

# Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Stefan Haller

Dies ist ein Skriptum zu meiner Vorlesung im Sommersemester 2018. Es steht unter <http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2018.html> zur Verfügung.

## INHALTSVERZEICHNIS

Literatur	2
1. Hilberts Axiomensystem	3
1.1. Axiome der Verknüpfung (Inzidenzaxiome)	3
1.2. Axiome der Anordnung	4
1.3. Kongruenzaxiome für Strecken	15
1.4. Kongruenzaxiome für Winkel	19
1.5. Das Parallelenaxiom	36
1.6. Vollständigkeit	58
2. Koordinaten	65
2.1. Teilverhältnis	65
2.2. Koordinaten auf Geraden	71
2.3. Koordinaten der Ebene	73
2.4. Trigonometrie	91
2.5. Determinante und Flächeninhalt	99
3. Lineare Algebra	103
3.1. Lineare Abbildungen und Matrizen	103
3.2. Teilräume und Dimension	110
3.3. Elimination	121
3.4. Determinante und Eigenwerte	142
3.5. Isometrien der Ebene	151

## Literatur

- [Euklid] Euklid, *Die Elemente*.
- [Hilbert] David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*. 13. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1987.
- [Hartshorne] Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer-Verlag, 2000.
- [Agricola–Friedrich] Ilka Agricola und Thomas Friedrich, *Elementargeometrie*. Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht. 4. überarbeitete Auflage, Springer-Verlag, 2015.
- [Jänich] Klaus Jänich, *Lineare Algebra*. Elfte Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

## 1. Hilberts Axiomensystem

In diesem Abschnitt skizzieren wir einen axiomatischen Zugang zur ebenen Geometrie. Alle Sätze sollen aus wenigen, grundlegenden Annahmen, den Axiomen, hergeleitet werden. Die Geometrie wird dadurch auf eine solide Basis gestellt und ihrer innere Struktur transparenter.

Der erste axiomatische Aufbau der Geometrie findet sich in Euklids Elementen [Euklid]. Ein modernes Axiomensystem wurde Ende des neunzehnten Jahrhunderts von Hilbert vorgeschlagen [Hilbert]. Neben den Texten von Euklid und Hilbert orientieren wir uns hier auch an der Darstellung in [Hartshorne].

**1.1. Axiome der Verknüpfung (Inzidenzaxiome).** Sei  $\mathcal{E}$  eine Menge, und  $\mathcal{G}$  eine Menge von Teilmengen von  $\mathcal{E}$ . Die Menge  $\mathcal{E}$  heißt *Ebene*, Elemente von  $\mathcal{E}$  werden *Punkte* genannt, Elemente von  $\mathcal{G}$  als *Geraden* bezeichnet. Wir sagen ein "*Punkt  $A$  liegt auf einer Geraden  $g$* ", falls  $A \in g$  gilt. Wir drücken dies auch durch "*die Gerade trifft den Punkt  $A$* " oder "*die Gerade  $g$  geht durch den Punkt  $A$* " aus.

Punkte und Geraden sollen folgender Axiomengruppe [Hilbert, §2] genügen:

- I1.** Zu zwei verschiedenen Punkten  $A$  und  $B$  gibt es stets genau eine<sup>1</sup> Gerade, die  $A$  und  $B$  enthält.
- I2.** Jede Gerade enthält wenigstens zwei verschiedene Punkte.
- I3.** Es existieren drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

**BEMERKUNG 1.1.1** (Schnitt zweier Geraden). Sind  $g$  und  $h$  zwei Geraden, dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

- (a) Die beiden Geraden schneiden sich nicht, d.h. es gilt  $g \cap h = \emptyset$ .
- (b) Die beiden Geraden schneiden sich in genau einem Punkt, d.h. es existiert ein Punkt  $A$  mit  $g \cap h = \{A\}$ .
- (c) Die beiden Geraden stimmen überein, d.h. es gilt  $g = h$ .

Besteht die Schnittmenge  $g \cap h$  aus zwei oder mehr Punkten, dann folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom I1 schon  $g = h$ . Weitere Fälle sind daher nicht möglich. Aus Axiom I2 folgt, dass sich die drei Fälle gegenseitig ausschließen. Zwei verschiedene Geraden haben also höchstens einen Punkt gemeinsam.

**DEFINITION 1.1.2** (Parallele Geraden). Zwei Geraden  $g$  und  $h$  werden *parallel* genannt, falls  $g = h$  oder  $g \cap h = \emptyset$  gilt. Wir schreiben in diesem Fall  $g \parallel h$ .

**BEMERKUNG 1.1.3.** Für zwei Geraden sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Die beiden Geraden sind nicht parallel.
- (b) Die beiden Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

Dies folgt sofort aus Bemerkung 1.1.1.

**DEFINITION 1.1.4** (Kolineare Punktmengen). Eine Menge von Punkten wird *kolinear* genannt, wenn sie in einer Geraden enthalten ist.

**DEFINITION 1.1.5** (Konkurrente Geradenmengen). Eine Menge von Geraden wird *konkurrent* genannt, wenn diese Geraden einen gemeinsamen Punkt enthalten.

---

<sup>1</sup>d.h. eine und nur eine

BEMERKUNG 1.1.6. Aus den Inzidenzaxiomen lassen sich leicht folgende Aussagen herleiten: (siehe Übungen)

- (a) Durch jeden Punkt gehen wenigstens zwei verschiedene Geraden.
- (b) Es existieren drei nicht konkurrente Geraden.
- (c) Zu jedem Punkt existiert eine Gerade, die diesen Punkt nicht enthält.
- (d) Zu jeder Geraden existiert ein Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt.

DEFINITION 1.1.7. Sind  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte, dann bezeichnen wir die nach Axiom I1 eindeutig bestimmte Gerade durch  $A$  und  $B$  mit  $g(A, B)$ .

BEMERKUNG 1.1.8. Seien  $O, A, B$  drei Punkte mit  $A \neq O$  und  $B \neq O$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a)  $g(O, A) \neq g(O, B)$ .
- (b)  $O$  ist der einzige Schnittpunkt von  $g(O, A)$  und  $g(O, B)$ .
- (c)  $A$  liegt nicht auf  $g(O, B)$ .
- (d)  $B$  liegt nicht auf  $g(O, A)$ .
- (e)  $O, A, B$  sind nicht kollinear.

Dies folgt sofort aus Axiom I1.

**1.2. Axiome der Anordnung.** Es wird eine Anordnungsrelation zwischen je drei Punkten der Ebene postuliert. Formal ist dies eine Teilmenge  $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ . Wir sagen ein Punkt  $B$  liegt zwischen den Punkten  $A$  und  $C$  falls  $(A, B, C) \in \mathcal{Z}$  gilt. Wir drücken dies auch durch die Schreibweise  $A * B * C$  aus.

Diese Anordnungsrelation soll folgender Axiomengruppe [Hilbert, §3] genügen:

- A1.** Wenn ein Punkt  $B$  zwischen einem Punkt  $A$  und einem Punkt  $C$  liegt, dann sind  $A, B, C$  drei verschiedene Punkte einer Geraden, und  $B$  liegt dann auch zwischen  $C$  und  $A$ .<sup>2</sup>
- A2.** Zu zwei verschiedenen Punkten  $A$  und  $B$  gibt es stets wenigstens einen Punkt  $C$ , sodass  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegt.<sup>3</sup>
- A3.** Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.<sup>4</sup>

BEMERKUNG 1.2.1. Gilt  $A * B * C$  dann auch  $g(A, B) = g(B, C) = g(C, A)$ . Dies folgt aus Axiom A1 und der Eindeutigkeitsaussage in Axiom I1.

DEFINITION 1.2.2. Für beliebige Punkte  $A$  und  $B$  definieren wir

$$(AB) := \{X \in \mathcal{E} : A * X * B\} \quad \text{und} \quad [AB] := \{A, B\} \cup (AB).$$



BEMERKUNG 1.2.3. Für beliebige Punkte  $A, B$  und  $C$  gilt:

- (a)  $(AB) \subseteq [AB]$ . Sind  $A$  und  $B$  verschieden, dann gilt auch  $[AB] \subseteq g(A, B)$ .

<sup>2</sup>Inbesondere gilt mit  $A * B * C$  auch  $C * B * A$ .

<sup>3</sup>In anderen Worten: Sind  $A$  und  $B$  verschieden, dann existiert  $C$  mit  $A * B * C$ .

<sup>4</sup>In anderen Worten: Es kann nicht gleichzeitig  $A * B * C$  und  $A * C * B$  gelten.

- (b)  $A$  und  $B$  liegen nicht in  $(AB)$ .
- (c)  $(AB) = (BA)$  und  $[AB] = [BA]$ .
- (d)  $(AA) = \emptyset$  und  $[AA] = \{A\}$ .
- (e) Ist  $B \in (AC)$ , dann  $A \notin [BC]$  und  $C \notin [AB]$ .

Die ersten vier Aussage folgen aus Axiom A1, die letzte aus Axiom A3 sowie (b) und (d).

**DEFINITION 1.2.4 (Strecken).** Unter einer Strecke verstehen wir ein ungeordnetes Paar verschiedener Punkte  $AB$ . Da es nicht auf Reihenfolge der Punkt ankommt gilt  $AB = BA$ . Unter dem *Inneren der Strecke*  $AB$  verstehen wir die Punktmenge  $(AB)$ . Unter der *abgeschlossenen Strecke* zwischen  $A$  und  $B$  verstehen wir die Punktmenge  $[AB]$ . Die beiden Punkte  $A$  und  $B$  werden *End- oder Randpunkte der Strecke*  $AB$  genannt.

Wenn immer wir von einer Strecke  $AB$  sprechen wird stets vorausgesetzt, dass  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte sind. Die Mengen  $(AA) = \emptyset$  und  $[AA] = \{A\}$  werden zur Abgrenzung als *degenerierte Strecken* bezeichnet.

**DEFINITION 1.2.5 (Dreieck).** Unter einem Dreieck verstehen wir ein Tripel von nicht kollinearen Punkten  $ABC$ . Die Strecken  $AB$ ,  $BC$  und  $CA$  werden als *Seiten des Dreiecks*  $ABC$  bezeichnet. Die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  werden *Eckpunkte* des Dreiecks genannt.

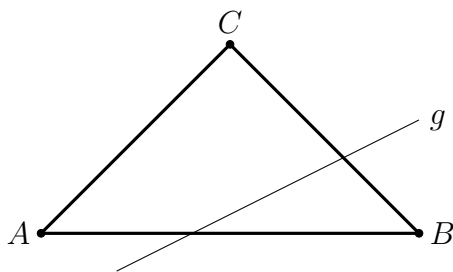
**BEMERKUNG 1.2.6.** In jedem Dreieck  $ABC$  gilt:

- (a) Die Eckpunkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sind paarweise verschieden.
- (b)  $(AB) \cap (BC) = \emptyset$ ,  $(BC) \cap (CA) = \emptyset$ , und  $(CA) \cap (AB) = \emptyset$ .
- (c)  $[AB] \cap [BC] = \{B\}$ ,  $[BC] \cap [CA] = \{C\}$ , und  $[CA] \cap [AB] = \{A\}$ .

Die erste Aussage folgt sofort aus Axiom I1, die anderen beiden aus den Bemerkungen 1.1.8 und 1.2.3.

Es wird nun noch folgendes vierte Anordnungsaxiom [**Hilbert**, §3] postuliert:

**A4.** (Pasch) Sei  $ABC$  ein Dreieck, und sei  $g$  eine Gerade, die keinen der Eckpunkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  enthält. Wenn in dieser Situation  $g$  die Seite  $(AB)$  trifft, dann muss  $g$  auch die Seite  $(BC)$  oder die Seite  $(CA)$  treffen.

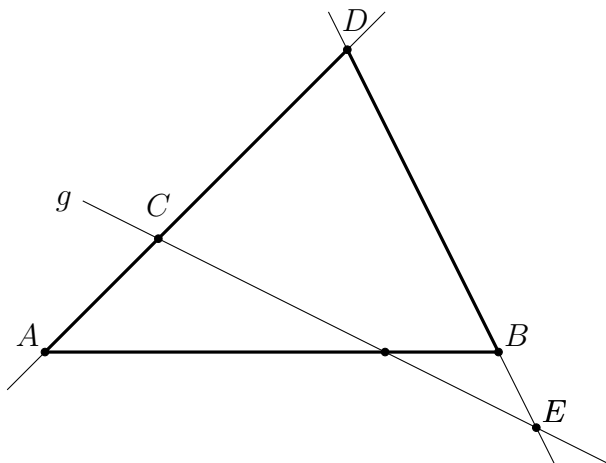


Als erste Folgerung aus den Axiomen zeigen wir, dass jede Strecke innere Punkte besitzt:

**PROPOSITION 1.2.7.** *Zu zwei verschiedenen Punkten existiert stets wenigstens ein Punkt, der zwischen den beiden liegt.*

**BEWEIS.** Wir folgen dem Beweis in [**Hilbert**, Satz 3 in §4]. Seien  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte. Nach Bemerkung 1.1.6(d) existiert ein Punkt  $C$ , der nicht auf  $g(A, B)$  liegt. Nach Axiom A2 existiert ein Punkt  $D$ , sodass  $A * C * D$ . Nach Axiom A1 sind  $A$ ,  $C$ ,

$D$  drei verschiedene Punkte auf der Geraden  $g(A, C) = g(A, D) = g(C, D)$ . Da  $C$  nicht auf  $g(A, B)$  liegt, bildet  $ADB$  ein Dreieck, siehe Bemerkung 1.1.8. Insbesondere sind  $D$  und  $B$  verschieden, nach Axiom A2 existiert daher ein Punkt  $E$ , sodass  $D * B * E$ . Nach Axiom A1 sind  $D, B, E$  drei verschiedene Punkte auf der Geraden  $g(D, B) = g(D, E) = g(B, E)$ . Da  $ADB$  ein Dreieck bildet, muss auch  $CDE$  ein Dreieck sein, siehe Bemerkung 1.1.8.

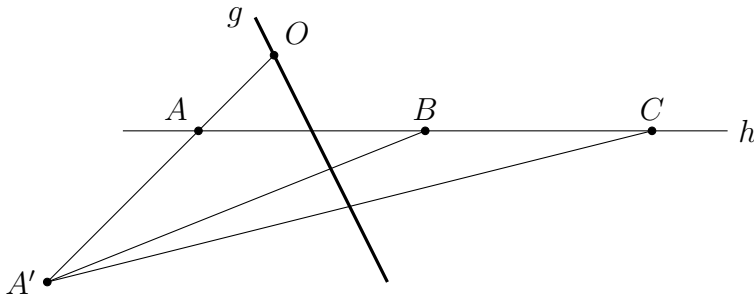


Wir wollen nun Axiom A4 auf das Dreieck  $ADB$  und die Gerade  $g := g(C, E)$  anwenden. Nach Konstruktion schneidet  $g$  die Seite  $(AD)$  im Punkt  $C$ . Da  $CDE$  ein Dreieck bildet, ist dies der einzige Schnittpunkt von  $g$  und  $g(A, D)$ . Insbesondere liegt  $A$  nicht auf  $g$ . Da  $CDE$  ein Dreieck bildet, ist  $E$  der einzige Schnittpunkt von  $g$  und  $g(D, E)$ . Wir schließen  $g \cap [DB] = \emptyset$ , denn  $[DB] \subseteq g(D, E)$  aber  $E \notin [DB]$  nach Bemerkung 1.2.3(e). Aus Axiom A4 folgt nun, dass  $g$  die Seite  $(AB)$  schneiden muss. Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt zwischen  $A$  und  $B$ .  $\square$

Wir überlegen uns nun, dass Paschs Axiom auch für degenerierte Dreiecke gilt.

**PROPOSITION 1.2.8 (Pasch).** *Seien  $A, B, C$  drei beliebige Punkte und  $g$  eine Gerade. Gilt in dieser Situation  $g \cap (AB) \neq \emptyset$  und  $g \cap [BC] = \emptyset$ , dann auch  $g \cap (CA) \neq \emptyset$ .*

**BEWEIS.** O.B.d.A. sei  $B \neq C$ . Aus den Voraussetzungen folgt sofort  $A \neq B$  und  $A \neq C$ . Offensichtlich liegen  $B$  und  $C$  nicht auf  $g$ . Da  $g$  die Strecke  $(AB)$  schneidet, kann auch  $A$  nicht auf  $g$  liegen, denn andernfalls müsste nach Axiom I1 die Gerade  $g$  mit  $g(A, B)$  übereinstimmen, was  $B \notin g$  widerspräche. Sind  $A, B, C$  nicht kollinear, dann folgt die Proposition also aus Axiom A4. O.B.d.A. seien daher  $A, B, C$  drei verschiedene Punkte auf einer Geraden  $h$ .

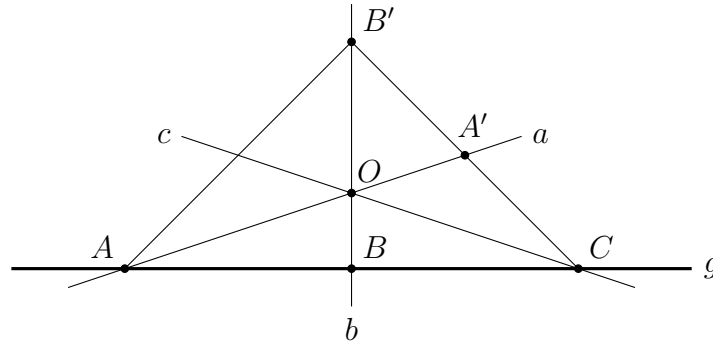


Da  $B \in h \setminus g$  sind die Geraden  $g$  und  $h$  verschieden, also existiert auch ein Punkt  $O \in g \setminus h$ . Insbesondere ist  $O \neq A$ , also existiert nach Axiom A2 ein Punkt  $A'$  mit  $O * A * A'$ . Beachte, dass  $A'$  weder auf  $g$  noch auf  $h$  liegt, denn  $A \notin g$  und  $O \notin h$ . Die beiden Geraden  $g$  und  $g(A, A') = g(A, O)$  schneiden sich nur im Punkt  $O$ . Wir schließen  $g \cap [AA'] = \emptyset$ , denn  $[AA'] \subseteq g(A, A')$  und nach Konstruktion  $O \notin [AA']$ , siehe Bemerkung 1.2.3(e).

Wenden wir Axiom A4 auf das Dreieck  $AA'B$  an, erhalten wir  $g \cap (A'B) \neq \emptyset$ . Erneutes Anwenden von Axiom A4 auf das Dreieck  $A'BC$  liefert  $g \cap (A'C) \neq \emptyset$ . Wenden wir Axiom A4 schließlich auf das Dreieck  $AA'C$  an, so folgt  $g \cap (CA) \neq \emptyset$ .  $\square$

**PROPOSITION 1.2.9.** *Unter drei paarweise verschiedenen Punkten einer Gerade gibt es stets wenigstens einen, der zwischen den anderen beiden liegt.*

**BEWEIS.** Wir folgen dem Beweis in [Hilbert, Satz 4 in §4]. Seien  $A, B$  und  $C$  drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden  $g$ , sodass  $A \notin (BC)$  und  $C \notin (AB)$ . Es ist zu zeigen, dass  $B$  auf  $(AC)$  liegt. Offensichtlich gilt  $g = g(A, B) = g(A, C) = g(B, C)$ .



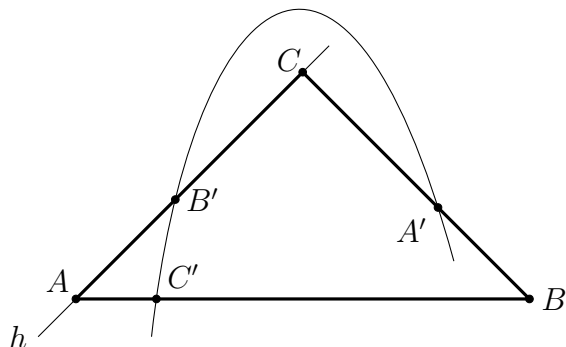
Sei  $O$  ein Punkt, der nicht auf  $g$  liegt. Nach Axiom A2 existiert ein Punkt  $B'$  mit  $B * O * B'$ . Wir bezeichnen die Gerade durch diese drei Punkte mit  $b := g(B, O) = g(B, B') = g(O, B')$ , siehe Bemerkung 1.2.1. Weiters betrachten wir die Geraden  $a := g(A, O)$  und  $c := g(C, O)$ . Da  $A$  der einzige Schnittpunkt von  $a$  und  $g$  ist, siehe Bemerkung 1.1.8, folgt  $a \cap [BC] = \emptyset$ , denn  $[BC] \subseteq g$  aber nach Voraussetzung  $A \notin [BC]$ . Nach Konstruktion wird  $(BB')$  von  $a$  im Punkt  $O$  getroffen. Wenden wir Proposition 1.2.8 auf die Punkte  $B, B', C$  und die Gerade  $a$  an, erhalten wir einen Punkt  $A' \in a \cap (B'C)$ . Analog gilt  $g \cap [AB] = \emptyset$  und daher  $c \cap (AB') \neq \emptyset$ .

Da  $C$  der einzige Schnittpunkt von  $c$  und  $g(B', C)$  ist, folgt  $c \cap [A'B'] = \emptyset$ , denn  $[A'B'] \subseteq g(B', C)$  aber  $C \notin [A'B']$ . Wenden wir Proposition 1.2.8 auf die Punkte  $A, A', B'$  und die Gerade  $c$  an, erhalten wir  $c \cap (AA') \neq \emptyset$ . Da  $O$  der einzige Schnittpunkt von  $a = g(A, A')$  und  $c$  ist, muss  $O \in (AA')$  gelten. Somit ist auch  $b \cap (AA') \neq \emptyset$ . Da  $B'$  der einzige Schnittpunkt von  $b$  und  $g(B', C)$  ist, folgt  $b \cap [A'C] = \emptyset$ , denn  $[A'C] \subseteq g(B', C)$  aber  $B' \notin [A'C]$ . Wenden wir Proposition 1.2.8 auf die Punkte  $A, A', C$  und die Gerade  $b$  an, erhalten wir  $b \cap (AC) \neq \emptyset$ . Da  $B$  der einzige Schnittpunkt von  $b$  und  $g(A, C)$  ist, muss also  $B$  auf  $(AC)$  liegen.  $\square$

**BEMERKUNG 1.2.10.** Sind  $A, B, C$  drei paarweise verschiedene Punkte einer Geraden, dann tritt einer und nur einer der folgenden Fälle ein: Entweder  $A * B * C$ , oder  $B * C * A$ , oder  $C * A * B$ . Dies folgt aus Proposition 1.2.9 und Axiom A3.

