abschließen, siehe Proposition II.8.10 und Proposition II.8.11. In beiden Fällen werden topologische bzw. geometrische Strukturen von der Basis auf den Totalraum geliftet.

II.8.10. Proposition (Überlagerungen von H-Räumen). *Es sei $p:(\tilde X,\tilde e)\to(X,e)$ eine zusammenhängende punktierte Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden H-Raums mit Multiplikation $\mu:(X,e)\times(X,e)\to(X,e)$. Dann existiert genau eine Abbildung punktierter Räume $\tilde\mu:(\tilde X,\tilde e)\times(\tilde X,\tilde e)\to(\tilde X,\tilde e)$ mit $p\circ\tilde\mu=\mu\circ(p\times p)$, und diese macht $(\tilde X,\tilde e)$ zu einem H-Raum.*

Beweis. Für den von $\mu\circ(p\times p):(\tilde X,\tilde e)\times(\tilde X,\tilde e)\to(X,e)$ induzierten Homomorphismus gilt $(\mu\circ(p\times p))_*\big(\pi_1\big((\tilde X,\tilde e)\times(\tilde X,\tilde e)\big)\big)=\mu_*\big(p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde e))\times p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde e))\big)=p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde e))$, denn μ_* ist die Multiplikation in $\pi_1(X,e)$, siehe Proposition II.8.7, und $p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde e))$ ist eine Untergruppe. Nach Satz II.4.5 existiert daher eine eindeutige Abbildung punktierter Räume $\tilde\mu:(\tilde X,\tilde e)\times(\tilde X,\tilde e)\to(\tilde X,\tilde e)$ mit $p\circ\tilde\mu=\mu\circ(p\times p)$. Sei nun $H:X\times I\to X$ eine Homotopie relativ Basispunkt e von $H_0=\mathrm{id}_X$ nach $H_1=\mu\circ(\mathrm{id}_X,c_e)$.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde X,\tilde e)\times(\tilde X,\tilde e) \arrow[r, dashed, "\exists!\tilde\mu"] \arrow[d, "p\times p"] & (\tilde X,\tilde e) \arrow[d, "p"] \\
(X,e)\times(X,e) \arrow[r, "\mu"] & (X,e)
\end{tikzcd}$$

Dann ist $G:=H\circ(p\times\mathrm{id}_I):\tilde X\times I\to X$ eine Homotopie relativ Basispunkt $\tilde e$ von $G_0=p$ nach $G_1=\mu\circ(\mathrm{id}_X,c_e)\circ p$. Nach Satz II.3.3 existiert eine Homotopie $\tilde G:\tilde X\times I\to\tilde X$ mit $p\circ\tilde G=G$ und $\tilde G_0=\mathrm{id}_{\tilde X}$. Da $t\mapsto p(\tilde G(\tilde e,t))=G(\tilde e,t)=\tilde e$ muss auch $t\mapsto\tilde G(\tilde e,t)$ konstant in t sein, also ist $\tilde G$ eine Homotopie relativ Basispunkt $\tilde e$. Da $p\circ\tilde\mu\circ(\mathrm{id}_{\tilde X},c_{\tilde e})=\mu\circ(p\times p)\circ(\mathrm{id}_{\tilde X},c_{\tilde e})=\mu\circ(p,p\circ c_{\tilde e})=\mu\circ(\mathrm{id}_X,c_e)\circ p=p\circ\tilde G_1$ folgt $\tilde\mu\circ(\mathrm{id}_{\tilde X},c_{\tilde e})=\tilde G_1$, denn die beiden Abbildungen stimmen bei $\tilde e$ überein, siehe Proposition II.3.1. Damit ist $\tilde G$ eine Homotopie relativ Basisunkt von $\mathrm{id}_{\tilde X}$ nach $\tilde\mu\circ(\mathrm{id}_{\tilde X},c_{\tilde e})$. Ebenso lässt sich $\mathrm{id}_{\tilde X}\simeq\tilde\mu\circ(c_{\tilde e},\mathrm{id}_{\tilde X})$ zeigen. Also ist $(\tilde X,\tilde e)$ ein H-Raum. □