**PROPOSITION 1.2.11.** *Eine Gerade kann nicht alle drei Seiten eines Dreiecks im Inneren treffen.*

BEWEIS. Wir folgen dem Beweis in [Hilbert, Supplement I.1]. Sei  $ABC$  ein Dreieck und  $g$  eine Gerade. Wir nehmen indirekt an,  $g$  schneidet alle drei Seiten im Inneren. Es existieren daher Punkte  $A' \in g \cap (BC)$ ,  $B' \in g \cap (CA)$  und  $C' \in g \cap (AB)$ . Da  $ABC$  ein Dreieck bildet, müssen die Punkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  paarweise verschieden sein, siehe Bemerkung 1.2.6(b). Da sie alle auf einer Geraden liegen, muss nach Proposition 1.2.9 einer von ihnen zwischen den anderen beiden liegen. O.B.d.A. liege  $B'$  zwischen  $A'$  und  $C'$ .

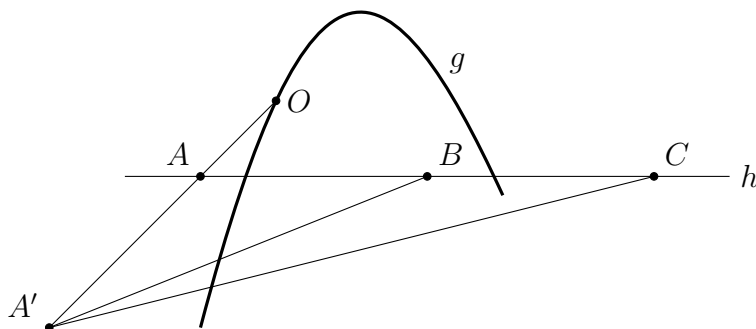


Wir wollen nun Axiom A4 auf das Dreieck  $A'BC'$  und die Gerade  $h := g(A, C)$  anwenden. Da  $A$  der einzige Schnittpunkt von  $h$  und  $g(A, B)$  ist, folgt  $h \cap [BC'] = \emptyset$ , denn  $[BC'] \subseteq g(A, B)$  aber  $A \notin [BC']$ , siehe Bemerkung 1.2.3(e). Analog sehen wir  $h \cap [BA'] = \emptyset$ . Andererseits wird  $(A'C')$  von  $h$  im Punkt  $B'$  getroffen, und wir erhalten einen Widerspruch zu Axiom A4. Somit kann  $g$  nicht alle drei Seiten im Inneren treffen.  $\square$

Wir benötigen auch folgende Version von Proposition 1.2.11 für degenerierte Dreiecke

PROPOSITION 1.2.12. *Seien  $A, B, C$  drei beliebige Punkte. Trifft eine Gerade  $g$  sowohl  $(AB)$ ,  $(BC)$  und  $(CA)$ , dann müssen schon alle drei Punkte  $A, B, C$  auf  $g$  liegen.*

BEWEIS. Nach Proposition 1.2.11 dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass diese drei Punkte auf einer Geraden  $h$  liegen. Nach Voraussetzung sind  $A, B, C$  paarweise verschieden. Wir nehmen indirekt an, einer der Punkte liege nicht auf  $g$ . Dann folgt sofort, dass keiner der Punkte  $A, B, C$  auf  $g$  liegen kann.

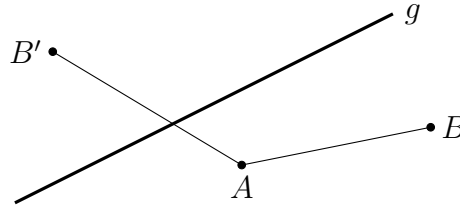


Wir gehen nun wie im Beweis von Proposition 1.2.9 vor. Da  $A \in h \setminus g$ , sind die Geraden  $g$  und  $h$  verschieden, es existiert daher auch in Punkt  $O \in g \setminus h$ . Insbesondere ist  $A \neq O$ , nach Axiom A2 existiert daher ein Punkt  $A'$  mit  $O * A * A'$ . Beachte, dass  $A'$  weder auf  $g$  noch auf  $h$  liegt. Da  $O$  der einzige Schnittpunkt von  $g$  und  $g(O, A)$  ist, folgt  $g \cap [AA'] = \emptyset$ , denn  $[AA'] \subseteq g(O, A)$ , aber nach Konstruktion ist  $O \notin [AA']$ .



Wenden wir Axiom A4 auf das Dreieck  $AA'B$  und die Gerade  $g$  an, folgt  $g \cap (A'B) \neq \emptyset$ . Wenden wir Axiom A4 auf das Dreieck  $AA'C$  und die Gerade  $g$  an, folgt  $g \cap (A'C) \neq \emptyset$ . Also trifft  $g$  alle drei Seiten des Dreiecks  $A'BC$  im Inneren, ein Widerspruch zu Proposition 1.2.11. Somit müssen  $A, B, C$  alle auf  $g$  liegen.  $\square$

DEFINITION 1.2.13 ([Hilbert, §4]). Sei  $g$  eine Gerade. Weiters seien  $A$  und  $B$  zwei Punkte, die nicht auf  $g$  liegen. Wir sagen  $A$  und  $B$  liegen auf der selben Seite von  $g$ , wenn  $g \cap (AB) = \emptyset$ .



LEMMA 1.2.14. Auf der selben Seite einer Geraden  $g$  zu liegen ist eine Äquivalenzrelation auf ihrem Komplement  $\mathcal{E} \setminus g$  mit genau zwei Äquivalenzklassen.

BEWEIS. Die Reflexivität der Relation folgt aus  $(AA) = \emptyset$ , ihre Symmetrie folgt aus  $(AB) = (BA)$ , und die Transitivität folgt aus Proposition 1.2.8.

Sei  $A \notin g$  und  $X \in g$ . Nach Axiom A2 existiert  $B$  mit  $A * X * B$ . Es folgt  $B \notin g$ . Nach Konstruktion gilt  $X \in g \cap (AB)$ , also  $g \cap (AB) \neq \emptyset$ . Somit liegen  $A$  und  $B$  nicht auf der selben Seite von  $g$  und repräsentieren daher unterschiedliche Äquivalenzklassen. Dies zeigt, dass wenigstens zwei Äquivalenzklassen existieren.

Um zu zeigen, dass es nicht mehr als zwei Äquivalenzklassen geben kann, betrachten wir drei Punkte  $A, B, C$ , die nicht auf  $g$  liegen. Wir nehmen an,  $A$  und  $B$  liegen nicht auf der selben Seite von  $g$ , und wir nehmen auch an, dass  $B$  und  $C$  nicht auf der selben Seite von  $g$  liegen. Es genügt zu zeigen, dass dann  $A$  und  $C$  auf der selben Seite von  $g$  liegen. Nach Voraussetzung gilt  $g \cap (AB) \neq \emptyset$  und  $g \cap (BC) \neq \emptyset$ . Mit Proposition 1.2.12 folgt  $g \cap (AC) = \emptyset$ , also liegen  $A$  und  $C$  tatsächlich auf der selben Seite von  $g$ .  $\square$

DEFINITION 1.2.15 (Halbebenen). Unter einer Seite einer Geraden  $g$  verstehen wir eine Äquivalenzklasse der zuvor betrachteten Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{E} \setminus g$ , vgl. Lemma 1.2.14. Jede Punktmenge dieser Form wird als offene Halbebene bezeichnet.

BEMERKUNG 1.2.16 (Ebenenteilung). Sei  $g$  eine Gerade, und bezeichnen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  die beiden Seiten (Äquivalenzklassen) von  $g$ . Es gilt daher

$$\mathcal{E} \setminus g = \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \quad \text{und} \quad \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \emptyset.$$

Das Komplement der Geraden  $g$  zerfällt daher in zwei disjunkte (offene) Halbebenen, die beiden Seiten von  $g$ .

So wie eine Gerade die Ebene in zwei Halbebenen zerlegt, zerlegt auch ein Punkt auf einer Geraden die Gerade in zwei Halbgeraden. Wir gehen analog vor:

DEFINITION 1.2.17 ([Hilbert, §4]). Sei  $O$  ein Punkt auf einer Geraden  $h$  und seien  $A, B$  zwei Punkte in  $h \setminus \{O\}$ . Wir sagen  $A$  und  $B$  liegen auf der selben Seite von  $O$  in  $h$ , wenn  $O \notin (AB)$ .

BEMERKUNG 1.2.18. Seien  $g$  und  $h$  zwei verschiedene Geraden, die sich im Punkt  $O$  schneiden. Weiters seien  $A$  und  $B$  zwei Punkte auf  $h \setminus \{O\}$ . In dieser Situation sind äquivalent:

- (a)  $A$  und  $B$  liegen auf der selben Seite von  $g$ .
- (b)  $A$  und  $B$  liegen auf der selben Seite von  $O$  in  $h$ .

Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) folgt aus  $O \in g$ . Die umgekehrte Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus  $(AB) \subseteq h$  und der Tatsache, dass  $O$  der einzige Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  ist.

LEMMA 1.2.19. *Auf der selben Seite eines Punktes  $O$  in einer Geraden  $h$  zu liegen, ist eine Äquivalenzrelation auf dem Komplement  $h \setminus \{O\}$  mit genau zwei Äquivalenzklassen.*

BEWEIS. Wir wählen eine von  $h$  verschiedene Gerade  $g$  so, dass  $g \cap h = \{O\}$ . Aus Lemma 1.2.14 und Bemerkung 1.2.18 folgt sofort, dass “auf der selben Seite von  $O$  zu liegen” eine Äquivalenzrelation auf  $h \setminus \{O\}$  ist, die höchstens zwei Äquivalenzklassen besitzt.

Um einzusehen, dass es wenigstens zwei Äquivalenzklassen gibt, gehen wir wie im Beweis von Lemma 1.2.14 vor. Nach Axiom I2 existiert ein Punkt  $A \in h \setminus \{O\}$ , und nach Axiom A2 ein Punkt  $B$ , sodass  $A * O * B$ . Aus Axiom A1 folgt  $B \in h \setminus \{O\}$ , und nach Konstruktion gilt  $O \in (AB)$ . Also liegen  $A$  und  $B$  nicht auf der selben Seite von  $O$ , und repräsentieren daher verschiedene Äquivalenzklassen.  $\square$

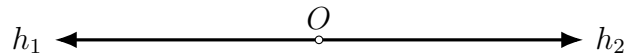
DEFINITION 1.2.20 (Halbgeraden). Unter einer *Seite eines Punktes  $O$*  auf einer Geraden  $h$  verstehen wir eine Äquivalenzklasse der zuvor betrachteten Äquivalenzrelation auf  $h \setminus \{O\}$ , vgl. Lemma 1.2.19. Jede Punktmenge dieser Form wird als *offene Halbgerade* oder als *offener Halbstrahl* bezeichnet. Der Punkt  $O$  als *Ausgangspunkt* der beiden Halbstrahlen bezeichnet, wir sagen auch die beiden Halbstrahlen gehen vom Punkt  $O$  aus.

BEMERKUNG 1.2.21 (Trägergerade). Aus Axiom A2 und Bemerkung 1.2.3(e) folgt sofort, dass jeder Halbstrahl wenigstens zwei verschiedene Punkte enthält. Jeder Halbstrahl ist daher in einer eindeutig bestimmten Geraden enthalten, die als *Trägergerade des Halbstrahls* bezeichnet wird. Es lässt sich auch leicht zeigen, dass ein Halbstrahl nur einen Ausgangspunkt haben kann.

BEMERKUNG 1.2.22 (Geradenteilung). Sei  $O$  ein Punkt auf einer Geraden  $h$ . Weiters bezeichnen  $h_1$  und  $h_2$  die beiden Seiten (Äquivalenzklassen) von  $O$  in  $h$ . Es gilt daher

$$h \setminus \{O\} = h_1 \cup h_2 \quad \text{und} \quad h_1 \cap h_2 = \emptyset.$$

Der Punkt  $O$  zerlegt die Gerade  $h$  daher in zwei disjunkte (offene) Halbgeraden, die beiden Seiten von  $O$  in  $h$ .



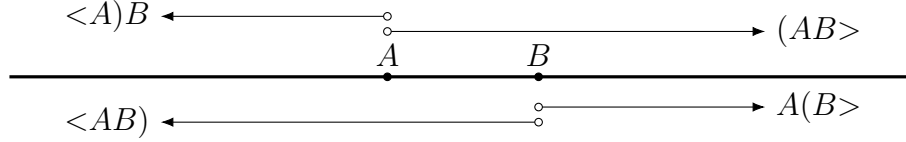
DEFINITION 1.2.23. Seien  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte. Wir bezeichnen die Seite von  $A$  in  $g(A, B)$ , die  $B$  enthält mit  $(AB>$  oder  $<BA)$ . Es gilt daher

$$(AB> = \{X \in g(A, B) : A \notin [XB]\} = <BA).$$

Die andere Seite, die  $B$  nicht enthält, bezeichnen wir mit  $B(A>$  oder  $<A)B$ . Es gilt daher

$$<A)B = \{X \in g(A, B) : A \in (XB)\} = \{X \in \mathcal{E} : X * A * B\} = B(A>.$$

Beachte, dass diese Halbstrahlen nur für verschiedene Punkte  $A$  und  $B$  definiert sind.



BEMERKUNG 1.2.24. Ist  $h$  ein von  $A$  ausgehender Halbstrahl und  $B \in h$ , dann gilt  $h = (AB>$ . Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen.

BEMERKUNG 1.2.25. Für zwei verschiedene Punkte  $A$  und  $B$  gilt stets

$$\langle AB \rangle \cap (AB> = (AB) \quad \text{und} \quad \langle AB \rangle \cup (AB> = g(A, B).$$

Die Inklusion  $\supseteq$  auf der linken Seite folgt aus Bemerkung 1.2.3(e). Die umgekehrte Inklusion  $\subseteq$  auf der linken Seite folgt aus Proposition 1.2.9. Nach Bemerkung 1.2.3(e) gilt auch  $(AB> \supseteq A(B>$ , woraus leicht die zweite Identität oben folgt. Schneiden wir  $(AB>$  mit der disjunkten Zerlegung  $g(A, B) \setminus \{B\} = \langle AB \rangle \sqcup A(B>$  aus Bemerkung 1.2.22 erhalten wir daher

$$(AB> \setminus \{B\} = (AB) \cup A(B> \quad \text{und} \quad (AB) \cap A(B> = \emptyset.$$

Durch Herausnehmen eines Punktes zerfällt ein Halbstrahl daher in eine Strecke und einen dazu disjunkten Halbstrahl.

BEMERKUNG 1.2.26. Sei  $A$  ein Punkt auf einer Geraden  $g$ , und  $h$  ein von  $A$  ausgehender Halbstrahl, der nicht in  $g$  liegt. Dann muss  $h$  zur Gänze in einer der beiden Seiten von  $g$  (offenen Halbebenen) liegen. Dies folgt sofort aus Bemerkung 1.2.18.

BEMERKUNG 1.2.27. Sei  $A$  ein Punkt auf einer Geraden  $g$ , sei  $\varepsilon$  eine Seite von  $g$  und  $B \in \varepsilon$ . Dann gilt schon  $(AB) \subseteq \varepsilon$ . Dies folgt aus den beiden Bemerkungen 1.2.25 und 1.2.26.

LEMMA 1.2.28 ([Hilbert, Satz 5 in §4]). Für beliebige Punkte  $A, B, C, D$  gilt:

- (a) Aus  $A * B * C$  und  $B * C * D$  folgt  $A * B * D$  und  $A * C * D$  und insbesondere  $A \neq D$ .
- (b) Aus  $A * B * D$  und  $B * C * D$  folgt  $A * B * C$  und  $A * C * D$  und insbesondere  $A \neq C$ .

BEWEIS. Gilt  $A * B * C$  und  $B * C * D$ , dann liegen alle vier Punkte auf einer Geraden  $h$ , siehe Axiom A1. Da  $B \in (AC)$  liegen  $A$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten von  $B$  in  $h$ . Aus der zweiten Voraussetzung folgt  $B \notin [CD]$ , siehe Bemerkung 1.2.3(e), also liegen  $C$  und  $D$  auf der selben Seite von  $B$ . Aus der Transitivität der Relation in Lemma 1.2.19 folgt daher, dass auch  $A$  und  $D$  auf verschiedenen Seiten von  $B$  liegen, d.h.  $B \in (AD)$ , und daher  $A * B * D$ . Nach Axiom A1 müssen  $A$  und  $D$  verschieden sein. Analog, oder durch Vertauschen der Reihenfolge der Punkte  $A, B, C, D$ , erhalten wir auch  $A * C * D$ . Dies zeigt (a).

Sei nun  $A * B * D$  und  $B * C * D$ . Wieder müssen alle vier Punkte auf einer Geraden  $h$  liegen. Die erste Voraussetzung besagt, dass  $A$  und  $D$  auf verschiedenen Seiten von  $B$  in  $h$  liegen. Wie zuvor, erhalten wir aus der zweiten Voraussetzung, dass  $C$  und  $D$  auf der selben Seite von  $B$  liegen. Mit der Transitivität folgt, dass  $A$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten von  $B$  liegen, d.h.  $B \in (AC)$ , und daher  $A * B * C$ . Dies zeigt den ersten Teil in (b). Daraus erhalten wir auch, dass  $B$  und  $C$  auf der selben Seite von  $A$  liegen. Wegen  $A * B * D$  liegen auch  $B$  und  $D$  auf der selben Seite von  $A$ . Mit der Transitivität schließen wir, dass  $C$  und  $D$  auf der selben Seite von  $A$  liegen, also  $A \notin (CD)$ . Aus den beiden Voraussetzungen folgt, dass  $A$  und  $B$  auf der selben Seite von  $D$  liegen, und auch  $B$  und  $C$  auf der selben Seite von  $D$  liegen. Somit liegen auch  $A$  und  $C$  auf der selben Seite von  $D$ , also  $D \notin (AC)$ . Mit Proposition 1.2.9 folgt nun  $A * C * D$ .  $\square$

BEMERKUNG 1.2.29. Ist  $B \in (AC)$ , dann gilt

$$\langle AB \rangle \cap (AC) = (AB) \quad \text{und} \quad (AC) \cap (BC \rangle = (BC). \quad (1)$$

Die Inklusion  $(BC) \subseteq (BC \rangle$  haben wir bereits in Bemerkung 1.2.25 festgehalten. Die Inklusion  $(BC) \subseteq (AC)$  folgt aus der zweiten Aussage in Lemma 1.2.28(b). Somit  $(BC) \subseteq (AC) \cap (BC \rangle$ . Ist umgekehrt  $X \in (BC \rangle$ , dann liegen  $A$  und  $X$  auf verschiedenen Seiten  $B$ , also  $A * B * X$ . Gilt darüber hinaus  $X \in (AC)$ , so erhalten wir  $X \in (BC)$ , wieder aufgrund der zweiten Aussage in Lemma 1.2.28(b). Dies zeigt die umgekehrte Inklusion  $(BC) \supseteq (AC) \cap (BC \rangle$  und somit die Gleichung auf der rechten Seite in (1). Die andere Identität in (1) folgt analog, oder durch Vertauschen von  $A$  und  $C$ . Schneiden wir  $(AC)$  mit der disjunkten Zerlegung  $g(A, C) \setminus \{B\} = \langle AB \rangle \sqcup (BC \rangle$  aus Bemerkung 1.2.22, erhalten wir mit (1) nun

$$(AC) \setminus \{B\} = (AB) \cup (BC) \quad \text{und} \quad (AB) \cap (BC) = \emptyset. \quad (2)$$

Durch Herausnehmen eines Punktes zerfällt eine Strecke daher in zwei disjunkte Teilstrecken.

BEMERKUNG 1.2.30. Für beliebige Punkte  $A, B, X$ , und  $Y$  gilt:

- (a) Sind  $X, Y \in (AB)$ , dann auch  $[XY] \subseteq (AB)$ .
- (b) Sind  $X, Y \in [AB]$ , dann auch  $[XY] \subseteq [AB]$ .

Um die erste Behauptung einzusehen seien  $X$  und  $Y$  o.B.d.A. verschieden. Nach (2) in der vorangehenden Bemerkung muss  $Y$  in  $(AX)$  oder  $(XB)$  liegen. O.B.d.A. sei  $Y \in (XB)$ . Erneutes Anwenden von (2) liefert  $(XY) \subseteq (XB)$  und  $(XB) \subseteq (AB)$ , woraus sofort (a) folgt. Die zweite Behauptung lässt sich nun durch eine einfache Fallunterscheidung auf den Fall  $X = A$  und  $Y \in (AB)$  reduzieren, der wiederum aus (2) folgt.

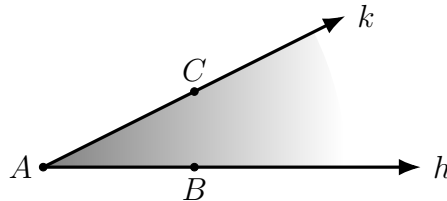
BEMERKUNG 1.2.31. Sind  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte, dann enthält die Strecke  $AB$  unendlich viele Punkte. (siehe Übungen)

DEFINITION 1.2.32. Sind  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte, dann werden

$$[AB \rangle := \{A\} \cup (AB \rangle \quad \text{und} \quad B[A \rangle := \{A\} \cup B(A \rangle$$

*abgeschlossene Halbstrahlen* oder *abgeschlossene Halbgeraden* genannt.

DEFINITION 1.2.33 (Winkel). Unter einem *Winkel* verstehen wir ein ungeordnetes Paar verschiedener Halbstrahlen, die vom selben Punkt ausgehen und nicht in einer Geraden liegen. Sind  $h$  und  $k$  zwei solche Halbstrahlen, dann schreiben wir  $\angle(h, k)$  für den aufgespannten Winkel. Die beiden Halbstrahlen werden *Schenkel* des Winkels genannt und ihr gemeinsamer Ausgangspunkt als *Scheitel* des Winkels bezeichnet. Da es uns nicht auf die Reihenfolge ankommt gilt  $\angle(h, k) = \angle(k, h)$ . Sind  $A, B, C$  drei nicht kollineare Punkte, dann gehen die beiden Halbstrahlen  $(AB \rangle$  und  $(AC \rangle$  vom gleichen Punkt  $A$  aus und liegen nicht in einer Gerade, und wir schreiben  $\angle CAB$  für den von ihnen aufgespannten Winkel.



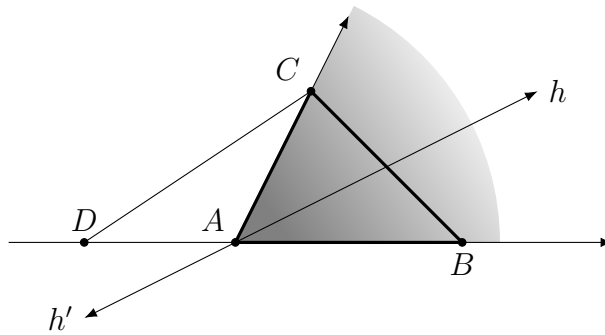
BEMERKUNG 1.2.34. Eine Orientierung ist in unserem Winkelkonzept nicht enthalten, denn keiner der Schenkel ist ausgezeichnet. Auch betrachten wir hier keine gestreckten oder überstumpfe Winkel.

DEFINITION 1.2.35 (Innere eines Winkels). Sei  $\angle(h, k)$  ein Winkel. Es bezeichne  $\varepsilon_k$  die Seite der Trägergeraden von  $h$  (Halbebene), die  $k$  enthält, siehe Bemerkung 1.2.26, und es bezeichne  $\varepsilon_h$  die Seite der Trägergeraden von  $k$ , die  $h$  enthält. Unter dem Inneren des Winkels  $\angle(h, k)$  verstehen wir die Teilmenge  $\varepsilon_h \cap \varepsilon_k$ .

BEMERKUNG 1.2.36. Das Innere des Winkels  $\angle CAB$  besteht daher aus allen Punkten, die auf der selben Seite von  $g(A, B)$  wie  $C$  liegen und die auf der selben Seite von  $g(C, A)$  wie  $B$  liegen.

BEMERKUNG 1.2.37. Ist  $ABC$  ein Dreieck, dann liegt  $(BC)$  zur Gänze im Inneren des Winkels  $\angle CAB$ . Dies folgt aus Bemerkung 1.2.27.

PROPOSITION 1.2.38. Ist  $ABC$  ein Dreieck, dann trifft jeder Halbstrahl, der von  $A$  ausgeht und im Inneren des Winkels  $\angle CAB$  liegt, die Seite  $(BC)$ .



BEWEIS. Wir folgen dem Beweis in [Hartshorne, Proposition 7.3]. Sei  $h$  ein Halbstrahl, der von  $A$  ausgeht und im Inneren des Winkels  $\angle CAB$  liegt. Sei  $g$  die Trägergerade dieses Halbstrahls, und bezeichne  $h'$  die andere Seite von  $A$  auf  $g$ . Es gilt daher  $g = h' \cup \{A\} \cup h$ . Nach Axiom A2 existiert ein Punkt  $D$  mit  $D * A * B$ . Da  $C$  nicht auf  $g(D, B)$  liegt, ist auch  $BCD$  ein Dreieck. Wir wollen Axiom A4 auf das Dreieck  $BCD$  und die Gerade  $g$  anwenden. Beachte, dass keiner der Eckpunkte  $B, C, D$  auf  $g$  liegt. Nach Konstruktion trifft  $g$  die Seite  $(DB)$  im Punkt  $A$ . Wir zeigen nun

$$h' \cap (BC) = \emptyset, \quad h' \cap (CD) = \emptyset \quad \text{und} \quad h \cap (CD) = \emptyset. \quad (3)$$

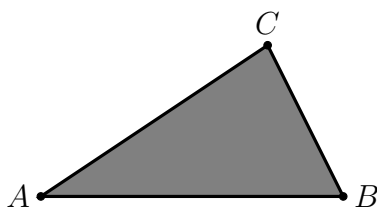
Da  $h$  und  $C$  auf der selben Seite von  $g(A, B)$  liegen, liegen  $h'$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten von  $g(A, B)$ , siehe Bemerkung 1.2.18. Somit kann  $h'$  weder das Innere des Winkels  $\angle CAB$  noch das Innere des Winkels  $\angle CAD$  treffen. Mit Bemerkung 1.2.37 folgen die ersten beiden Identitäten in (3). Mit Bemerkung 1.2.18 sehen wir, dass  $B$  und  $D$  auf verschiedenen Seiten von  $g(A, C)$  liegen. Da  $h$  und  $B$  auf der selben Seite von  $g(A, C)$  liegen, liegen  $h$  und  $D$  auf verschiedenen Seiten dieser Geraden. Insbesondere trifft  $h$  das Innere des Winkels  $\angle CAD$  nicht. Die dritte Identität in (3) folgt nun wie zuvor mit Bemerkung 1.2.37.

Da auch  $A$  nicht auf  $(CD)$  liegt, folgt aus der zweiten und dritten Gleichung in (3), dass die Gerade  $g$  die Seite  $(CD)$  nicht trifft. Nach Axiom A4 muss sie daher die Seite

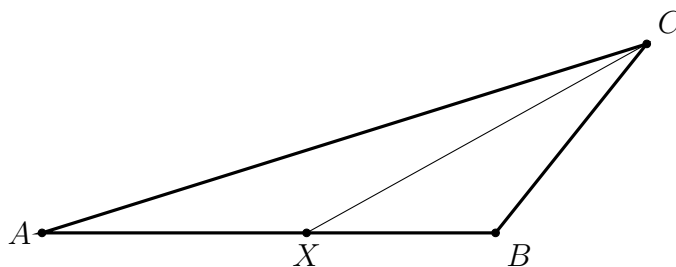
$(BC)$  treffen. Da  $A$  nicht auf  $(BC)$  liegt, folgt aus der ersten Gleichung in (3) nun, dass der Halbstrahl  $h$  die Seite  $(BC)$  treffen muss.  $\square$

DEFINITION 1.2.39 (Innere eines Dreiecks). Unter dem *Inneren* eines Dreiecks  $ABC$  verstehen wir die Menge aller Punkte, die gleichzeitig auf der selben Seite von  $g(A, B)$  wie  $C$  liegen, und auf der selben Seite von  $g(B, C)$  wie  $A$  liegen, und auf der selben Seite von  $g(C, A)$  wie  $B$  liegen.

BEMERKUNG 1.2.40. Das Innere eines Dreiecks  $ABC$  kann in anderen Worten wie folgt beschrieben werden: Bezeichne  $\varepsilon_A$  die Seite von  $g(B, C)$ , die  $A$  enthält;  $\varepsilon_B$  die Seite von  $g(C, A)$ , die  $B$  enthält; und  $\varepsilon_C$  die Seite von  $g(A, B)$ , die  $C$  enthält. Dann stimmt der Durchschnitt dieser drei Halbebenen,  $\varepsilon_A \cap \varepsilon_B \cap \varepsilon_C$ , mit dem Inneren des Dreiecks  $ABC$  überein.



BEMERKUNG 1.2.41. Ist  $ABC$  ein Dreieck und  $X \in (AB)$ , dann liegt die Strecke  $(XC)$  zur Gänze im Inneren des Dreiecks  $ABC$ . Nach Bemerkung 1.2.37 liegt  $(XC)$  nämlich im Inneren des Winkels  $\angle CAB$  und auch im Inneren des Winkels  $\angle ABC$ . Da der Durchschnitt dieser Winkelinneren mit dem Inneren des Dreiecks überein stimmt, liegt  $(XC)$  im Inneren des Dreiecks. Mit Bemerkung 1.2.31 sehen wir insbesondere, dass das Innere eines Dreiecks stets unendlich viele Punkte enthält.



DEFINITION 1.2.42 (Konvexität). Eine Punktmenge  $K \subseteq \mathcal{E}$  wird *konvex* genannt, wenn für je zwei Punkte  $A, B \in K$  auch  $[AB] \subseteq K$  gilt.

BEMERKUNG 1.2.43 (konvexe Mengen). Geraden sind konvex, siehe Bemerkung 1.2.3(a). Für je zwei Punkte  $A$  und  $B$  sind die Mengen  $(AB)$  und  $[AB]$  konvex, siehe Bemerkung 1.2.30. Aus dieser Bemerkung folgt auch, dass Halbebenen und Halbstrahlen konvex sind. Beliebige Durchschnitte konvexer Teilmengen sind wieder konvex. Somit sind auch die Inneren von Winkeln und Dreiecken konvex. (siehe Übungen)

**1.3. Kongruenzaxiome für Strecken.** Auf der Menge aller Strecken wird eine Relation postuliert, die als *Kongruenz von Strecken* bezeichnet und mit dem Zeichen  $\equiv$  geschrieben wird. Zwei Strecken  $AB$  und  $CD$  werden *kongruent* genannt, wenn sie in Relation stehen, d.h. wenn  $AB \equiv CD$  gilt.

Diese Kongruenzrelation soll folgender Axiomengruppe [Hilbert, §5] genügen:

**K1.** Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Strecken.

**K2.** Sind  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte, und ist  $C$  ein Punkt auf einer Geraden  $g$ , dann existiert auf jeder Seite von  $C$  in  $g$  genau ein Punkt  $D$ , sodass  $AB \equiv CD$ .

**K3.** Liegt ein Punkt  $B$  zwischen zwei Punkten  $A$  und  $C$ , und liegt ein weiterer Punkt  $B'$  zwischen zwei Punkten  $A'$  und  $C'$ , und gilt darüberhinaus  $AB \equiv A'B'$  sowie  $BC \equiv B'C'$ , dann auch  $AC \equiv A'C'$ .

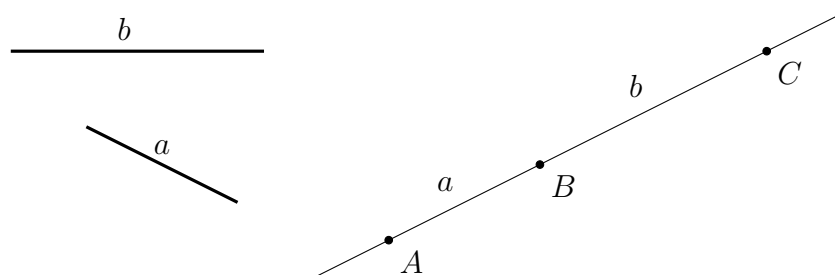
Axiom K1 erlaubt es, Äquivalenzklassen von Strecken zu bilden. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{P}$  die Menge aller Kongruenzklassen von Strecken. Sind  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte, dann wird die Kongruenzklasse der Strecke  $AB$  mit  $|AB|$  bezeichnet, d.h.  $|AB| \in \mathcal{P}$ .

**BEMERKUNG 1.3.1.** Für je zwei verschiedene Punkte  $A$  und  $B$  gilt  $|AB| = |BA|$ , denn die Strecken  $AB$  und  $BA$  stimmen überein, vgl. Definition 1.2.4.

**BEMERKUNG 1.3.2.** Wir betrachten Kongruenzklassen von Strecken, als Strecken gleicher Länge, und fassen  $|AB|$  daher als (abstrakte) Streckenlänge auf. Beachte, dass die Elemente von  $\mathcal{P}$  nur positiven Längen entsprechen, degenerierte Strecken (mit Länge Null) sind in der Definition von  $\mathcal{P}$  nicht enthalten.

**BEMERKUNG 1.3.3.** Sei  $h$  ein Halbstrahl, der vom Punkt  $A$  ausgeht. Dann besagt Axiom K2 gerade, dass die Abbildung  $h \rightarrow \mathcal{P}$ ,  $X \mapsto |AX|$ , eine Bijektion ist.

**DEFINITION 1.3.4 (Addition).** Sind  $a, b \in \mathcal{P}$  zwei Kongruenzklassen von Strecken, dann definieren wir ihre Summe,  $a + b \in \mathcal{P}$ , wie folgt: Wir wählen drei Punkte (auf einer Geraden) so, dass  $A * B * C$ ,  $|AB| = a$ ,  $|BC| = b$ , und definieren dann  $a + b := |AC|$ .



**LEMMA 1.3.5.** *Die Summe von Kongruenzklassen ist wohldefiniert.*

**BEWEIS.** Wir überzeugen uns zunächst davon, dass drei Punkte  $A, B, C$  mit den geforderten Eigenschaften überhaupt existieren. Dazu wählen wir eine Gerade  $g$  und einen Punkt  $B$  auf  $g$ . Auf einer der beiden Seiten von  $B$  in  $g$  wählen wir einen Punkt  $A$  mit  $|AB| = a$ , und auf der anderen Seite von  $B$  wählen wir einen Punkt  $C$  auf  $g$  mit  $|BC| = b$ . Diese Punkte  $A$  und  $C$  existieren nach Axiom K2, siehe auch Bemerkung 1.3.1. Da  $A$  und  $C$  auf verschiedenen Seiten von  $B$  liegen, muss  $B$  zwischen  $A$  und  $C$  liegen, siehe Definition 1.2.17.

Nun wollen wir uns noch davon überzeugen, dass die Summe nicht von der Wahl der Punkte  $A, B, C$  abhängt. Seien also  $A', B', C'$  drei weitere Punkte, sodass  $A' * B' * C'$ ,  $|A'B'| = a$  und  $|B'C'| = b$ . Es gilt daher  $|AB| = |A'B'|$  und  $|BC| = |B'C'|$ , also  $AB \equiv A'B'$  und  $BC \equiv B'C'$ . Aus Axiom K3 folgt nun  $AC \equiv A'C'$ , also  $|AC| = |A'C'|$ .  $\square$

SATZ 1.3.6 (Rechenregeln für Steckenaddition). *Für beliebige  $a, b, c \in \mathcal{P}$  gilt:*

- (a)  $a + b = b + a$ . (Kommutativität)
- (b)  $(a + b) + c = a + (b + c)$ . (Assoziativität)
- (c) *Es tritt genau einer der folgenden Fälle ein:*
  - (i) *Es existiert  $x \in \mathcal{P}$  mit  $x + a = b$ , oder*
  - (ii)  *$a = b$ , oder*
  - (iii) *es existiert  $x \in \mathcal{P}$  mit  $a = x + b$ .*
- (d) *Aus  $a + c = b + c$  folgt  $a = b$ . (Kürzungsregel)*

BEWEIS. Um (a) einzusehen, wählen wir drei Punkte so, dass  $A * B * C$ ,  $|AB| = a$  und  $|BC| = b$ . Nach Definition gilt daher  $a + b = |AC|$ . Es gilt dann auch  $C * B * A$ ,  $b = |CB|$  und  $a = |BA|$ , siehe Axiom A1 und Bemerkung 1.3.1. Nach Definition ist daher  $b + a = |CA|$ . Die Kommutativität folgt nun aus  $|AC| = |CA|$ .

Um (b) einzusehen wählen wir wie zuvor drei Punkte  $A, B, C$  auf einer Geraden so, dass  $A * B * C$ ,  $|AB| = a$  und  $|BC| = b$ . Darüber hinaus wählen wir auf der Seite von  $C$ , die  $B$  nicht enthält, einen weiteren Punkt  $D$  auf dieser Geraden mit  $|CD| = c$ , siehe Axiom K2. Es gilt daher  $B * C * D$ . Nach Definition haben wir

$$a + b = |AC| \quad \text{sowie} \quad b + c = |BD|. \quad (4)$$

Nach Lemma 1.2.28(a) gilt auch  $A * B * D$  und  $A * C * D$ . Somit erhalten wir auch

$$a + |BD| = |AD| = |AC| + c.$$

Die Assoziativität folgt nun durch Einsetzen der Relationen (4).

Um (c) einzusehen, wählen wir zwei Punkte  $A$  und  $C'$  auf der selben Seite von  $B$  in einer Geraden so, dass  $|AB| = a$  und  $|C'B| = b$ . Der Punkt  $B$  liegt daher nicht zwischen  $A$  und  $C'$ . Beachte auch  $A \neq B \neq C'$ . Nach Bemerkung 1.2.10 tritt daher genau einer der folgenden Fälle ein:

- (i')  $C' * A * B$ , oder
- (ii')  $A = C'$ , oder
- (iii')  $A * C' * B$ .



Diese drei Fälle sind jeweils zu den entsprechenden Fällen in Satz 1.3.6(c) äquivalent, d.h.

$$(i') \Leftrightarrow (i), \quad (ii') \Leftrightarrow (ii), \quad \text{und} \quad (iii') \Leftrightarrow (iii).$$

Die Implikationen  $\Rightarrow$  sind dabei offensichtlich: Im ersten Fall folgt  $|C'A| + a = b$ ; im zweiten Fall folgt  $a = b$ ; und im dritten Fall  $|AC'| + b = a$ . Die umgekehrten Implikationen folgen leicht aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K2. Wir werden dies nur für  $(i') \Leftarrow (i)$  ausführen, die Implikation  $(iii') \Leftarrow (iii)$  folgt analog und  $(ii') \Leftarrow (ii)$  ist noch einfacher. Sei also  $x \in \mathcal{P}$  und  $x + a = b$ . Wähle einen Punkt  $D$  so, dass  $D * A * B$  und  $|DA| = x$ . Dann gilt  $|DB| = x + a = b$ .



Beachte, dass  $C'$  und  $D$  auf der selben Seite von  $B$  liegen, denn  $C'$  und  $A$  liegen auf der selben Seite und auch  $A$  und  $D$  liegen auf der selben Seite. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K2 folgt  $C' = D$ , also  $C' * A * B$ .

Um (d) einzusehen, sei  $a + c = b + c$ . Wir gehen indirekt vor und nehmen  $a \neq b$  an. Nach (c) existiert daher  $x \in \mathcal{P}$ , sodass entweder  $x + a = b$  oder  $a = x + b$ . O.B.d.A. sei  $x + a = b$ . Mit (b) folgt  $x + (a + c) = b + c$ . Aus (c) erhalten wir den Widerspruch  $a + c \neq b + c$ . Somit muss  $a = b$  gelten, und der Beweis ist vollständig.  $\square$

Die Rechenregeln in Satz 1.3.6 besagen, dass  $\mathcal{P}$  eine kommutative Halbgruppe bildet. Analog zum Übergang von  $\mathbb{N}$  zu  $\mathbb{Z}$  lässt sich  $\mathcal{P}$  in eine kommutative Gruppe einbetten.

LEMMA 1.3.7.

- (a) Durch  $(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$  ist auf  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$  eine Äquivalenzrelation definiert.
- (b) Durch  $[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d]$  ist auf der Menge der Äquivalenzklassen  $\mathcal{K} := \mathcal{P} \times \mathcal{P} / \sim$  eine Operation  $+$  wohldefiniert. Dabei bezeichnet  $[a, b] \in \mathcal{K}$  die von  $(a, b) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$  repräsentierte Äquivalenzklasse.
- (c) Mit der oben definierten Addition wird  $\mathcal{K}$  eine kommutative Gruppe.
- (d) Die Abbildung  $\iota: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{K}$ ,  $\iota(a) := [c + a, c]$ , hängt nicht von  $c \in \mathcal{P}$  ab, sie ist injektiv und ein Homomorphismus, d.h. es gilt  $\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$  für beliebige  $a, b \in \mathcal{P}$ .
- (e) Für jedes  $k \in \mathcal{K}$  tritt genau einer der folgenden Fälle ein:  $-k \in \iota(\mathcal{P})$ , oder  $k = 0$ , oder  $k \in \iota(\mathcal{P})$ .

BEWEIS. Reflexivität und Symmetrie dieser Relation in (a) sind offensichtlich. Um die Transitivität einzusehen, seien  $a, a', a'', b, b', b'' \in \mathcal{P}$  so, dass  $(a, b) \sim (a', b')$  und  $(a', b') \sim (a'', b'')$ . Es gilt daher  $a + b' = a' + b$  sowie  $a' + b'' = a'' + b'$ . Addition dieser beiden Gleichungen führt, unter Verwendung von Assoziativität und Kommutativität der Addition, auf

$$a + b'' + (a' + b') = a'' + b + (a' + b').$$

Aus der Kürzungsregel in Satz 1.3.6(d) erhalten wir  $a + b'' = a'' + b$ , also  $(a, b) \sim (a'', b'')$ .

Um (b) einzusehen, seien  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathcal{P}$  so, dass  $(a, b) \sim (a', b')$  und  $(c, d) \sim (c', d')$ . Es gilt daher  $a + b' = a' + b$  sowie  $c + d' = c' + d$ . Addition der beiden Gleichungen führt auf

$$(a + c) + (b' + d') = (a' + c') + (b + d).$$

Somit gilt  $(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$ , also  $[a + c, b + d] = [a' + c', b' + d']$ .

Nun zu (c): Kommutativität und Assoziativität der Addition auf  $\mathcal{K}$  folgen sofort aus der entsprechenden Eigenschaft der Addition auf  $\mathcal{P}$ . Für beliebige  $a, b, c \in \mathcal{P}$  gilt  $[a, b] + [c, c] = [a + c, b + c] = [a, b]$ , denn  $(a + c) + b = a + (b + c)$ . Somit ist  $0 := [c, c]$  neutrales Element der Addition auf  $\mathcal{K}$ .<sup>5</sup> Schließlich gilt  $[a, b] + [b, a] = [a + b, b + a] = [a + b, a + b] = 0$ , also ist  $[b, a]$  das additive Inverse von  $[a, b]$ , d.h.  $-[a, b] = [b, a]$ .

Die Abbildung  $\iota$  in (d) hängt nicht von  $c$  ab, denn für  $a, c, c' \in \mathcal{P}$  gilt  $(a + c) + c' = (a + c') + c$ , also  $[a + c, c] = [a + c', c']$ . Die Abbildung  $\iota$  ist injektiv, denn aus  $[a + c, c] = [b + c', c']$  folgt  $a + c + c' = b + c' + c$  und die Kürzungsregel liefert  $a = b$ . Die Abbildung  $\iota$  ist ein Homomorphismus (von Halbgruppen), denn für beliebige  $a, b, c, c' \in \mathcal{P}$  gilt

$$\iota(a) + \iota(b) = [a + c, c] + [b + c', c'] = [a + b + (c + c'), c + c'] = \iota(a + b).$$

<sup>5</sup>Da eine kommutative Halbgruppe höchstens ein neutrales Element besitzt, kann  $[c, c] \in \mathcal{K}$  nicht von  $c$  abhängen. Tatsächlich gilt  $[c, c] = [c', c']$  für beliebige  $c, c' \in \mathcal{P}$ , denn  $c + c' = c' + c$ .

Um (e) einzusehen, seien  $a, b, x \in \mathcal{P}$ . Offensichtlich haben wir:

$$\begin{aligned} x + a = b &\Leftrightarrow -[a, b] = \iota(x) \\ a = b &\Leftrightarrow [a, b] = 0 \\ a = x + b &\Leftrightarrow [a, b] = \iota(x) \end{aligned}$$

Die Fallunterscheidung folgt daher aus Satz 1.3.6(c).  $\square$

Nach Lemma 1.3.7(d) können wir  $\mathcal{P}$  als Teilmenge von  $\mathcal{K}$  auffassen, und diese Identifikation ist mit der Addition verträglich. Nach Lemma 1.3.7(e) haben wir

$$\mathcal{K} \setminus \{0\} = (-\mathcal{P}) \cup \mathcal{P} \quad \text{und} \quad (-\mathcal{P}) \cap \mathcal{P} = \emptyset,$$

wobei  $-\mathcal{P}$  die Teilmenge  $\{-a : a \in \mathcal{P}\}$  bezeichnet. Beim Übergang von  $\mathcal{P}$  zu  $\mathcal{K}$  sind also das neutrale Element 0 und die additiven Inversen der Elemente in  $\mathcal{P}$  neu hinzugekommen.