II.8.11. Proposition (Überlagerungen topologischer Gruppen). *Es sei $p:\tilde G\to G$ eine zusammenhängende Überlagerung einer lokal wegzusammenhängenden topologischen Gruppe G mit neutralem Element e. Weiters sei $\tilde e\in\tilde G$ mit $p(\tilde e)=e$. Dann gibt es auf $\tilde G$ genau eine Gruppenstruktur mit neutralem Element $\tilde e$, die $\tilde G$ zu einer topologischen Gruppe und $p:\tilde G\to G$ zu einem Homomorphismus macht. Ist G abelsch, dann auch $\tilde G$.*

Beweis. Nach Proposition II.8.10 gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{\mu} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ mit $p \circ \tilde{\mu} = \mu \circ (p \times p)$ und $\tilde{\mu}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$, wobei $\mu : G \times G \to G$ die Multiplikation in G bezeichnet. Insbesondere ist damit die Eindeutigkeitsaussage gezeigt.

Da die Multiplikation μ assotiativ ist, dh. $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_G) = \mu \circ (\mathrm{id}_G \times \mu)$, folgt $p \circ \tilde{\mu} \circ (\tilde{\mu} \times \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \times p) \circ (\tilde{\mu} \times \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ \big((p \circ \tilde{\mu}) \times p\big) = \mu \circ \big((\mu \circ (p \times p)) \times p\big) = \mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_G) \circ (p \times p \times p) = \mu \circ (\mathrm{id}_G \times \mu) \circ (p \times p \times p) = \mu \circ \big(p \times (\mu \circ (p \times p))\big) = \mu \circ \big(p \times (p \circ \tilde{\mu})\big) = \mu \circ (p \times p) \circ (\mathrm{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\mu}) = p \circ \tilde{\mu} \circ (\mathrm{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\mu})$ also liften $\tilde{\mu} \circ (\tilde{\mu} \times \mathrm{id}_{\tilde{G}})$ und $\tilde{\mu} \circ (\mathrm{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\mu})$ dieselbe Abbildung $\tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{G} \to G$. Wir erhalten $\tilde{\mu} \circ (\tilde{\mu} \times \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \tilde{\mu} \circ (\mathrm{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\mu})$, denn die beiden Abbildungen stimmen beim Punkt $(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e})$ überein, siehe Proposition II.3.1. Damit ist $\tilde{\mu}$ eine assotiative Multiplikation.

Da e neutrales Element von G, dh. $\mu \circ (c_e, \mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_G$, folgt $p \circ \tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}}, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \times p) \circ (c_{\tilde{e}}, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \circ c_{\tilde{e}}, p) = \mu \circ (c_e, \mathrm{id}_G) \circ p = \mathrm{id}_G \circ p = p \circ \mathrm{id}_{\tilde{G}}$, also liften $\tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}}, \mathrm{id}_{\tilde{G}})$ und $\mathrm{id}_{\tilde{G}}$ dieselbe Abbildung $\tilde{G} \to G$. Wir erhalten $\tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}}, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mathrm{id}_{\tilde{G}}$, denn die beiden Abbildungen stimmen beim Punkt $\tilde{e}$ überein. Damit ist $\tilde{e}$ linksneutrales Element der Multiplikation $\tilde{\mu}$. Analog lässt sich zeigen, dass $\tilde{e}$ auch rechts-neutrales Element von $\tilde{\mu}$ ist.

Es bezeichne $\kappa : G \times G \to G \times G$, $\kappa(g, h) := (h, g)$, und $\tilde{\kappa} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G} \times \tilde{G}$, $\tilde{\kappa}(\tilde{g}, \tilde{h}) = (\tilde{h}, \tilde{g})$. Ist G kommutativ, dann gilt $\mu \circ \kappa = \mu$ und es folgt $p \circ \tilde{\mu} \circ \tilde{\kappa} = \mu \circ (p \times p) \circ \tilde{\kappa} = \mu \circ \kappa \circ (p \times p) = \mu \circ (p \times p) = p \circ \tilde{\mu}$, also liften $\tilde{\mu} \circ \tilde{\kappa}$ und $\tilde{\mu}$ dieselbe Abbildung $\tilde{G} \times \tilde{G} \to G$. Wir erhalten $\tilde{\mu} \circ \tilde{\kappa} = \tilde{\mu}$, denn die beiden Abbildungen stimmen beim Punkt $(\tilde{e}, \tilde{e})$ überein. Damit ist auch $\tilde{G}$ kommutativ.