**BEMERKUNG 1.3.8.** Sei  $O$  ein Punkt auf einer Geraden  $g$ . Weiters bezeichnen  $g_-$  und  $g_+$  die beiden Seiten von  $O$  in  $g$ , es gilt daher  $g \setminus \{O\} = g_- \cup g_+$  und  $g_- \cap g_+ = \emptyset$ , siehe Bemerkung 1.2.22. Dann ist folgende Abbildung eine Bijektion

$$g \rightarrow \mathcal{K}, \quad A \mapsto \begin{cases} |OA| & \text{falls } A \in g_+, \\ 0 & \text{falls } A = O, \text{ und} \\ -|OA| & \text{falls } A \in g_-. \end{cases}$$

Beachte, dass diese Abbildung  $g_+$  mit  $\mathcal{P}$  und  $g_-$  mit  $-\mathcal{P}$  identifiziert. Nach Wahl eines Ursprungs  $O$  und einer Seite von  $O$  in  $g$  kann die Gerade  $g$  daher mit  $\mathcal{K}$  identifiziert werden.

**DEFINITION 1.3.9 (Ordnungsrelation).** Für  $a, b \in \mathcal{K}$  definieren wir  $a < b$ , falls  $b - a \in \mathcal{P}$ . Wie üblich schreiben wir statt  $a < b$  auch  $b > a$ .

**KOROLLAR 1.3.10.** Die Relation  $<$  ist eine mit der Addition verträgliche Totalordnung auf  $\mathcal{K}$ , deren positive Elemente mit  $\mathcal{P}$  übereinstimmen. Für beliebige  $a, b, c \in \mathcal{K}$  gilt daher:

- (a) Aus  $a < b$  und  $b < c$  folgt  $a < c$ . (Transitivität)
- (b) Es tritt genau einer der folgenden Fälle ein:  $a < b$ , oder  $a = b$ , oder  $a > b$ .
- (c) Aus  $a < b$  folgt  $a + c < b + c$ .
- (d)  $\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{K} : x > 0\}$  und  $-\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{K} : x < 0\}$ .

**BEWEIS.** Um die Transitivität einzusehen seien  $a < b$  und  $b < c$ , also  $b - a \in \mathcal{P}$  und  $c - b \in \mathcal{P}$ . Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhalten wir  $c - a \in \mathcal{P}$ , denn  $\mathcal{P}$  ist abgeschlossen unter Addition. Somit gilt auch  $a < c$ .

Nach Lemma 1.3.7(e) tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein:  $-(a - b) \in \mathcal{P}$ , oder  $a - b = 0$ , oder  $a - b \in \mathcal{P}$ . Diese entsprechen genau den drei Möglichkeiten:  $a < b$ ,  $a = b$ , oder  $a > b$ . Die verbleibenden Aussagen sind trivial.  $\square$

**BEMERKUNG 1.3.11.** Für zwei Strecken  $AB$  und  $CD$  gilt  $|AB| < |CD|$  genau dann wenn ein Punkt  $X \in (CD)$  existiert, sodass  $CX \equiv AB$ . Dies folgt sofort aus unserer Definition und Korollar 1.3.10(b).

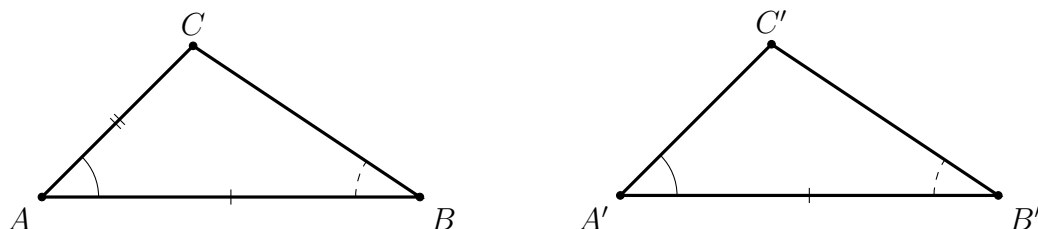
**1.4. Kongruenzaxiome für Winkel.** Auf der Menge aller Winkel wird eine Relation postuliert, die als *Kongruenz von Winkeln* bezeichnet und ebenfalls mit dem Zeichen  $\equiv$  geschrieben wird. Stehen zwei Winkeln  $\angle(h, k)$  und  $\angle(h', k')$  in Relation werden sie *kongruent* genannt, und wir schreiben  $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ .

Diese Kongruenzrelation soll folgender Axiomengruppe [Hilbert, §5] genügen:

**K4.** Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Winkel.

**K5.** Ist  $\angle(h, k)$  ein Winkel und  $h'$  ein Halbstrahl, dann gibt es auf jeder Seite der Trägergeraden von  $h'$  genau einen Halbstrahl  $k'$ , der vom selben Punkt ausgeht wie  $h'$  und  $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$  erfüllt.

**K6.** Sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei Dreiecke für die  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$  und  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$  gilt, dann muss auch  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$  erfüllt sein.



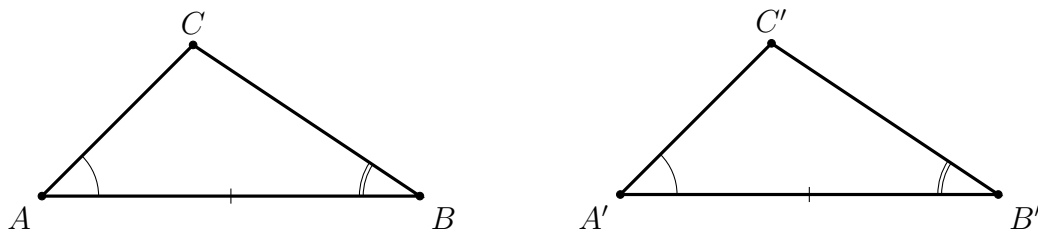
DEFINITION 1.4.1 (Kongruente Dreiecke). Zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  werden *kongruent* genannt, wenn ihre Seiten entsprechend kongruent sind, d.h.

$$AB \equiv A'B', \quad BC \equiv B'C', \quad CA \equiv C'A',$$

und auch ihre Winkel entsprechend kongruent sind, d.h.

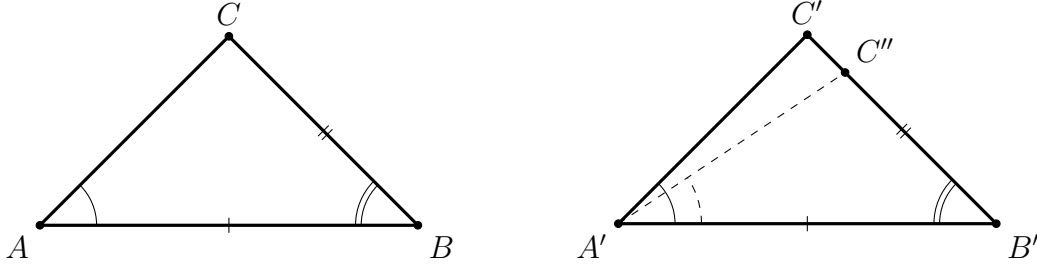
$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C', \quad \angle BCA \equiv \angle B'C'A', \quad \angle CAB \equiv \angle C'A'B'.$$

SATZ 1.4.2 (WSW, Winkel-Seiten-Winkel-Satz, [Euklid, I§26]). Sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei Dreiecke für die die Kongruenzen  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ ,  $AB \equiv A'B'$  und  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$  gelten, dann sind die beiden Dreiecke kongruent, d.h. es müssen auch die Kongruenzen  $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$ ,  $BC \equiv B'C'$  und  $AC \equiv A'C'$  erfüllt sein.<sup>6</sup>



BEWEIS. Wir folgen im Wesentlichen [Euklid, I§26], siehe auch [Hilbert, §6, Beweis von Satz 12]. Es bezeichne  $C''$  den (eindeutigen) Punkt auf der Geraden durch  $B'$  und  $C'$ , der auf der selben Seite von  $B'$  liegt wie  $C'$  und für den  $BC \equiv B'C''$  gilt, siehe Axiom K2.

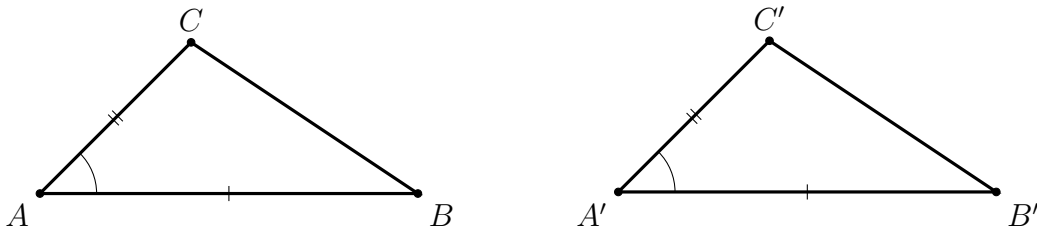
<sup>6</sup>In [Euklid, I§26] wird gleichzeitig SWW mitformuliert, siehe Satz 1.4.26 unten: Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel zwei Winkeln entsprechend gleich sind und eine Seite einer Seite, nämlich entweder die den gleichen Winkeln anliegenden oder die einem der beiden Winkel gegenüberliegenden Seiten einander gleich,



Wenden wir Axiom K6 auf die Dreiecke  $BAC$  und  $B'A'C''$  an erhalten wir  $\angle BAC \equiv \angle B'A'C''$ . Mit Axiom K4 folgt  $\angle B'A'C' \equiv \angle B'A'C''$ . Da die Punkte  $C'$  und  $C''$  auf der selben Seite der Geraden  $g(A', B')$  liegen, siehe Bemerkung 1.2.18, liegen auch die beiden Halbstrahlen  $h' := (A'C' >$  und  $h'' := (A'C'' >$  auf der selben Seite dieser Geraden. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 folgt daher  $h' = h''$ . Wir schließen  $C' = C''$ , denn die Halbstrahlen  $h'$  und  $h''$  schneiden die Gerade  $g(B', C')$  jeweils in genau einem Punkt, nämlich  $C'$  bzw.  $C''$ . Aus  $BC \equiv B'C''$  erhalten wir nun  $BC \equiv B'C'$ .

Analog, oder durch Vertauschen der Rollen von  $A$  und  $B$ , erhalten wir  $AC \equiv A'C'$ . Wenden wir Axiom K6 auf die Dreiecke  $BCA$  und  $B'C'A'$  an erhalten wir schließlich auch die Kongruenz  $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$ .  $\square$

**SATZ 1.4.3** (SWS, Seiten-Winkel-Seiten-Satz, [Euklid, I§4]). *Sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei Dreiecke für die die Kongruenzen  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$  und  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$  gelten, dann sind die beiden Dreiecke kongruent, d.h. es müssen auch die Kongruenzen  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ ,  $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$  und  $BC \equiv B'C'$  erfüllt sein.*<sup>7</sup>

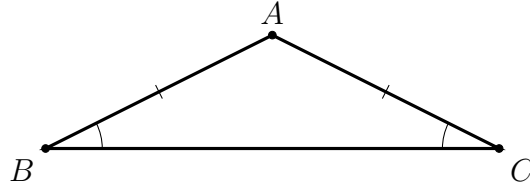


**BEWEIS.** Die Kongruenz  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$  folgt sofort aus Axiom K6, die verbleibenden Kongruenzen dann mit Satz 1.4.2.  $\square$

**SATZ 1.4.4** (Gleichschenkelige Dreiecke, [Euklid, I§5 und I§6]). *In einem Dreieck  $ABC$  gilt  $AB \equiv AC$  genau dann wenn  $\angle ABC \equiv \angle ACB$ .*

dann müssen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten (entsprechend) gleich sein und der letzte Winkel dem letzten Winkel.

<sup>7</sup>In [Euklid, I§4] wird dies wie folgt formuliert: Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den beiden gleichen Strecken umfassten Winkel einander gleich, dann muss in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muss dem Dreieck gleich sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkel entsprechend gleich sein, nämlich immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen.



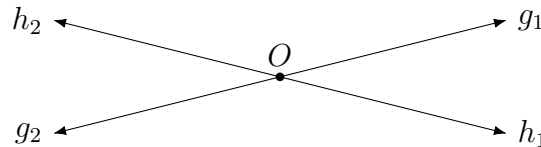
BEWEIS. Um die eine Implikation einzusehen nehmen wir  $AB \equiv AC$  an. Wenden wir Axiom K6 auf die Dreiecke  $ABC$  und  $ACB$  an so erhalten wir  $\angle ABC \equiv \angle ACB$ .

Für die andere Implikation sei nun  $\angle ABC \equiv \angle ACB$ . Nach Satz 1.4.2 (WSW) sind daher die Dreiecke  $BCA$  und  $CBA$  kongruent. Insbesondere erhalten wir daraus  $AB \equiv AC$ .  $\square$

DEFINITION 1.4.5. Unter einem *gleichschenkeligen Dreieck* verstehen wir ein Dreieck, das zwei kongruente Seiten (Winkeln) besitzt, vgl. Satz 1.4.4. Unter einem *gleichseitiges Dreieck* verstehen wir ein Dreieck, in dem alle drei Seiten (Winkel) zueinander kongruent sind.

Anliegende Winkel, die beim Schnitt zweier Geraden entstehen werden *Nebenwinkel* genannt. Gegenüberliegende Winkel, die beim Schnitt zweier Geraden entstehen werden als *Scheitelwinkel* bezeichnet. Genauer ist damit gemeint:

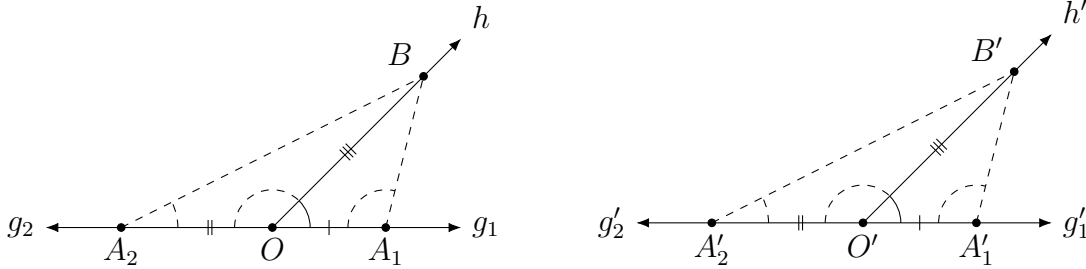
DEFINITION 1.4.6 (Nebenwinkel und Scheitelwinkel). Seien  $g$  und  $h$  zwei verschiedenen Geraden, die sich in einem Punkt  $O$  schneiden. Es bezeichnen  $g_1$  und  $g_2$  die beiden Seiten von  $O$  in  $g$ . Weiters bezeichnen  $h_1$  und  $h_2$  die beiden Seiten von  $O$  in  $h$ . In dieser Situation wird das Winkelpaar  $\angle(g_1, h_1)$  und  $\angle(g_1, h_2)$  als *Nebenwinkel* bezeichnet. Ebenso werden das Winkelpaar  $\angle(g_2, h_1)$  und  $\angle(g_2, h_2)$ , das Winkelpaar  $\angle(g_1, h_1)$  und  $\angle(g_2, h_1)$ , sowie das Winkelpaar  $\angle(g_1, h_2)$  und  $\angle(g_2, h_2)$  als Nebenwinkel bezeichnet. Das Winkelpaar  $\angle(g_1, h_1)$  und  $\angle(g_2, h_2)$  wird als *Scheitelwinkel* bezeichnet. Ebenso wird das Winkelpaar  $\angle(g_1, h_2)$  und  $\angle(g_2, h_1)$  wird als Scheitelwinkel bezeichnet.



SATZ 1.4.7 (Nebenwinkel, [Hilbert, Satz 14 in §6]). *Nebenwinkel kongruenter Winkel sind kongruent. Genauer ist damit folgendes gemeint: Seien  $g_1$  und  $g_2$  die beiden Seiten eines Punktes  $O$  in einer Geraden  $g$ , und sei  $h$  ein Halbstrahl, der von  $O$  ausgeht aber nicht in  $g$  liegt. Weiters seien  $g'_1$  und  $g'_2$  die beiden Seiten eines Punktes  $O'$  in einer Geraden  $g'$ , und sei  $h'$  ein Halbstrahl, der von  $O'$  ausgeht aber nicht in  $g'$  liegt. Gilt in dieser Situation die Kongruenz  $\angle(g_1, h) \equiv \angle(g'_1, h')$ , dann muss auch  $\angle(g_2, h) \equiv \angle(g'_2, h')$  erfüllt sein.*

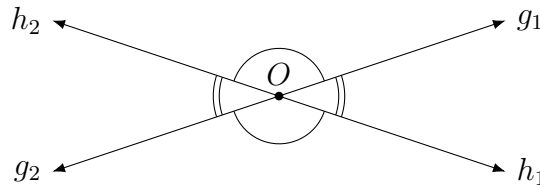


BEWEIS. Wir folgen Hilberts Beweis. Wir wählen beliebige Punkte  $A_1$  auf  $g_1$ ,  $A_2$  auf  $g_2$  und  $B$  auf  $h$ . Weiters bezeichne  $A'_1$  den eindeutigen Punkt auf  $g'_1$  mit  $O'A'_1 \equiv OA_1$ ; und  $A'_2$  bezeichne den eindeutigen Punkt auf  $g'_2$  mit  $O'A'_2 \equiv OA_2$ ; und  $B'$  bezeichne den eindeutigen Punkt auf  $h'$  mit  $O'B' \equiv OB$ . Nach Voraussetzung gilt  $\angle A_1OB \equiv \angle A'_1O'B'$ .



Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke  $OA_1B$  und  $O'A'_1B'$  daher kongruent. Insbesondere gilt  $A_1B \equiv A'_1B'$  sowie  $\angle OA_1B \equiv \angle O'A'_1B'$ . Aus Axiom K3 folgt  $A_1A_2 \equiv A'_1A'_2$ . Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind daher auch die Dreiecke  $A_1A_2B$  und  $A'_1A'_2B'$  kongruent. Insbesondere gilt  $A_2B \equiv A'_2B'$  sowie  $\angle A_1A_2B \equiv \angle A'_1A'_2B'$ , und daher auch  $\angle OA_2B \equiv \angle O'A'_2B'$ . Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind somit auch die Dreiecke  $A_2OB$  und  $A'_2O'B'$  kongruent. Insbesondere gilt  $\angle A_2OB \equiv \angle A'_2O'B'$ , also  $\angle(g_2, h) \equiv \angle(g'_2, h')$ .  $\square$

SATZ 1.4.8 (Scheitelwinkel, [Euklid, I§15]). *Scheitelwinkel sind kongruent. Genauer ist damit folgendes gemeint: Seien  $g$  und  $h$  zwei verschiedene Geraden, die sich im Punkt  $O$  schneiden. Bezeichnen  $g_1$  und  $g_2$  die beiden Seiten von  $O$  in  $g$ , und bezeichnen  $h_1$  und  $h_2$  die beiden Seiten von  $O$  in  $h$ , dann gilt  $\angle(g_1, h_1) \equiv \angle(g_2, h_2)$  sowie  $\angle(g_1, h_2) \equiv \angle(g_2, h_1)$ .*<sup>8</sup>



BEWEIS. Da die Winkel  $\angle(g_1, h_1)$  und  $\angle(g_2, h_2)$  beide Nebenwinkel von  $\angle(g_1, h_2)$  sind, erhalten wir aus Satz 1.4.7 sofort  $\angle(g_1, h_1) \equiv \angle(g_2, h_2)$ . Analog, oder durch Vertauschen der Rollen von  $g_1$  und  $g_2$ , folgt die andere Kongruenz, die Winkel  $\angle(g_1, h_2)$  und  $\angle(g_2, h_1)$  sind beide Nebenwinkel von  $\angle(g_1, h_1)$ .  $\square$

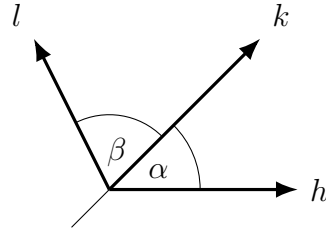
Axiom K4 erlaubt es Äquivalenzklassen von Winkel zu bilden. Mit  $\mathcal{W}$  bezeichnen wir die Menge aller Kongruenzklassen von Winkeln. Ist  $\angle(h, k)$  ein Winkel, so wird die davon repräsentierte Kongruenzklasse mit  $\sphericalangle(h, k)$  bezeichnet, d.h.  $\sphericalangle(h, k) \in \mathcal{W}$ .

BEMERKUNG 1.4.9. Ist  $\angle(h, k)$  ein Winkel, dann gilt  $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(k, h)$ , denn die Winkel  $\angle(h, k)$  und  $\angle(k, h)$  stimmen überein, vgl. Definition 1.2.33.

BEMERKUNG 1.4.10. Wir betrachten Kongruenzklassen von Winkel als Winkel gleicher Größe (Öffnung) und fassen  $\sphericalangle(h, k)$  daher als (abstrakte) Winkelgröße auf.

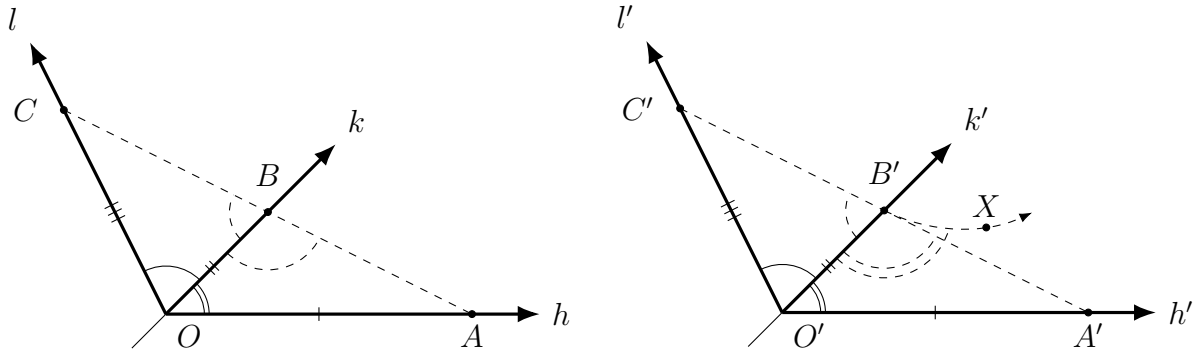
<sup>8</sup>In [Euklid, I§15] wird dies wie folgt formuliert: Zwei gerade Linien bilden, wenn sie einander schneiden, Scheitelwinkel, die einander gleich sind.

DEFINITION 1.4.11 (Winkeladdition). Die Summe zweier Kongruenzklassen von Winkeln  $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$  wird wie folgt definiert: Wir wählen drei Halbstrahlen  $h, k, l$ , die vom selben Punkt ausgehen so, dass  $h$  und  $l$  auf verschiedenen Seiten der Trägergeraden von  $k$  liegen und so, dass  $\sphericalangle(h, k) = \alpha$  sowie  $\sphericalangle(k, l) = \beta$  gilt. Bilden  $h$  und  $l$  einen Winkel und liegt  $k$  im Inneren dieses Winkels (und nur in diesem Fall) wird ihre Summe durch  $\alpha + \beta := \sphericalangle(h, l)$  erklärt.



LEMMA 1.4.12. Die Addition von Kongruenzklassen von Winkeln ist wohldefiniert.

BEWEIS. Die Existenz dreier Halbstrahlen  $h, k, l$  wie in Definition 1.4.11 oben folgt sofort aus Axiom K5. Wir bezeichnen ihren gemeinsamen Ausgangspunkt mit  $O$ . Wir nehmen an, dass  $h$  und  $l$  einen Winkel bilden und  $k$  im Inneren dieses Winkels liegt. Seien nun  $h', k', l'$  drei weitere Halbstrahlen, die von einem gemeinsamen Punkt  $O'$  ausgehen, sodass  $h'$  und  $l'$  auf verschiedenen Seiten der Trägergeraden von  $k'$  liegen,  $\sphericalangle(h', k') = \sphericalangle(h, k)$  sowie  $\sphericalangle(k', l') = \sphericalangle(k, l)$ . Es ist zu zeigen, dass auch  $h'$  und  $l'$  einen Winkel bilden, dass  $k'$  im Inneren dieses Winkels liegt, und dass  $\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l')$  gilt. Wir folgen dem Beweis in [Hartshorne, Proposition 9.4], siehe auch [Hilbert, Satz 15 in §6].



Wir wählen beliebige Punkte  $A$  auf  $h$  und  $C$  auf  $l$ . Da  $k$  im Inneren des Winkels  $\sphericalangle(h, l)$  liegt schneidet die Gerade durch  $A$  und  $C$  den Halbstrahl  $k$  in einem Punkt  $B$ , der zwischen  $A$  und  $C$  liegt, siehe Proposition 1.2.38. Es bezeichne  $A'$  den eindeutigen Punkt auf  $h'$  mit  $OA \equiv O'A'$ ; es bezeichne  $B'$  den eindeutigen Punkt auf  $k'$  mit  $OB \equiv O'B'$ ; und es bezeichne  $C'$  den eindeutigen Punkt auf  $l'$  mit  $OC \equiv O'C'$ . Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke  $OBA$  und  $O'B'A'$  kongruent, es gilt daher

$$BA \equiv B'A', \quad \sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle O'B'A' \quad \text{und} \quad \sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle O'A'B'. \quad (5)$$

Ebenso sehen wir, dass die Dreiecke  $OBC$  und  $O'B'C'$  kongruent sind, also

$$BC \equiv B'C', \quad \sphericalangle OBC \equiv \sphericalangle O'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle OCB \equiv \sphericalangle O'C'B'. \quad (6)$$

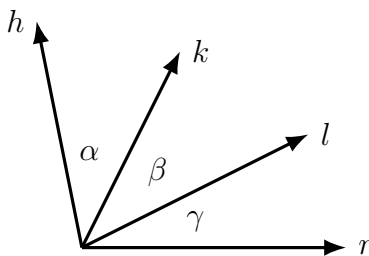
Wir wollen nun zeigen, dass die Punkte  $C'$ ,  $B'$ ,  $A'$  auf einer Geraden liegen. Sei dazu  $X$  ein Punkt, sodass  $C' * B' * X$ . Nach Konstruktion sind  $\angle O'B'C'$  und  $\angle O'B'X$  Nebenwinkel. Ebenso sind  $\angle OBC$  und  $\angle OBA$  Nebenwinkel. Aus Satz 1.4.7 und der zweiten Kongruenz in (6) schließen wir  $\angle O'B'X \equiv \angle OBA$ , und mit der zweiten Kongruenz in (5) erhalten wir  $\angle O'B'X \equiv \angle O'B'A'$ . Da  $X$  und  $A'$  auf der selben Seite der Trägergeraden von  $k'$  liegen, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 nun  $(B'X) > (B'A')$ . Somit liegt  $A'$  auf der Geraden  $g(B', X) = g(C', B')$ , also liegen  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  auf einer Geraden.

Da  $O'A'B'$  ein Dreieck ist, muss also auch  $O'A'C'$  ein Dreieck sein, also ist  $\angle(h', l')$  ein Winkel. Auch liegt  $B'$  zwischen  $A'$  und  $C'$ , denn  $A'$  und  $C'$  liegen auf verschiedenen Seiten der Trägergeraden von  $k'$ . Aus den ersten Kongruenzen in (5) und (6) folgt mittels Axiom K3 nun  $AC \equiv A'C'$ . Mit der dritten Kongruenz in (5) und Satz 1.4.3 (SWS) sehen wir, dass die Dreiecke  $OAC$  und  $O'A'C'$  kongruent sind. Insbesondere gilt  $\angle AOC \equiv \angle A'O'C'$ , also daher die gewünschte Kongruenz  $\angle(h, l) \equiv \angle(h', l')$   $\square$

SATZ 1.4.13 (Rechenregeln für Winkeladdition). Für beliebige  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{W}$  gilt:

- (a)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ . (Kommutativität) <sup>9</sup>
- (b)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ . (Assoziativität) <sup>10</sup>
- (c) Es tritt genau einer der folgenden Fälle ein: <sup>11</sup>
  - (i) Es existiert  $\omega \in \mathcal{W}$  mit  $\omega + \alpha = \beta$ , oder
  - (ii)  $\alpha = \beta$ , oder
  - (iii) es existiert  $\omega \in \mathcal{W}$  mit  $\alpha = \omega + \beta$ .
- (d) Aus  $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$  folgt  $\alpha = \beta$ . (Kürzungsregel) <sup>12</sup>

BEWEIS. Zu (a): Kommutativität der Addition ist offensichtlich.



Zu (b): Seien  $h, k, l$  drei vom selben Punkt ausgehende Halbstrahlen, sodass  $h$  und  $l$  einen Winkel bilden,  $k$  im Inneren dieses Winkels liegt,  $\alpha = \sphericalangle(h, k)$  und  $\beta = \sphericalangle(k, l)$ . Es gilt daher  $\alpha + \beta = \sphericalangle(h, l)$ . Sei  $r$  ein weiterer vom selben Punkt ausgehender Halbstrahl, sodass  $h$  und  $r$  einen Winkel bilden,  $l$  im Inneren dieses Winkels liegt und  $\gamma = \sphericalangle(l, r)$ . Es gilt daher  $\sphericalangle(h, l) + \gamma = \sphericalangle(h, r)$ . Zusammen erhalten wir

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \sphericalangle(h, r). \quad (7)$$

<sup>9</sup>Genauer ist hier gemeint: Ist die Summe auf einer Seite definiert, dann ist auch die Summe auf der anderen Seite definiert und es gilt Gleichheit.

<sup>10</sup>Genauer ist hier gemeint: Sind die beiden Summen auf einer Seite definiert, dann sind auch beide Summen auf der anderen Seite definiert und es gilt Gleichheit.

<sup>11</sup>In (i) und (iii) wird implizit vorausgesetzt, dass die Summe  $\omega + \alpha$  bzw.  $\omega + \beta$  definiert ist.

<sup>12</sup>Hier wird implizit vorausgesetzt, dass die beiden Summen  $\alpha + \gamma$  und  $\beta + \gamma$  definiert sind.



Mit Lemma 1.2.28(b), Proposition 1.2.38 und Bemerkung 1.2.37 lässt sich leicht zeigen, dass auch  $k$  und  $r$  einen Winkel bilden,  $l$  im Inneren dieses Winkels liegt, und auch  $k$  im Inneren von  $\angle(h, r)$  liegt. Daraus erhalten wir  $\beta + \gamma = \sphericalangle(k, r)$  und  $\alpha + \sphericalangle(k, r) = \sphericalangle(h, r)$ , also  $\alpha + (\beta + \gamma) = \sphericalangle(h, r)$ . Zusammen mit (7) folgt die Assoziativität.

Zu (c): Seien  $h, k, l$  drei vom selben Punkt ausgehende Halbstrahlen, sodass  $k$  und  $l$  auf der selben Seite der Trägergeraden von  $h$  liegen,  $\alpha = \sphericalangle(h, k)$  und  $\beta = \sphericalangle(h, l)$ . Es muss genau einer der folgenden drei Fälle eintreten:

- (i')  $h$  und  $l$  liegen auf verschiedenen Seiten der Trägergeraden von  $k$ .
- (ii')  $k = l$
- (iii')  $h$  und  $l$  liegen auf der selben Seite der Trägergeraden von  $k$ .

Diese entsprechen genau den drei Fällen in (c), d.h.

$$(i') \Leftrightarrow (i), \quad (ii') \Leftrightarrow (ii), \quad \text{und} \quad (iii') \Leftrightarrow (iii).$$

Die Implikationen  $\Rightarrow$  sind offensichtlich: Im ersten Fall folgt  $\sphericalangle(k, l) + \alpha = \beta$ ; im zweiten Fall folgt  $\alpha = \beta$ ; und im dritten Fall folgt  $\sphericalangle(k, l) + \beta = \alpha$ . Die umgekehrten Implikationen folgen aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5. Wir werden dies nur für (i') $\Leftarrow$ (i) ausführen, die Implikation (iii') $\Leftarrow$ (iii) folgt analog, und (ii') $\Leftarrow$ (ii) ist noch einfacher. Sei also  $\omega \in \mathcal{W}$  und  $\omega + \alpha = \beta$ . Auf der Seite der Trägergeraden von  $k$ , die  $h$  nicht enthält, sei  $l'$  der vom selben Punkt ausgehende Halbstrahl mit  $\sphericalangle(k, l') = \omega$ . Es gilt daher  $\angle(h, l') = \alpha + \omega = \beta = \sphericalangle(h, l)$ . Nach Voraussetzung liegt  $k$  im Inneren des Winkels  $\angle(h, l')$ , also liegen  $k$  und  $l'$  auf der selben Seite der Trägergeraden von  $h$ . Da auch  $k$  und  $l$  auf der selben Seite dieser Geraden liegen, müssen auch  $l$  und  $l'$  auf der selben Seite liegen. Mit der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 folgt  $l = l'$ , also liegen  $h$  und  $l$  auf verschiedenen Seiten der Trägergeraden von  $k$ .

Zu (d): Dies folgt sofort aus (b) und (c), genau wie im Beweis von Korollar 1.3.10(d).  $\square$

**DEFINITION 1.4.14** (Ordnungsrelation für Winkeln). Für  $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$  definieren wir  $\alpha < \beta$ , falls  $\omega \in \mathcal{W}$  existiert, sodass  $\omega + \alpha = \beta$ . Statt  $\alpha < \beta$  schreiben wir auch  $\beta > \alpha$ .

**KOROLLAR 1.4.15.** Die Relation  $<$  ist eine mit der Addition verträgliche Totalordnung auf  $\mathcal{W}$ . Für beliebige  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{W}$  gilt daher:

- (a) Aus  $\alpha < \beta$  und  $\beta < \gamma$  folgt  $\alpha < \gamma$ . (Transitivität)
- (b) Es tritt genau einer der folgenden Fälle ein:  $\alpha < \beta$ , oder  $\alpha = \beta$ , oder  $\alpha > \beta$ .
- (c) Aus  $\alpha < \beta$  folgt  $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ .<sup>13</sup>

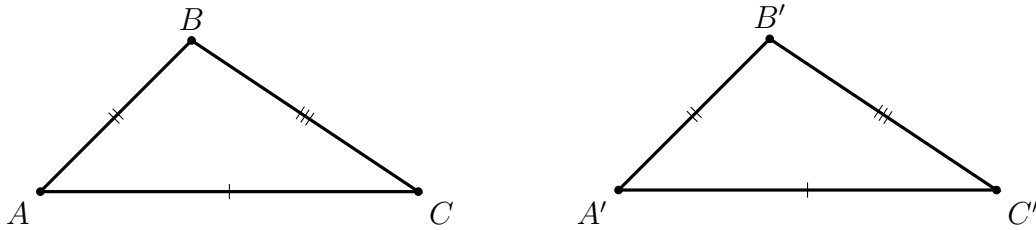
**BEWEIS.** Die Aussagen (a) und (c) folgen aus der Assoziativität in Satz 1.4.13(b). Die Aussage in (b) ist bloß eine Umformulierung von Satz 1.4.13(c).  $\square$

**BEMERKUNG 1.4.16.** Für zwei Winkel  $\angle(h, k)$  und  $\angle(h', k')$  gilt  $\sphericalangle(h, k) < \sphericalangle(h', k')$  genau dann wenn ein Halbstrahl  $l'$  existiert, der vom Scheitel von  $\angle(h', k')$  ausgeht, im Inneren dieses Winkels liegt und  $\angle(h, k) \equiv \angle(h', l')$  erfüllt. Dies folgt sofort aus unserer Definition und Korollar 1.4.15(b).

**SATZ 1.4.17** (SSS, Seiten-Seiten-Seiten-Satz, [Euklid, I§8]). Sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei Dreiecke für die die Kongruenzen  $AB \equiv A'B'$ ,  $BC \equiv B'C'$  und  $CA \equiv C'A'$  gelten, dann sind

<sup>13</sup>Genauer ist hier gemeint: Wenn die Summe auf der rechten Seite definiert ist, dann ist auch die Summe auf der linken Seite definiert und es gilt die Kleiner-Relation.

die beiden Dreiecke kongruent, d.h. es müssen auch die Kongruenzen  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ ,  $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$  und  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$  erfüllt sein.<sup>14</sup>

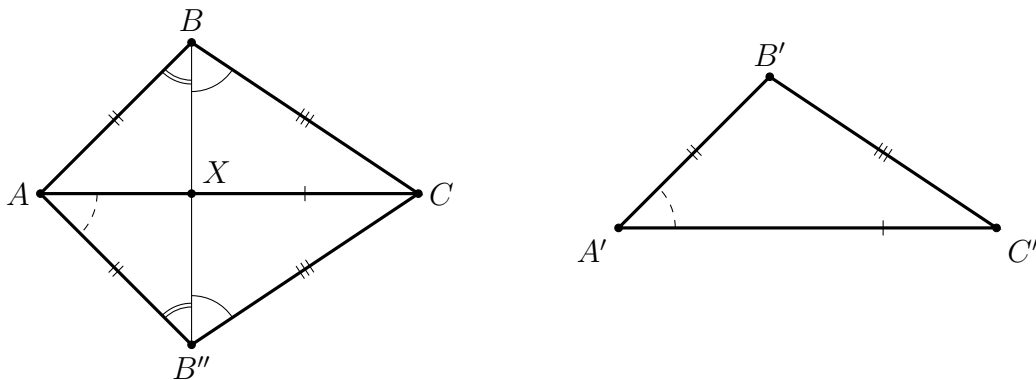


BEWEIS. Wir geben Hilberts Beweis [Hilbert, Satz 18 in §6], siehe auch [Hartshorne, Proposition 10.1]. Es genügt  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$  zu zeigen, die anderen Kongruenzen folgen analog, oder mit Satz 1.4.3 (SWS). Auf der Seite der Geraden  $g(A, C)$ , die  $B$  nicht enthält, wählen wir einen Punkt  $B''$  so, dass  $\angle CAB'' \equiv \angle C'A'B'$  und  $AB'' \equiv A'B'$ , siehe Axiom K5 und K2. Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke  $AB''C$  und  $A'B'C'$  kongruent. Insbesondere gilt  $B''C \equiv B'C'$ . Wir erhalten

$$BC \equiv B''C \quad \text{sowie} \quad AB \equiv AB''.$$

Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt auch  $\angle AB''C \equiv \angle A'B'C'$ . Es genügt daher zu zeigen:

$$\angle ABC \equiv \angle AB''C. \quad (8)$$



Bezeichne  $X$  den eindeutigen Schnittpunkt von  $g(A, C)$  mit  $g(B, B'')$ . Aus Satz 1.4.4 erhalten wir:

- (a) Ist  $X \neq A$ , dann gilt  $\angle ABB'' \equiv \angle AB''B$ .
- (b) Ist  $X \neq C$ , dann gilt  $\angle CBB'' \equiv \angle CB''B$ .

Nach Proposition 1.2.9 tritt (genau) einer der folgenden fünf Fälle ein:

- (1)  $X = C$ .
- (2)  $X = A$ .
- (3)  $A * X * C$

<sup>14</sup>In [Euklid, I§8] wird dies wie folgt formuliert: Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und auch die Grundlinie der Grundlinie gleich ist, dann müssen in ihnen auch die von gleichen Strecken umfassten Winkel einander gleich sein.

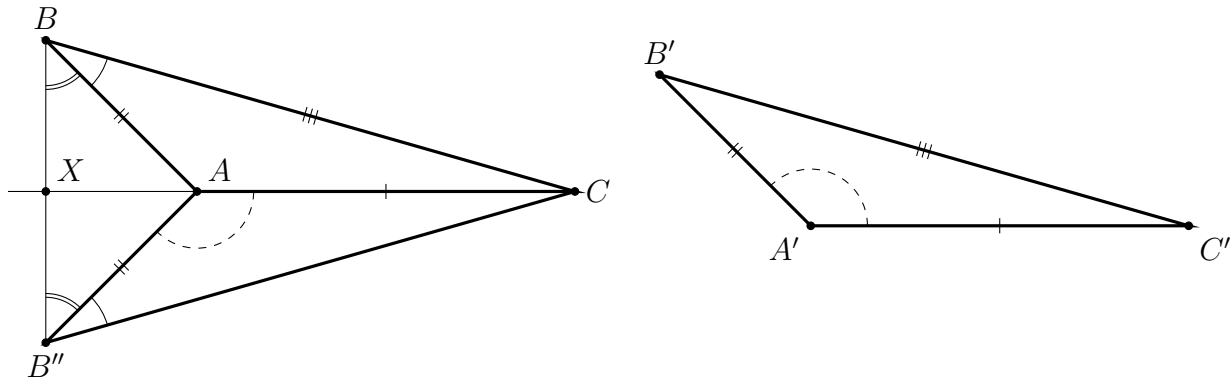
- (4)  $X * A * C$
- (5)  $A * C * X$

Wir werden nun in jedem dieser Fälle die Kongruenz (8) herleiten. Im ersten Fall gilt  $\angle ABC \equiv \angle ABB''$  und  $\angle AB''C \equiv \angle AB''B$ . Somit folgt (8) aus (a). Analog können wir im zweiten Fall vorgehen.

Im dritten Fall liegt der Halbstrahl  $(BB'')$  im Inneren des Winkels  $\angle ABC$ ; und ebenso liegt der Halbstrahl  $(B''B)$  im Inneren des Winkels  $\angle AB''C$ . In diesem Fall gilt daher

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABB'' + \sphericalangle CBB'' \quad \text{sowie} \quad \sphericalangle AB''C = \sphericalangle AB''B + \sphericalangle CB''B.$$

Die Kongruenz (8) folgt daher aus (a) und (b).



Im vierten Fall liegt der Halbstrahl  $(BA)$  im Inneren des Winkels  $\angle CBB''$ ; und ebenso liegt der Halbstrahl  $(B''A)$  im Inneren des Winkels  $\angle CB''B$ . In diesem Fall gilt daher

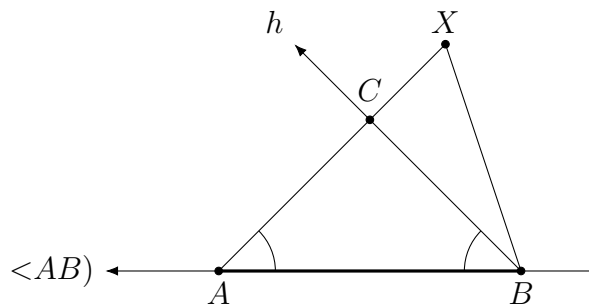
$$\sphericalangle CBB'' = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABB'' \quad \text{sowie} \quad \sphericalangle CB''B = \sphericalangle AB''C + \sphericalangle AB''B.$$

Die Kongruenz (8) folgt nun mit der Kürzungsregel in Satz 1.4.13(d) aus (a) und (b).

Der fünfte Fall lässt sich analog zeigen. □

**LEMMA 1.4.18** (Existenz gleichschenkeliger Dreiecke). *Ist  $AB$  eine Strecke, dann existiert auf jeder Seite der Geraden  $g(A, B)$  ein Punkt  $C$ , für den  $AC \equiv BC$  gilt.*

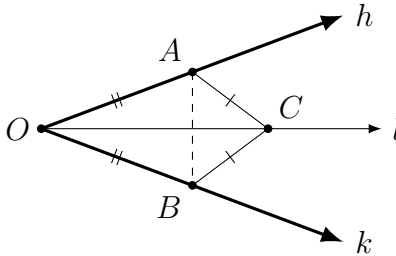
**BEWEIS.** Wir folgen dem Beweis in [Hartshorne, Proposition 10.2]. Auf einer gegebenen Seite der Geraden  $g(A, B)$  wählen wir einen Punkt  $X$ . Sind die Strecken  $AX$  und  $BX$  kongruent, dann ist  $X$  ein Punkt mit der gewünschten Eigenschaft. O.B.d.A. können wir daher  $AX \not\equiv BX$  annehmen.



Nach Satz 1.4.4 gilt dann auch  $\angle ABX \neq \angle BAX$ . O.B.d.A. sei  $\sphericalangle BAX < \sphericalangle ABX$ , siehe Korollar 1.4.15(c). Es existiert daher ein Halbstrahl  $h$ , der von  $B$  ausgeht, im Inneren von  $\angle ABX$  liegt und  $\angle BAX \equiv \angle(\sphericalangle AB), h)$  erfüllt, vgl. Bemerkung 1.4.16. Nach Proposition 1.2.38 trifft  $h$  die Strecke  $(AX)$  in einem Punkt  $C$ . Nach Konstruktion gilt  $\angle ABC \equiv \angle BAC$ . Aus Satz 1.4.4 folgt nun  $AC \equiv BC$ .  $\square$

**SATZ 1.4.19** ([**Euklid**, I§9]). *Jeder Winkel kann halbiert werden. Genauer ist damit gemeint: Zu jedem Winkel  $\angle(h, k)$  existiert genau ein Halbstrahl  $l$ , der vom Scheitel ausgeht, im Inneren des Winkels liegt und  $\angle(h, l) \equiv \angle(l, k)$  erfüllt.*

**BEWEIS.** Wir folgen im Wesentlichen Euklids Beweis mit einigen Modifikationen, die wir aus [**Hartshorne**, Section 10] übernehmen. Bezeichne  $O$  den Scheitel von  $\angle(h, k)$ , d.h. den gemeinsamen Ausgangspunkt von  $h$  und  $k$ . Sei  $A \in h$  beliebig. Nach Axiom K2 existiert  $B \in k$ , sodass  $OA \equiv OB$ . Nach Lemma 1.4.18 existiert auf der Seite von  $g(A, B)$ , die  $O$  nicht enthält, ein Punkt  $C$  mit  $AC \equiv BC$ .