Es bezeichne nun $\nu : G \to G$ die Inversion, $\nu(g) = g^{-1}$. Für den von $\nu \circ p : (\tilde{G}, \tilde{e}) \to (G, e)$ induzierten Homomorphismus gilt $(\nu \circ p)_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{e})) = \nu_*(p_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))) = p_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))$, denn $p_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))$ ist eine Untergruppe und ν_* ist die Inversion in $\pi_1(G, e)$, siehe Beispiel II.8.9. Nach Satz II.4.5 existiert daher eine stetige Abbildung $\tilde{\nu} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ mit $p \circ \tilde{\nu} = \nu \circ p$ und $\tilde{\nu}(\tilde{e}) = \tilde{e}$. Aus $\mu \circ (\nu, \mathrm{id}_G) = c_e$ folgt $p \circ \tilde{\mu} \circ (\tilde{\nu}, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \times p) \circ (\tilde{\nu}, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \circ \tilde{\nu}, p) = \mu \circ (\nu, \mathrm{id}_G) \circ p = c_e \circ p = p \circ c_{\tilde{e}}$, also liften $\tilde{\mu} \circ (\tilde{\nu}, \mathrm{id}_{\tilde{G}})$ und $c_{\tilde{e}}$ dieselbe Abbildung $\tilde{G} \to G$. Wir erhalten $\tilde{\mu} \circ (\tilde{\nu}, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = c_{\tilde{e}}$, denn die beiden Abbildungen stimmen beim Punkt $\tilde{e}$ überein. Damit ist $\tilde{\nu}(\tilde{g})$ das Linksinverse von $\tilde{g} \in \tilde{G}$. Ebenso folgt $\tilde{\mu} \circ (\mathrm{id}_{\tilde{G}}, \tilde{\nu}) = c_{\tilde{e}}$, also ist $\tilde{\nu}(\tilde{g})$ auch Rechtsinverses von $\tilde{g} \in \tilde{G}$. Damit ist $\tilde{G}$ eine topologische Gruppe. □

II.8.12. Bemerkung. Es seien G und $\tilde{G}$ zwei zusammenhängende topologische Gruppen und $p : \tilde{G} \to G$ ein Homomorphismus der eine Überlagerung ist. Es bezeichnen $e \in G$ und $\tilde{e} \in \tilde{G}$ die neutralen Elemente. Jedes $\tilde{g} \in \ker(p) = F_e$ definiert Decktransformationen $\lambda_{\tilde{g}} \in \mathrm{Deck}(\tilde{G})$, $\lambda_{\tilde{g}}(\tilde{h}) := \tilde{g}\tilde{h}$, und $\rho^{\tilde{g}} \in \mathrm{Deck}(\tilde{G})$, $\rho^{\tilde{g}}(\tilde{h}) := \tilde{h}\tilde{g}$. Wegen $\lambda_{\tilde{g}}(\tilde{e}) = \tilde{g} = \rho^{\tilde{g}}(\tilde{e})$ muss $\lambda_{\tilde{g}} = \rho^{\tilde{g}}$ gelten, siehe Proposition II.3.2. Es folgt $\tilde{g}\tilde{h} = \tilde{h}\tilde{g}$ für alle $\tilde{g} \in \ker(p)$ und $\tilde{h} \in \tilde{G}$. Also liegt $\ker(p)$ im Zentrum $C(\tilde{G})$ von $\tilde{G}$. Auch folgt, dass die Decktransformationen transitiv auf den Fasern von p wirken, also ist p eine normale Überlagerung. Schließlich ist $\ker(p) \to \mathrm{Deck}(\tilde{G})$, $\tilde{g} \mapsto \lambda_{\tilde{g}}$, ein Isomorphismus von Gruppen mit Inversem $\mathrm{Deck}(\tilde{G}) \to \ker(p)$, $\varphi \mapsto \varphi(\tilde{e})$. Für einfach zusammenhängendes $\tilde{G}$ erhalten wir insbesondere $\pi_1(G) \cong \mathrm{Deck}(\tilde{G}) \cong \ker(p)$.