Beachte, dass  $C$  nicht auf  $g(O, A)$  liegen kann. Läge nämlich  $C$  auf  $g(O, A)$ , dann müsste  $O * A * C$  gelten, also wären  $\angle BAO$  und  $\angle BAC$  Nebenwinkel, nach Satz 1.4.4 und Satz 1.4.7 wäre dann  $\angle ABC \equiv \angle ABk$ , und nach der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 müsste  $C$  daher auch auf  $k$  liegen, was  $h \cap k = \emptyset$  widerspräche. Analog lässt sich zeigen, dass  $C$  auch nicht auf  $g(O, B)$  liegt. Somit bilden  $AOC$  und  $BOC$  zwei Dreiecke.

Nach Satz 1.4.17 (SSS) sind die beiden Dreiecke  $AOC$  und  $BOC$  kongruent. Insbesondere erhalten wir  $\angle AOC \equiv \angle BOC$ . Der Halbstrahl  $l := (OC >$  halbiert daher den Winkel  $\angle(h, k)$ .

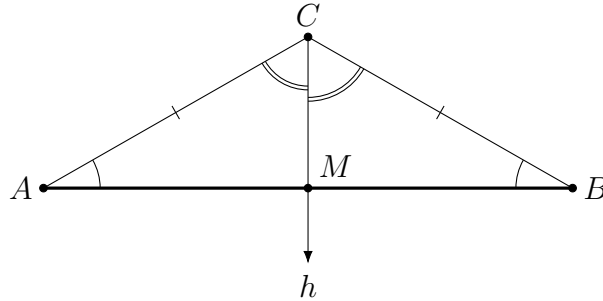
Es bleibt bloß noch zu zeigen, dass  $l$  im Inneren des Winkels  $\angle(h, k)$  liegt. Läge  $l$  nicht im Inneren, dann lägen  $h$  und  $k$  auf der selben Seite der Trägergeraden von  $l$  und aus der eben bewiesenen Kongruenz  $\angle(l, h) \equiv \angle(l, k)$  würde mit der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5  $h = k$  folgen, was der Annahme widerspräche, dass  $h$  und  $k$  einen Winkel bilden. Also muss  $l$  im Inneren des Winkels  $\angle(h, k)$  liegen.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei  $l'$  ein weiterer Halbstrahl, der von  $O$  ausgeht, im Inneren des Winkels  $\angle(h, k)$  liegt und  $\angle(h, l') \equiv \angle(l', k)$  erfüllt. Setzen wir  $\alpha := \sphericalangle(h, l)$  und  $\alpha' := \sphericalangle(h, l')$  dann gilt also  $\alpha + \alpha = \alpha' + \alpha'$ . Mit Korollar 1.4.15 folgt  $\alpha = \alpha'$ . Beachte, dass  $l$  und  $l'$  auf der selben Seite der Trägergeraden von  $h$  liegen. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 erhalten wir daher  $h = h'$ .  $\square$

**DEFINITION 1.4.20** (Winkelsymmetrale). Der Halbstrahl  $l$  in Satz 1.4.19 wird als *Winkelsymmetrale* des Winkels  $\angle(h, k)$  bezeichnet.

**SATZ 1.4.21** ([**Euklid**, I§10]). *Jede Strecke kann halbiert werden. Genauer ist damit gemeint: Zu jeder Strecke  $AB$  existiert genau ein Punkt  $M \in (AB)$  mit  $AM \equiv MB$ .*

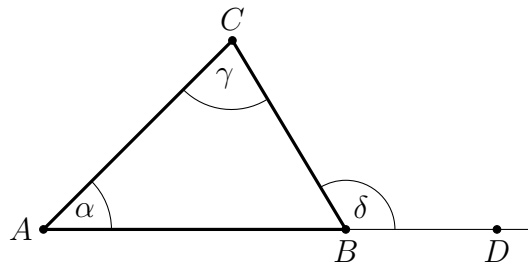
BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. Nach Lemma 1.4.18 existiert ein Punkt  $C$ , der nicht auf  $g(A, B)$  liegt und  $AC \equiv BC$  erfüllt. Aus Satz 1.4.4 folgt  $\angle ABC \equiv \angle BAC$ . Nach Satz 1.4.19 existiert ein von  $C$  ausgehender Halbstrahl  $h$ , der den Winkel  $\angle ACB$  halbiert, d.h.  $\angle ACh \equiv \angle BCh$ . Nach Proposition 1.2.38 schneidet  $h$  die Strecke  $(AB)$  in einem Punkt  $M$ . Nach Satz 1.4.2 (WSW) sind die Dreiecke  $ACM$  und  $BCM$  kongruent. Insbesondere folgt  $AM \equiv BM$ .



Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei  $M' \in (AB)$  ein weiterer Punkt mit  $AM' \equiv BM'$ . Setzen wir  $a := |AM|$  und  $a' := |AM'|$ , dann gilt also  $a + a = |AB| = a' + a'$ . Mit Korollar 1.3.10 folgt daraus  $a = a'$ . Beachte, dass  $M$  und  $M'$  auf der selben Seite von  $A$  in  $g(A, B)$  liegen. Mit der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K2 erhalten wir daher  $M = M'$ .  $\square$

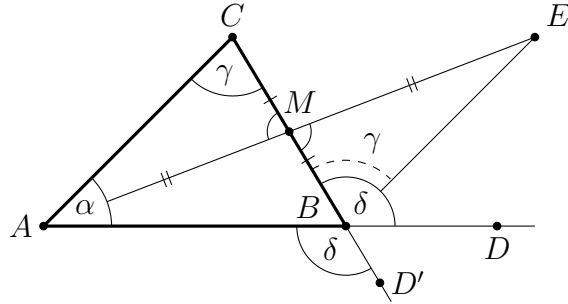
DEFINITION 1.4.22 (Mittelpunkt einer Strecke). Der eindeutig bestimmte Punkt  $M$  in Satz 1.4.21 wird als *Mittelpunkt der Strecke  $AB$*  bezeichnet.

SATZ 1.4.23 (Satz vom Außenwinkel, [Euklid, I§16]). *Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist stets größer, als jeder der nicht anliegenden Innenwinkel. Genauer ist damit gemeint: Sei  $ABC$  ein Dreieck und  $D$  ein Punkt mit  $A * B * D$ . Für die Winkel  $\alpha := \sphericalangle CAB$ ,  $\gamma := \sphericalangle BCA$  und  $\delta := \sphericalangle CBD$  gilt dann  $\alpha < \delta$  sowie  $\gamma < \delta$ .*



BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. Sei  $M$  der Mittelpunkt der Seite  $BC$ , sodass  $MB \equiv MC$ , siehe Satz 1.4.21. Nach Axiom K2 existiert ein Punkt  $E$ , sodass  $A * M * E$  und  $AM \equiv ME$ . Nach Satz 1.4.8 gilt  $\angle AMC \equiv \angle EMB$ . Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke  $MCA$  und  $MBE$  daher kongruent. Insbesondere erhalten wir  $\gamma = \sphericalangle MBE$ .

Wir zeigen nun, dass  $E$  im Inneren des Winkels  $\angle MBD$  liegt. Da  $A$  und  $D$  auf verschiedenen Seiten von  $g(B, C)$  liegen und auch die Punkte  $A$  und  $E$  auf verschiedenen Seiten von  $g(B, C)$  liegen, müssen  $E$  und  $D$  auf der selben Seite von  $g(B, C)$  liegen. Aus  $A * M * E$  folgt auch, dass  $M$  und  $E$  auf der selben Seite von  $g(A, B)$  liegen. Somit liegt  $E$  im Inneren des Winkels  $\angle MBD$  und wir erhalten  $\gamma < \delta$ , siehe Bemerkung 1.4.16.

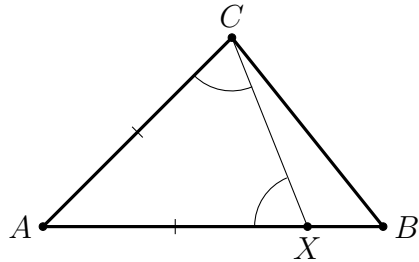


Analog, oder durch Vertauschen der Rollen von  $A$  und  $C$ , erhalten wir  $\alpha < \sphericalangle ABD'$ , wobei  $D'$  einen Punkt mit  $C * B * D'$  bezeichnet. Nach Satz 1.4.8 gilt  $\sphericalangle ABD' = \delta$ , und daher auch  $\alpha < \delta$ .  $\square$

**SATZ 1.4.24** ([**Euklid**, I§18 und I§19]). *Im Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber, und umgekehrt. Genauer ist damit folgendes gemeint: In einem Dreieck  $ABC$  mit  $b := |AC|$ ,  $c := |AB|$ ,  $\beta := \sphericalangle ABC$  und  $\gamma := \sphericalangle BCA$  gilt*

$$b < c \Leftrightarrow \beta < \gamma.$$

**BEWEIS.** Wir geben Euklids Beweis, siehe auch [**Hilbert**, Satz 23 in §6]. Um die eine Implikation zu zeigen, sei zunächst  $b < c$ . Dann existiert ein Punkt  $X$  zwischen  $A$  und  $B$ , sodass  $|AX| = b$ . Da  $X$  im Inneren des Winkels  $\sphericalangle BCA$  liegt, gilt  $\gamma > \sphericalangle ACX$ . Nach Satz 1.4.4 gilt  $\sphericalangle ACX = \sphericalangle AXC$ . Nach Satz 1.4.23 ist  $\sphericalangle AXC > \beta$ . Mit der Transitivität in Korollar 1.4.15(a) folgt  $\gamma > \beta$ .



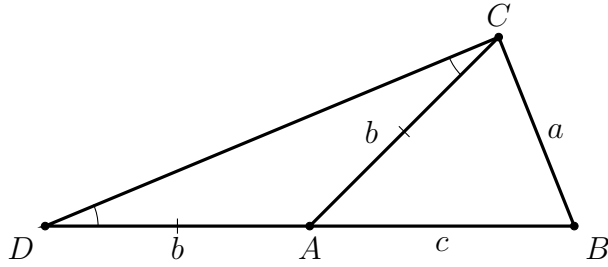
Für die andere Implikation sei nun  $\beta < \gamma$ . Es kann  $b$  nicht größer als  $c$  sein, denn nach dem vorangehenden Absatz würde daraus der Widerspruch  $\beta > \gamma$  folgen, siehe Korollar 1.4.15(b). Ebenso wenig kann  $b = c$  gelten, denn mit Satz 1.4.4 würden wir daraus den Widerspruch  $\beta = \gamma$  erhalten, siehe Korollar 1.4.15(b). Nach Korollar 1.3.10(b) muss daher  $b < c$  gelten.  $\square$

**SATZ 1.4.25** (Dreiecksungleichung, [**Euklid**, I§20]). *Im Dreieck sind zwei Seiten zusammen größer als die dritte. Genauer ist damit gemeint: In einem Dreieck  $ABC$  mit Seitenlängen  $a := |BC|$ ,  $b := |CA|$ ,  $c := |AB|$  gilt*

$$a < b + c, \quad b < c + a \quad \text{und} \quad c < a + b.$$

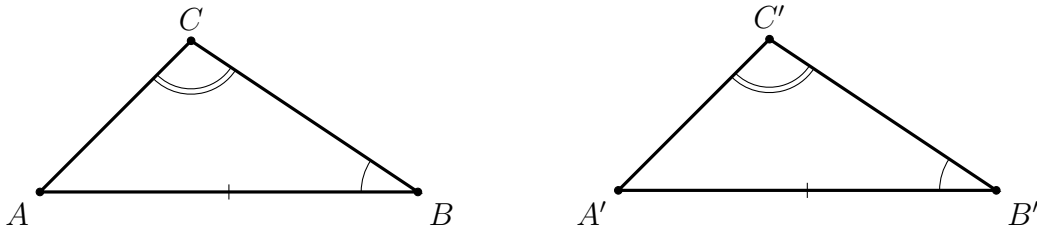
**BEWEIS.** Wir folgen Euklids Beweis. Auf der Geraden durch  $A$  und  $B$  wählen wir auf der Seite von  $A$ , die  $B$  nicht enthält, den Punkt  $D$  so, dass  $|AD| = b$ . Nach Konstruktion liegt  $A$  zwischen  $B$  und  $C$ , also ist  $|BD| = b + c$ .

Da  $A$  im Inneren des Winkels  $\sphericalangle BCD$  liegt, gilt  $\sphericalangle ACD < \sphericalangle BCD$ . Nach Satz 1.4.4 gilt  $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC$ . Somit ist  $\sphericalangle BDC < \sphericalangle BCD$ . Mit Satz 1.4.24 erhalten wir  $|BC| < |BD|$ ,

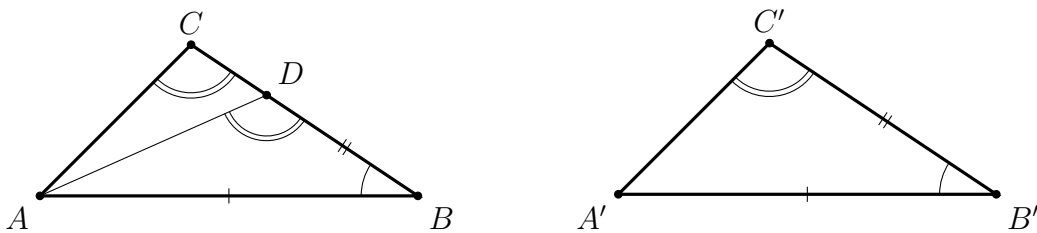


und daher  $a < b + c$ . Die anderen Ungleichungen folgen analog, oder durch Umbenennen der Dreieckspunkte.  $\square$

**SATZ 1.4.26** (SWW, Seiten-Winkel-Winkel-Satz, [Hilbert, Satz 25 in §6]). *Sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei Dreiecke für die die Kongruenzen  $AB \equiv A'B'$ ,  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$  und  $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$  gelten, dann sind die beiden Dreiecke kongruent, d.h. es müssen auch die Kongruenzen  $BC \equiv B'C'$ ,  $CA \equiv C'A'$  und  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$  erfüllt sein.*

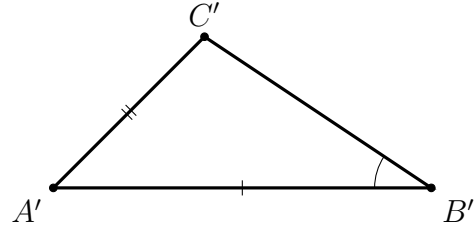
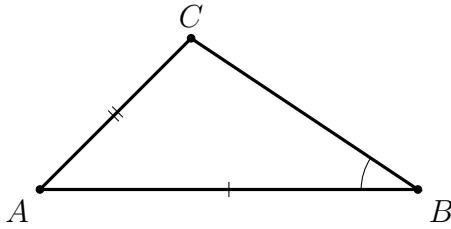


**BEWEIS.** Es genügt  $BC \equiv B'C'$  zu zeigen, die restlichen Kongruenzen folgen dann aus Satz 1.4.3 (SWS). Indirekt nehmen wir an,  $BC$  und  $B'C'$  wären nicht kongruent. O.B.d.A. sei  $|BC| > |B'C'|$ . Es existiert daher ein Punkt  $D$  zwischen  $B$  und  $C$ , sodass  $BD \equiv B'C'$ .



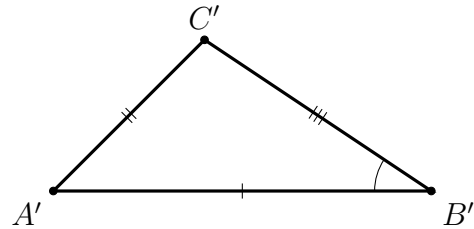
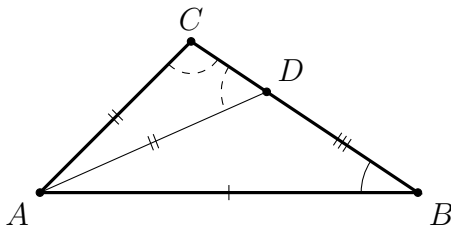
Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke  $ABD$  und  $A'B'C'$  kongruent, also gilt  $\angle BDA \equiv \angle B'C'A'$ . Zusammen mit der Voraussetzung  $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$  erhalten wir  $\angle BCA \equiv \angle BDA$ . Dies widerspricht jedoch Satz 1.4.23, siehe auch Korollar 1.4.15(b).  $\square$

**SATZ 1.4.27** (SSW, Seiten-Seiten-Winkel-Satz). *Sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei Dreiecke für die die Kongruenzen  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ ,  $AB \equiv A'B'$  und  $AC \equiv A'C'$  gelten, und ist darüber hinaus auch  $|AC| \geq |AB|$ , dann sind die beiden Dreiecke kongruent, d.h. es müssen auch die Kongruenzen  $BC \equiv B'C'$ ,  $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$  und  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$  erfüllt sein.*



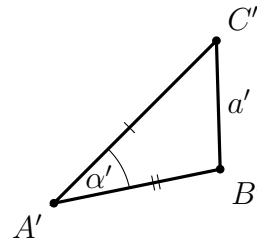
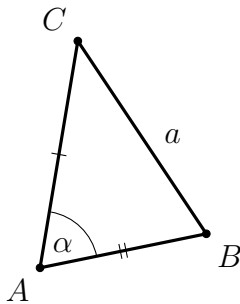
BEWEIS. Es genügt  $BC \equiv B'C'$  zu zeigen, die restlichen Kongruenzen folgen dann aus Satz 1.4.3 (SWS). Indirekt nehmen wir an,  $BC$  und  $B'C'$  wären nicht kongruent. O.B.d.A. sei  $|BC| > |B'C'|$ . Es existiert daher ein Punkt  $D$  zwischen  $B$  und  $C$ , sodass  $BD \equiv B'C'$ .

Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke  $ABD$  und  $A'B'C'$  kongruent, also gilt  $AD \equiv A'C'$ . Zusammen mit der Voraussetzung  $AC \equiv A'C'$  erhalten wir  $AD \equiv AC$ . Mit Satz 1.4.4



folgt  $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ADC$ . Nach Satz 1.4.23 ist  $\sphericalangle ADC > \sphericalangle ABD$ . Somit gilt  $\sphericalangle ABC < \sphericalangle ACB$ . Aus Satz 1.4.24 erhalten wir  $|AC| < |AB|$ , ein Widerspruch zur Voraussetzung  $|AC| \geq |AB|$ , vgl. Korollar 1.3.6(b).  $\square$

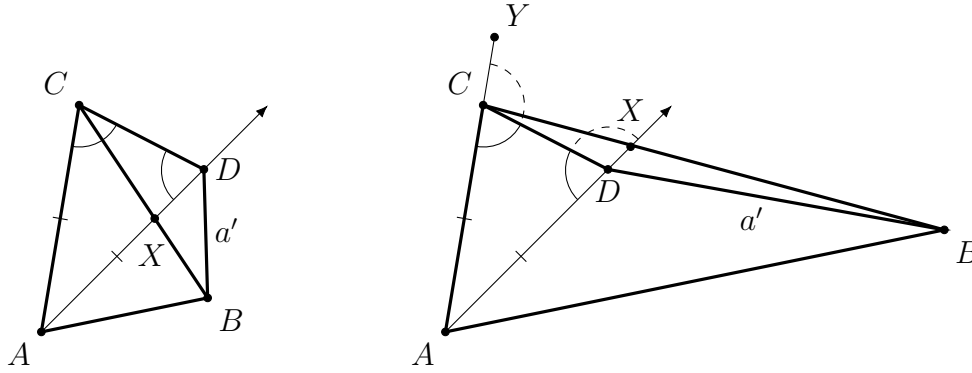
SATZ 1.4.28 ([Euklid, I§24 und I§25]). Seien  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei Dreiecke, sodass  $AB \equiv A'B'$  und  $AC \equiv A'C'$ . Weiters bezeichnen  $a := |BC|$ ,  $a' := |B'C'|$ ,  $\alpha := \sphericalangle CAB$  und  $\alpha' := \sphericalangle C'A'B'$ . In dieser Situation gilt  $a > a'$  genau dann wenn  $\alpha > \alpha'$ .



BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. Um die eine Implikation zu zeigen, sei zunächst  $\alpha > \alpha'$ . Dann existiert ein Punkt  $D$  im Inneren des Winkels  $\sphericalangle CAB$ , sodass  $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle C'A'B'$  und  $AD \equiv A'C'$ . Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke  $ABD$  und  $A'B'C'$  kongruent. Insbesondere ist  $|BD| = |B'C'| = a'$  und  $AD \equiv A'C' \equiv AC$ . Aus Satz 1.4.4 erhalten wir  $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ACD$ .

Bezeichne  $X$  den Schnittpunkt des Halbstrahls  $(AD >$  mit  $(BC)$ , siehe Proposition 1.2.38. Ist  $X = D$ , dann liegt  $D$  auf  $(BC)$ , also  $|BC| > |BD|$  und daher  $a > a'$ . O.B.d.A. sei daher





$X \neq D$ . Dann liegt  $X$  im Inneren des Winkels  $\angle BDC$ , siehe Bemerkung 1.2.37, und somit gilt  $\sphericalangle BDC > \sphericalangle XDC$ . Es genügt nun

$$\sphericalangle XDC > \sphericalangle XCD \quad (9)$$

zu zeigen, denn dann folgt  $\sphericalangle BDC > \sphericalangle BCD$  und mit Satz 1.4.24 daher  $|BC| > |BD|$ , also  $a > a'$ . Um (9) zu zeigen, unterscheiden wir die beiden Möglichkeiten  $A * X * D$  und  $A * D * X$ .

Im ersten Fall  $A * X * D$  liegt  $A$  im Inneren des Winkels  $\angle BDC$ , also  $\sphericalangle XDC = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ACD$ . Weiters liegt  $X$  im Inneren des Winkels  $\angle ACD$ , siehe Bemerkung 1.2.37, also  $\sphericalangle ACD > \sphericalangle XCD$ . Zusammen erhalten wir (9).

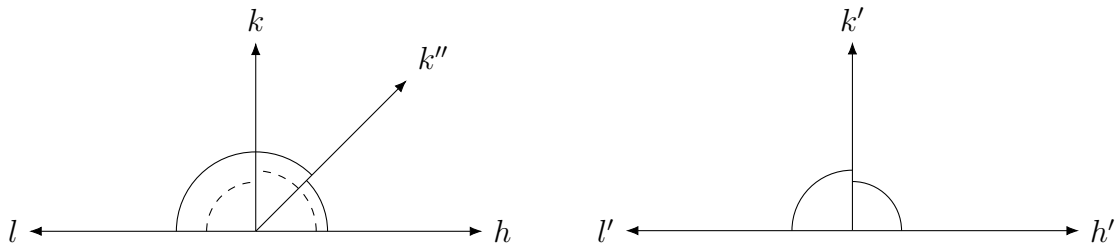
Nun zum zweiten Fall  $A * D * X$ . Sei  $Y$  ein Punkt mit  $A * C * Y$ . Aus  $\angle ADC \equiv \angle ACD$  erhalten wir mit Satz 1.4.7 auch  $\sphericalangle XDC = \sphericalangle YCD$ . Da  $X$  im Inneren des Winkels  $\angle YCD$  liegt, gilt  $\sphericalangle YCD > \sphericalangle XCD$ . Zusammen erhalten wir auch in diesem Fall (9).

Um die andere Implikation zu zeigen, sei nun  $a > a'$ . Wäre  $\alpha = \alpha'$ , erhielten wir aus Satz 1.4.3 (SWS) den Widerspruch  $a = a'$ . Wäre  $\alpha < \alpha'$ , erhielten wir aus dem eben Bewiesenen den Widerspruch  $a < a'$ . Somit muss  $\alpha > \alpha'$  gelten, vgl. Korollar 1.4.15(c).  $\square$

**DEFINITION 1.4.29** (Rechte Winkel). Unter einem *rechten Winkel* verstehen wir einen Winkel, der zu seinen Nebenwinkeln kongruent ist.

**SATZ 1.4.30** (Rechte Winkel). *Alle rechten Winkel sind einander kongruent.*

**BEWEIS.** Wir folgen dem Beweis in [Hilbert, Satz 21 in §6]. Seien  $\angle(h, k)$  und  $\angle(h', k')$  zwei rechte Winkel. Auf der Seite der Trägergeraden von  $h$ , die  $k$  enthält, sei  $k''$  der vom Scheitel des Winkels  $\angle(h, k)$  ausgehende Halbstrahl mit  $\angle(h, k'') \equiv \angle(h', k')$ . Nach Satz 1.4.7 ist auch  $\angle(h, k'')$  ein rechter Winkel.



Bezeichnet  $\angle(l, k)$  den Nebenwinkel von  $\angle(h, k)$ , dann gilt also

$$\alpha := \sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(l, k) \quad \text{und} \quad \beta := \sphericalangle(h, k'') = \sphericalangle(l, k'').$$

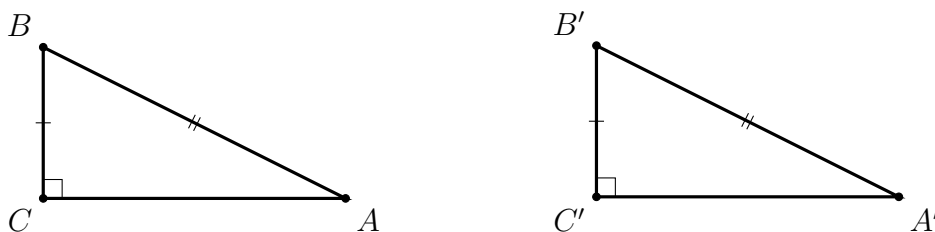
Läge  $k''$  im Inneren von  $\angle(h, k)$ , dann läge auch  $k$  im Inneren von  $\angle(l, k'')$  und wir erhielten  $\beta < \alpha$  aber auch  $\alpha < \beta$ , ein Widerspruch zu Korollar 1.4.15(b). Ebenso führt die Annahme, dass  $k''$  im Inneren von  $\angle(l, k)$  liegt zu einem Widerspruch. Es muss daher  $k = k''$  gelten, woraus sofort  $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$  folgt.  $\square$

DEFINITION 1.4.31 (Spitze und stumpfe Winkel). Ein Winkel wird *spitz* genannt, wenn er kleiner als ein rechter Winkel ist. Ein Winkel wird *stumpf* genannt, wenn er größer als ein rechter Winkel ist.

DEFINITION 1.4.32 (Rechtwinkeliges Dreieck). Ein Dreieck wird *rechtwinkelig* genannt, wenn einer seiner Winkel ein rechter ist. Die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite wird *Hypotenuse* genannt. Die beiden am rechten Winkel anliegenden Seiten werden als *Katheten* bezeichnet.

BEMERKUNG 1.4.33 (Rechtwinkelige Dreiecke). Sei  $ABC$  ein Dreieck mit rechtem Winkel  $\angle BCA$ . Nach Satz 1.4.23 sind die Winkel  $\angle CAB$  und  $\angle ABC$  beide spitz. Nach Satz 1.4.24 ist daher die Hypotenuse länger als jede der beiden Katheten, d.h.

$$|AB| > |BC| \quad \text{und} \quad |AB| > |CA|. \quad (10)$$



Sei  $A'B'C'$  ein weiteres Dreieck mit rechtem Winkel  $\angle B'C'A'$ . Gilt in dieser Situation  $AB \equiv A'B'$  und  $BC \equiv B'C'$ , dann sind die beiden Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  kongruent. Kongruenz liegt auch vor, wenn  $CA \equiv C'A'$  und  $AB \equiv A'B'$ . Dies folgt aus Satz 1.4.27 (SSW), die Zusatzvoraussetzung ist in dieser Situation automatisch erfüllt, siehe (10).

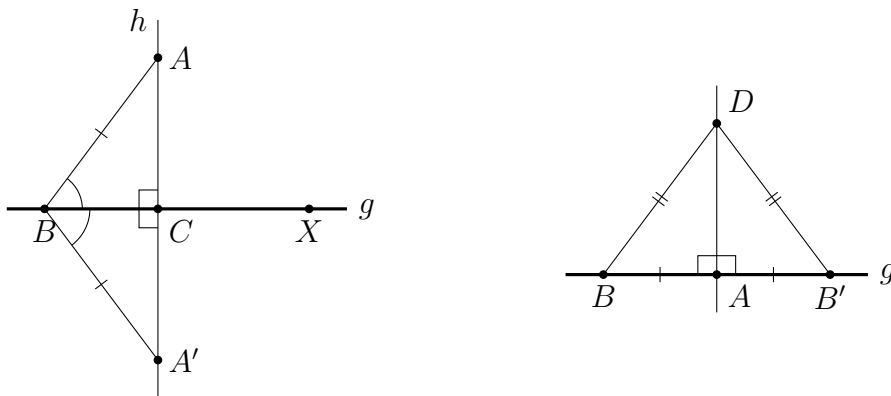
Entsteht beim Schnitt zweier Geraden ein rechter Winkel, so müssen nach Satz 1.4.8 schon alle vier Schnittwinkel rechte Winkel sein.

DEFINITION 1.4.34 (Orthogonale Geraden). Zwei Geraden werden *orthogonal* genannt, wenn sie sich in genau einem Punkt schneiden und dort (vier) rechte Schnittwinkel bilden. In diesem Fall sagen wir auch, dass die beiden Geraden *senkrecht* oder *normal* aufeinander stehen. Wir schreiben in diesem Fall auch  $g \perp h$ .

SATZ 1.4.35 (Lot, [Euklid, I§11 und I§12]). Zu einem Punkt  $A$  und einer Geraden  $g$  existiert genau eine Gerade, die durch  $A$  geht und normal auf  $g$  steht.

BEWEIS. Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $A$  nicht auf  $g$  liegt. Wir wählen zwei verschiedene Punkte  $B$  und  $X$  auf  $g$ . Auf der Seite von  $g$ , die  $A$  nicht enthält sei nun  $A'$  der Punkt mit  $\angle ABX \equiv \angle A'BX$  und  $AB \equiv A'B$ . Bezeichne  $h$  die Gerade durch  $A$  und  $A'$ . Da  $A$  und  $A'$  auf verschiedenen Seiten von  $g$  liegen, schneiden sich  $g$  und  $h$  in genau einem Punkt  $C$ . Stimmen  $B$  und  $C$  überein, dann folgt  $\angle ACX \equiv \angle A'CX$ , also stehen  $g$  und  $h$  normal aufeinander. O.B.d.A. sei daher  $B \neq C$ . Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die

Dreiecke  $ABC$  und  $A'BC$  kongruent. Insbesondere gilt  $\angle BCA \equiv \angle BCA'$ , also stehen  $g$  und  $h$  normal aufeinander. Somit ist  $h$  die gesuchte Normale. Um die Eindeutigkeit einzusehen, betrachten wir eine weitere Gerade  $h'$  durch  $A$ , die  $g$  im Punkt  $C'$  senkrecht trifft. Wäre  $C \neq C'$ , so wäre  $ACC'$  ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln, was Satz 1.4.23 widerspräche, vgl. Bemerkung 1.4.33. Also muss  $C = C'$  und daher auch  $h = h'$  gelten.



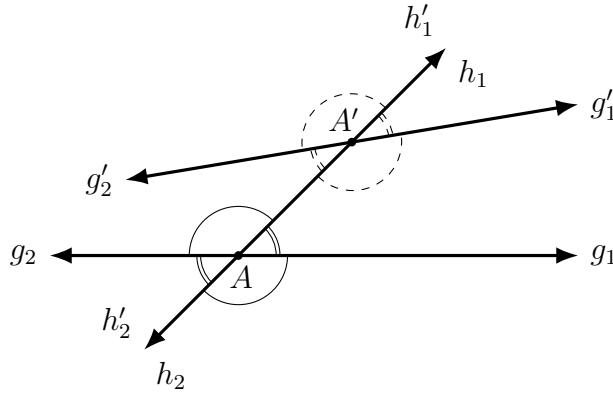
Wir wenden uns nun dem Fall zu, dass  $A$  auf  $g$  liegt. Wir folgen Euklids Beweis und wählen zwei Punkte  $B$  und  $B'$  auf  $g$ , die auf verschiedenen Seiten von  $A$  liegen und  $AB \equiv AB'$  erfüllen. Nach Lemma 1.4.18 existiert ein Punkt  $D$ , der nicht auf  $g$  liegt und  $BD \equiv B'D$  erfüllt. Nach Satz 1.4.17 (SSS) sind die Dreiecke  $BAD$  und  $B'AD$  kongruent. Insbesondere gilt  $\angle BAD \equiv \angle B'AD$ . Also steht die Gerade  $g(A, D)$  normal auf  $g$ . Die Eindeutigkeit der Normalen folgt aus Satz 1.4.30 und der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5.  $\square$

DEFINITION 1.4.36 (Lot). Sei  $A$  ein Punkt und  $g$  eine Gerade. Die nach Satz 1.4.35 eindeutig bestimmte Normale durch  $A$  auf  $g$  wird als *Lot durch  $A$  auf  $g$*  bezeichnet.

Winkel, die beim Schnitt zweier Geraden  $g$  und  $g'$  mit einer dritten, von  $g$  und  $g'$  verschiedenen Geraden  $h$  auf der selben Seite von  $h$  und auf entsprechenden Seiten von  $g$  und  $g'$  entstehen werden *Stufenwinkel* genannt. Winkel, die auf verschiedenen Seiten von  $h$  und entgegengesetzten Seiten von  $g$  und  $g'$  entstehen werden *Wechselwinkel* genannt. Wir wollen dies noch etwas genauer ausformulieren:

DEFINITION 1.4.37 (Stufen- und Wechselwinkel). Seien  $A$  und  $A'$  zwei Punkte auf einer Geraden  $h$ . Weiters sei  $g$  eine von  $h$  verschiedene Gerade, die  $h$  im Punkt  $A$  schneidet; und  $g'$  sei eine von  $h$  verschiedene Gerade, die  $h$  im Punkt  $A'$  schneidet. Es bezeichnen  $g_1$  und  $g_2$  die beiden Seiten von  $A$  in  $g$ . Weiters bezeichnen  $g'_1$  und  $g'_2$  die beiden Seiten von  $A'$  in  $g'$  so, dass  $g_1$  und  $g'_1$  auf der selben Seite von  $h$  liegen. Es bezeichnen  $h_1 := (AA'>$ ,  $h'_1 := A(A'>$ ,  $h'_2 := (A'A>$  und  $h_2 := A'(A>$ .

In dieser Situation wird das Winkelpaar  $\angle(g_1, h_1)$  und  $\angle(g'_1, h'_1)$  als *Stufenwinkel* bezeichnet. Auch das Winkelpaar  $\angle(g_1, h_2)$  und  $\angle(g'_1, h'_2)$ , das Winkelpaar  $\angle(g_2, h_1)$  und  $\angle(g'_2, h'_1)$  sowie das Winkelpaar  $\angle(g_2, h_2)$  und  $\angle(g'_2, h'_2)$  werden als Stufenwinkel bezeichnet. Besteht ein Stufenwinkelpaar aus kongruenten Winkeln, dann besteht jedes der vier Stufenwinkel-paare aus zwei kongruenten Winkeln. Dies folgt aus Satz 1.4.7. In diesem Fall sagen wir, dass *beim Schnitt von  $h$  mit  $g$  und  $g'$  kongruente Stufenwinkel entstehen*.



Das Winkelpaar  $\angle(g_1, h_1)$  und  $\angle(g'_2, h'_2)$  wird als *innere Wechselwinkel* bezeichnet. Auch das Winkelpaar  $\angle(g'_1, h'_2)$  und  $\angle(g_2, h_1)$  wird als innere Wechselwinkel bezeichnet. Das Winkelpaar  $\angle(g_1, h_2)$  und  $\angle(g'_2, h'_1)$  wird als *äußere Wechselwinkel* bezeichnet. Auch das Winkelpaar  $\angle(g_2, h_2)$  und  $\angle(g'_1, h'_1)$  wird als äußere Wechselwinkel bezeichnet. Besteht ein Wechselwinkelpaar aus kongruenten Winkeln, dann besteht jedes der vier Wechselwinkelpaare aus zwei kongruenten Winkeln. Dies folgt aus Satz 1.4.7. In diesem Fall sagen wir, dass *beim Schnitt von h mit g und g' kongruente Wechselwinkel entstehen*.

**BEMERKUNG 1.4.38.** Beachte, dass beim Schnitt von  $h$  mit  $g$  und  $g'$  kongruente Stufenwinkel genau dann entstehen, wenn kongruente Wechselwinkel entstehen. Dies folgt aus Satz 1.4.8.

**SATZ 1.4.39** (Stufenwinkel, [Euklid, I§27]). *Entstehen beim Schnitt einer Geraden  $h$  mit zwei Geraden  $g$  und  $g'$  kongruente Stufenwinkel (Wechselwinkel), dann sind  $g$  und  $g'$  parallel.*

**BEWEIS.** Wir verwenden die Notation von oben. Stimmen  $A$  und  $A'$  überein, dann folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 sofort  $g = g'$ , also sind  $g$  und  $g'$  in diesem Fall parallel. O.B.d.A. seien nun  $A$  und  $A'$  verschieden. Würden sich die beiden Halbstrahlen  $g_1$  und  $g'_1$  in einem Punkt  $X$  schneiden, dann wäre  $AA'X$  ein Dreieck mit einem Außenwinkel  $\angle XA'h'_1$ , der kongruent zu einem gegenüberliegenden Innenwinkel  $\angle XAA'$  wäre, was Satz 1.4.23 widerspräche. Also schneiden sich  $g_1$  und  $g'_1$  nicht. Analog lässt sich zeigen, dass sich auch  $g_2$  und  $g'_2$  nicht treffen. Schließlich können sich  $g_1$  und  $g'_2$  nicht schneiden, denn sie liegen auf verschiedenen Seiten von  $h$ , und dasselbe gilt für  $g'_1$  und  $g_2$ . Somit haben  $g$  und  $g'$  keinen Schnittpunkt und sind daher parallel.  $\square$

**1.5. Das Parallelenaxiom.** Zu den Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiomen nehmen wir nun noch folgendes Euklidische Axiom [Hilbert, §7] hinzu, das auch als Playfairs Axiom bezeichnet wird.

**P.** Ist  $g$  eine beliebige Gerade und  $A$  ein Punkt außerhalb  $g$ , dann gibt es höchstens eine Gerade, die durch  $A$  läuft und  $g$  nicht schneidet.

**SATZ 1.5.1** ([Euklid, I§30]). *Derselben geraden Linie parallele sind auch einander parallel. In anderen Worten: Sind zwei Geraden  $h$  und  $k$  beide parallel zu einer dritten Geraden  $g$ , dann müssen auch  $h$  und  $k$  parallel sein.*

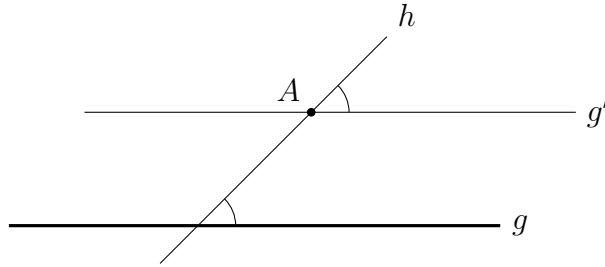
**BEWEIS.** Sind  $h$  und  $k$  disjunkt, dann sind sie parallel. O.B.d.A. existiere daher ein Schnittpunkt  $A \in h \cap k$ . Liegt  $A$  auch auf  $g$ , dann folgt aus  $h \parallel g$  und  $k \parallel g$  schon  $h = g = k$ ,

also  $h \parallel k$ . Liegt  $A$  nicht auf  $g$ , dann erhalten wir  $h = k$  aus Axiom P, und daher  $h \parallel k$ . In jedem Fall sind  $h$  und  $k$  daher parallel.  $\square$

**BEMERKUNG 1.5.2.** Parallel zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Geraden. Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich, die Transitivität folgt aus Satz 1.5.1.

**SATZ 1.5.3 ([Euklid, I§31]).** *Zu einer Geraden  $g$  und einem Punkt  $A$  gibt es stets genau eine Gerade durch  $A$ , die parallel zu  $g$  ist.*

**BEWEIS.** Liegt  $A$  auf  $g$ , dann ist  $g$  die einzige Gerade, die durch  $A$  läuft und parallel zu  $g$  ist. O.B.d.A. liege  $A$  nicht auf  $g$ . Wir folgen Euklids Konstruktion.



Sei  $h$  eine Gerade durch  $A$ , die  $g$  schneidet. Nach Axiom K5 existiert eine Gerade  $g'$  durch  $A$ , sodass beim Schnitt von  $h$  mit  $g$  und  $g'$  kongruente Stufenwinkel entstehen. Nach Satz 1.4.39 sind  $g$  und  $g'$  parallel. Die Eindeutigkeit der Parallelen folgt aus Axiom P.  $\square$

**SATZ 1.5.4 (Stufenwinkelsatz, [Euklid, I§27 und I§29]).** *Beim Schnitt einer Geraden  $h$  mit zwei Geraden  $g$  und  $g'$  entstehen genau dann kongruente Stufenwinkel (Wechselwinkel) wenn  $g$  und  $g'$  parallel sind.*

**BEWEIS.** Die eine Implikation haben wir bereits in Satz 1.4.39 gesehen. Für die umgekehrte Implikation sei nun  $g \parallel g'$ . Es bezeichne  $A$  den Schnittpunkt von  $h$  mit  $g'$ . Wie im Beweis von Satz 1.5.3 konstruieren wir eine Gerade  $g''$  durch  $A$ , sodass beim Schnitt von  $h$  mit  $g$  und  $g''$  kongruente Stufenwinkel entstehen. Nach Satz 1.4.39 gilt daher  $g \parallel g''$ . Aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1.5.3 folgt  $g' = g''$ . Also entstehen auch beim Schnitt von  $h$  mit  $g$  und  $g'$  kongruente Stufenwinkel.  $\square$

Nach Satz 1.4.30 sind alle rechten Winkel kongruent. Wir bezeichnen die entsprechende Kongruenzklasse mit  $R \in \mathcal{W}$ . Um ohne Einschränkungen mit Winkeln rechnen zu können, addieren wir (formal) zu den bisher betrachteten (geometrischen) Winkeln in  $\mathcal{W}$  noch beliebige ganzzahlige Vielfache des rechten Winkels  $R$ . Wir erhalten so eine Erweiterung  $\mathcal{W} \subseteq \tilde{\mathcal{W}}$ . Jedes Element in  $\tilde{\mathcal{W}}$  lässt sich in eindeutiger Weise in folgender Form schreiben:

$$\tilde{\alpha} = nR + \alpha, \quad \text{wobei } n \in \mathbb{Z} \text{ und } \alpha \in \mathcal{W} \text{ mit } \alpha \leq R. \quad (11)$$

Die Addition auf  $\mathcal{W}$  lässt sich in naheliegender Weise zu einer Addition auf  $\tilde{\mathcal{W}}$  erweitern. Dadurch wird  $\tilde{\mathcal{W}}$  zu einer abelschen Gruppe. Wie üblich bezeichnen wir das neutrale Element mit  $0 \in \tilde{\mathcal{W}}$  und das Inverse von  $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$  mit  $-\alpha$ . Die Ordnungsrelation auf  $\mathcal{W}$  lässt sich zu einer mit der Addition vertäglichen Totalordnung of  $\tilde{\mathcal{W}}$  ausdehnen. Sind  $\alpha, \beta, \gamma \in \tilde{\mathcal{W}}$  und ist  $\alpha < \beta$ , dann gilt also auch  $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ . Für die geometrischen Winkel erhalten wir

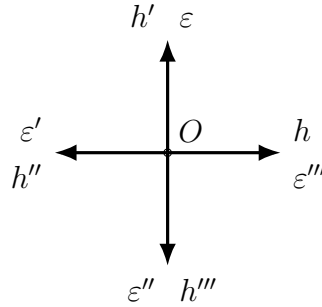
$$\mathcal{W} = \{\alpha \in \tilde{\mathcal{W}} : 0 < \alpha < 2R\}.$$

Wir wollen die Details dieser Konstruktionen hier nicht verifizieren.

BEMERKUNG 1.5.5. Nebenwinkel sind supplementär, d.h., sind  $\sphericalangle(g_1, h)$  und  $\sphericalangle(g_2, h)$  Nebenwinkel, dann gilt  $\sphericalangle(g_1, h) + \sphericalangle(g_2, h) = 2R$ .

BEMERKUNG 1.5.6. Auch in  $\tilde{\mathcal{W}}$  kann von  $2\alpha = 2\beta$  auf  $\alpha = \beta$  geschlossen werden. Andernfalls wäre auf Grund der Totalordnung o.B.d.A.  $\alpha < \beta$ , also  $\alpha + \alpha < \alpha + \beta < \beta + \beta$  wegen der Kompatibilität von Addition und Ordnungsrelation, und wir erhielten den Widerspruch  $2\alpha < 2\beta$ .

BEMERKUNG 1.5.7. Nach Axiom K5 können Winkel in  $\mathcal{W}$  an einem Halbstrahl auf einer gegebenen Seite abgetragen werden. Dies ist auch für Winkel in  $\tilde{\mathcal{W}}$  möglich. Seien dazu  $O$  ein Punkt,  $h$  ein Halbstrahl mit Ausgangspunkt  $O$ , und  $\varepsilon$  eine Seite der Trägergeraden  $g$  von  $h$ . Wir bezeichnen die andere Seite von  $g$  mit  $\varepsilon''$  und schreiben  $h''$  für den anderen von  $O$  ausgehenden Halbstrahl in  $g$ . Die beiden von  $O$  ausgehenden Halbstrahlen, die orthogonal auf  $g$  stehen, bezeichnen wir mit  $h'$  und  $h'''$ , wobei  $h'$  in  $\varepsilon$  und  $h'''$  in  $\varepsilon''$  liegen sollen. Schließlich bezeichnen  $\varepsilon'$  und  $\varepsilon'''$  die beiden Seiten der Trägergeraden von  $h'$ , wobei  $h''$  in  $\varepsilon'$  und  $h$  in  $\varepsilon'''$  liegen sollen. Wir wollen nun  $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}}$  an  $h$  auf der Seite  $\varepsilon$  abtragen und so einen von  $O$



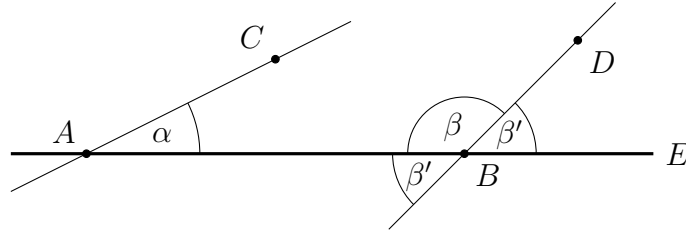
ausgehenden Halbstrahl  $k$  erhalten. Wir schreiben dazu  $\tilde{\alpha}$  in der Form (11) und unterscheiden vier Fälle:

- (1) Ist  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , dann sei  $k$  der eindeutige Halbstrahl in  $\varepsilon$  sodass  $\sphericalangle(h, k) = \alpha$ .
- (2) Ist  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , dann sei  $k$  der eindeutige Halbstrahl in  $\varepsilon'$  sodass  $\sphericalangle(h', k) = \alpha$ .
- (3) Ist  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , dann sei  $k$  der eindeutige Halbstrahl in  $\varepsilon''$  sodass  $\sphericalangle(h'', k) = \alpha$ .
- (4) Ist  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , dann sei  $k$  der eindeutige Halbstrahl in  $\varepsilon'''$  sodass  $\sphericalangle(h''', k) = \alpha$ .

Wir erhalten so eine Bijektion zwischen den Winkeln  $\{\alpha \in \tilde{\mathcal{W}} : 0 \leq \alpha < 4R\}$  und der Menge aller Halbstrahlen mit Ausgangspunkt  $O$ . Dem Winkel  $0 \in \tilde{\mathcal{W}}$  entspricht dabei der Halbstrahl  $h$ ; dem Winkel  $R \in \tilde{\mathcal{W}}$  entspricht der Halbstrahl  $h'$ ; dem Winkel  $2R \in \tilde{\mathcal{W}}$  entspricht der Halbstrahl  $h''$ ; und dem Winkel  $3R \in \tilde{\mathcal{W}}$  entspricht der Halbstrahl  $h'''$ .

SATZ 1.5.8 (Euklids Parallelenaxiom). Seien  $A, B$  zwei verschiedene Punkte und  $C, D$  zwei Punkte, die auf derselben Seite von  $g(A, B)$  liegen. Gilt in dieser Situation  $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABD < 2R$  dann schneiden sich die beiden Geraden  $g(A, C)$  und  $g(B, D)$  in einem Punkt, der auf derselben Seite von  $g(A, B)$  liegt, wie  $C$  und  $D$ .

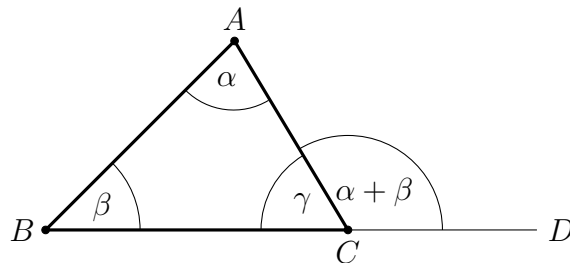
BEWEIS. Seien  $\alpha := \sphericalangle BAC$ ,  $\beta := \sphericalangle ABD$  und  $\beta' := \sphericalangle EBD$ , wobei  $E$  einen Punkt mit  $A * B * E$  bezeichnet. Nach Bemerkung 1.5.5 gilt  $\beta + \beta' = 2R$ . Zusammen mit der Voraussetzung  $\alpha + \beta < 2R$  erhalten wir  $\alpha < \beta'$ . Insbesondere sind die Stufenwinkel  $\alpha$  und  $\beta'$  verschieden, also können die Geraden  $g(A, C)$  und  $g(B, D)$  nicht parallel sein, siehe Satz 1.5.4. Somit existiert ein Schnittpunkt  $X$  dieser beiden Geraden. Da  $A \neq B$  kann  $X$



nicht auf  $g(A, B)$  liegen. Der Schnittpunkt  $X$  kann auch nicht auf der Seite von  $g(A, B)$  liegen, die  $C$  und  $D$  nicht enthält, denn sonst wäre  $ABX$  ein Dreieck, dessen Außenwinkel  $\alpha$  kleiner als der gegenüberliegender Innenwinkel  $\beta'$  wäre, was Satz 1.4.23 widerspräche. Damit muss der Schnittpunkt  $X$  auf derselben Seite von  $g(A, B)$  liegen, wie  $C$  und  $D$ .  $\square$

**BEMERKUNG 1.5.9.** Die Aussage von Satz 1.5.8 entspricht Euklids Parallelenaxiom. In [Euklid, I, Postulat 5] wird dies wie folgt formuliert: "... , dass wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind." Euklids Parallelenaxiom ist zu Playfairs Axiom P äquivalent, d.h. aus den Inzidenzaxiomen, den Anordnungsaxiomen, den Kongruenzaxiomen und Euklids Parallelenaxiom lässt sich (müheles) unser Axiom P herleiten.

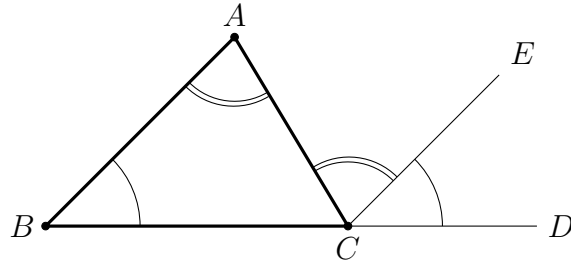
**SATZ 1.5.10** (Winkelsumme im Dreieck [Euklid, I§32]). *In jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel gleich groß, wie die Summe der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel, und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks sind zusammen zwei Rechten gleich. In anderen Worten, ist  $ABC$  ein Dreieck mit Winkeln  $\alpha := \sphericalangle CAB$ ,  $\beta := \sphericalangle ABC$ ,  $\gamma := \sphericalangle BCA$  und ist  $D$  ein Punkt mit  $B * C * D$ , dann gilt  $\sphericalangle ACD = \alpha + \beta$  sowie  $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ .*



**BEWEIS.** Wir folgen Euklids Beweis. Sei  $E$  ein Punkt auf derselben Seite der Geraden  $g(B, C)$  wie  $A$  so, dass  $g(A, B)$  und  $g(E, C)$  parallel sind, siehe Satz 1.5.3. Nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 gilt  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ECD$ . Da der Außenwinkel  $\sphericalangle ACD$  größer als  $\sphericalangle ABC$  ist, siehe Satz 1.4.23, liegt  $E$  im Inneren des Winkels  $\sphericalangle ACD$ . Insbesondere liegen  $E$  und  $B$  auf verschiedenen Seiten von  $g(A, C)$ , also bilden  $\sphericalangle BAC$  und  $\sphericalangle ECA$  Wechselwinkel. Aus dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 folgt daher  $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ECA$ . Insgesamt erhalten wir

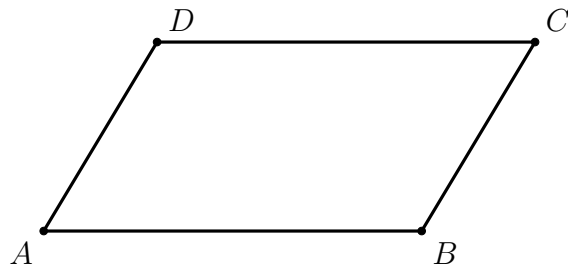
$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACE + \sphericalangle ECD = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC.$$

Da der Außenwinkel  $\sphericalangle ACD$  Nebenwinkel von  $\sphericalangle BCA$  ist erhalten wir nun für die Winkelsumme  $\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 2R$ , siehe Bemerkung 1.5.5.  $\square$



BEMERKUNG 1.5.11. Sind zwei Winkel eines Dreiecks zwei Winkeln eines anderen Dreiecks entsprechend kongruent, dann ist auch der dritte Winkel im einen Dreieck dem dritten Winkel im anderen Dreieck kongruent. Dies folgt aus Satz 1.5.10 und Satz 1.4.7.

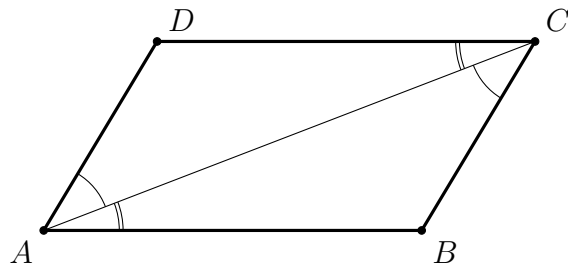
DEFINITION 1.5.12 (Parallelogramm). Unter einem Parallelogramm verstehen wir vier verschiedene Punkte  $ABCD$ , sodass  $g(A, B)$  und  $g(C, D)$  disjunkte Parallele sind, und auch  $g(B, C)$  und  $g(D, A)$  disjunkte Parallele sind.



SATZ 1.5.13 ([Euklid, I§34]). In jedem Parallelogramm  $ABCD$  sind gegenüberliegende Seiten und Winkel kongruent, d.h.

$$AB \equiv CD, \quad BC \equiv DA, \quad \angle ABC \equiv \angle CDA, \quad \angle DAB \equiv \angle BCD.$$

BEWEIS. Da  $g(A, B)$  und  $g(C, D)$  parallel sind, liegen  $C$  und  $D$  auf derselben Seite von  $g(A, B)$ . Ebenso liegen  $B$  und  $C$  auf derselben Seite von  $g(A, D)$ . Somit liegt  $C$  im Inneren des Winkels  $\angle DAB$ . Nach Proposition 1.2.38 schneidet der Halbstrahl ( $AC >$  die Strecke ( $BD$ )). Insbesondere liegen  $B$  und  $D$  auf verschiedenen Seiten von  $g(A, C)$ , also bilden  $\angle ACB$  und  $\angle CAD$  Wechselwinkel. Nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 gilt  $\angle ACB \equiv \angle CAD$  und  $\angle CAB \equiv \angle ACD$ . Nach Satz 1.4.2 (WSW) sind daher die Dreiecke  $ACB$  und  $CAD$



kongruent. Insbesondere gilt  $AB \equiv CD$ ,  $BC \equiv DA$  und  $\angle ABC \equiv \angle CDA$ . Die vierte Kongruenz,  $\angle DAB \equiv \angle BCD$ , folgt analog durch Betrachtung der anderen Diagonalen.  $\square$



Bisher haben wir  $|AB|$  nur für verschiedene Punkte  $A \neq B$  definiert. Ab nun wollen wir diese Notation auch für degenerierte Strecken verwenden und setzen daher  $|AA| := 0 \in \mathcal{K}$ . Für zwei Punkte  $A$  und  $B$  gilt daher  $|AB| = 0$  genau dann wenn  $A = B$ .

LEMMA 1.5.14 (Streckensymmetrale). *Ist  $AB$  eine Strecke, dann bildet die Menge*

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = |XB|\}$$

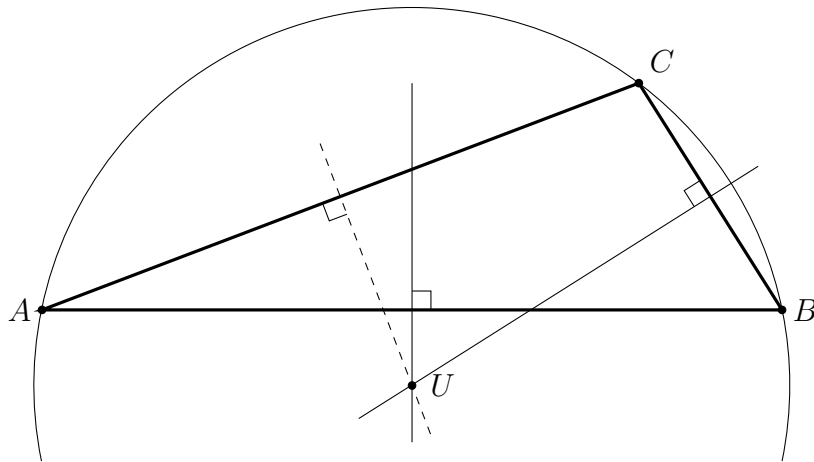
*eine Gerade, die durch den Mittelpunkt der Strecke  $AB$  geht und normal auf  $g(A, B)$  steht.*

BEWEIS. Dies folgt aus Satz 1.4.3 (SWS) und Satz 1.4.17 (SSS). (siehe Übungen)  $\square$

DEFINITION 1.5.15 (Streckensymmetrale). Die Gerade in Lemma 1.5.14 wird als *Streckensymmetrale* der Strecke  $AB$  bezeichnet.

DEFINITION 1.5.16 (Kreis). Unter dem *Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r \in \mathcal{P}$*  verstehen wir die Menge  $\Gamma = \{X \in \mathcal{E} : |XM| = r\}$ . Die Mengen  $\{X \in \mathcal{E} : |XM| < r\}$  und  $\{X \in \mathcal{E} : |XM| > r\}$  heißen *Inneres* bzw. *Äußeres* des Kreises  $\Gamma$ . Ist  $A \in \Gamma$  dann wird die Strecke  $MA$  als *Radius* bezeichnet. Unter einer *Sehne* von  $\Gamma$  verstehen wir jede Strecke  $AB$ , deren Endpunkte  $A$  und  $B$  auf  $\Gamma$  liegen. Eine Sehne, die den Mittelpunkt enthält, wird *Durchmesser* genannt.

SATZ 1.5.17 (Umkreismittelpunkt [Euklid, IV§5]). *In jedem Dreieck schneiden sich die Streckensymmetralen der drei Seiten in einem Punkt  $U$ . Die Eckpunkte des Dreiecks liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt  $U$ , und dies ist der einzige Kreis, der alle drei Eckpunkte enthält.*



BEWEIS. Sei  $ABC$  ein Dreieck. Nach Lemma 1.5.14 sind die beiden Streckensymmetralen  $\{X \in \mathcal{E} : |XA| = |XB|\}$  und  $\{X \in \mathcal{E} : |XB| = |XC|\}$  Geraden. Diese beiden Geraden können nicht parallel sein, denn sonst wären nach Satz 1.5.4 (Stufenwinkel) auch  $g(A, B)$  und  $g(B, C)$  parallel, also  $g(A, B) = g(B, C)$  und  $ABC$  kein Dreieck. Somit schneiden sich die beiden Streckensymmetralen in genau einem Punkt  $U$ . Für diesen Punkt gilt  $|UA| = |UB| = |UC|$ , also liegt  $U$  auch auf der dritten Streckensymmetrale. Da die Eckpunkte  $A, B, C$  alle denselben Abstand von  $U$  haben liegen sie auf einem Kreis mit Mittelpunkt  $U$ . Der Mittelpunkt jedes weiteren Kreises durch  $A, B, C$  muss im Schnitt der Streckensymmetralen liegen und daher mit  $U$  übereinstimmen.  $\square$

DEFINITION 1.5.18 (Umkreis). Der Kreis in Satz 1.5.17 wird als *Umkreis* des Dreiecks bezeichnet. Sein Mittelpunkt heißt *Umkreismittelpunkt* und sein Radius *Umkreisradius*.

BEMERKUNG 1.5.19. Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, geht stets genau ein Kreis, siehe Satz 1.5.17.

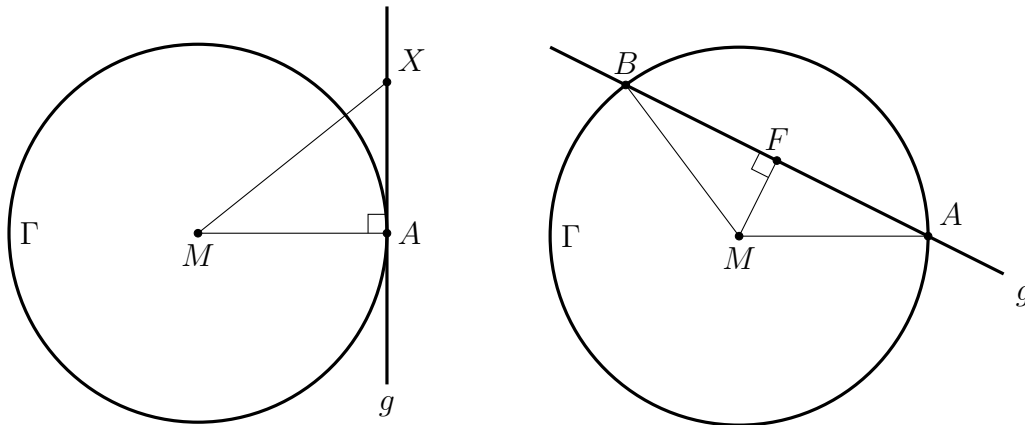
BEMERKUNG 1.5.20. Ein Kreis kann eine Gerade in höchstens zwei verschiedenen Punkten schneiden. Lügen nämlich drei verschiedene Punkte  $A, B, C$  eines Kreises auf einer Geraden, dann wären die Streckensymmetralen zu  $AB$  und  $BC$  nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 parallel, also disjunkt, aber der Mittelpunkt des Kreises müsste im Schnitt dieser Streckensymmetralen liegen, siehe Lemma 1.5.14.

BEMERKUNG 1.5.21. Jede Gerade durch den Mittelpunkt eines Kreises schneidet den Kreis in genau zwei verschiedenen Punkten, siehe Axiom K2.

DEFINITION 1.5.22 (Tangent an Kreis). Wir sagen eine Gerade *berührt* einen Kreis, wenn sie ihn in genau einem Punkt schneidet. In diesem Fall wird die Gerade auch als *Tangente* an den Kreis bezeichnet.

SATZ 1.5.23 ([Euklid, III§16 und III§18]). Sei  $\Gamma$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und  $A$  ein Punkt auf  $\Gamma$ . Eine Gerade  $g$  durch  $A$  ist genau dann tangential an den Kreis  $\Gamma$  wenn  $g(M, A)$  orthogonal auf  $g$  steht. In diesem Fall liegt  $g \setminus \{A\}$  zur Gänze außerhalb des Kreises.

BEWEIS. Wir nehmen zunächst an, dass  $g(M, A)$  orthogonal auf  $g$  steht. Ist  $X$  ein von  $A$  verschiedener Punkt auf  $g$ , dann bildet  $MAX$  ein rechtwinkeliges Dreieck mit Hypotenuse  $MX$  und Kathete  $MA$ . Somit gilt  $|MA| < |MX|$ , siehe Bemerkung 1.4.33, also liegt  $X$  im Äußeren von  $\Gamma$ . Dies zeigt, dass  $g \setminus \{A\}$  zur Gänze außerhalb des Kreises liegt. Insbesondere kann neben  $A$  kein weiterer Punkt von  $g$  auf  $\Gamma$  liegen, also ist  $g$  tangential an den Kreis.



Für die umgekehrte Implikation sei nun  $g$  tangential an  $\Gamma$ . Wir gehen indirekt vor und nehmen an, dass  $g(M, A)$  nicht orthogonal auf  $g$  steht. Es bezeichne  $F$  den Fußpunkt des Lots auf  $g$  durch  $M$ . Es gilt daher  $F \neq A$ . Auf der Seite von  $F$  in  $g$ , die  $A$  nicht enthält, sei  $B$  der Punkt mit  $|FA| = |FB|$ . Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die (rechtwinkligen) Dreiecke  $MFA$  und  $MFB$  kongruent. Insbesondere folgt  $|MB| = |MA|$ , also liegt auch  $B$  am Kreis  $\Gamma$ . Somit sind  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Schnittpunkte von  $g$  und  $\Gamma$ , ein Widerspruch.  $\square$

DEFINITION 1.5.24 (Normalabstand). Sei  $g$  eine Gerade,  $A$  ein Punkt und  $F$  der Schnittpunkt des Lots durch  $A$  auf  $g$  (Fußpunkt), siehe Definition 1.4.36. Unter dem Normalabstand von  $A$  zu  $g$  verstehen wir  $d(A, g) := |AF|$ .

BEMERKUNG 1.5.25. Für eine Gerade  $g$  und einen Punkt  $A$  gilt  $d(A, g) = 0$  genau dann wenn  $A \in g$ .

BEMERKUNG 1.5.26. Ist  $g$  ein Gerade und  $A$  ein Punkt, dann gilt  $|AX| > d(A, g)$  für jeden Punkt  $X$  auf  $g \setminus \{A\}$ . Dies ist offensichtlich wenn  $A$  auf  $g$  liegt, siehe Bemerkung 1.5.25. Liegt  $A$  nicht auf  $g$  dann folgt dies, wie im Beweis von Satz 1.5.23, aus Bemerkung 1.4.33. Der Fußpunkt des Lots durch  $A$  auf  $g$  ist daher der eindeutige Punkt auf  $g$  mit minimalen Abstand zu  $A$ .

BEMERKUNG 1.5.27. Sei  $g$  Gerade und  $M$  ein Punkt, der nicht auf  $g$  liegt. Dann berührt der Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r = d(A, g)$  die Gerade  $g$  im Fußpunkt des Lots durch  $M$  auf  $g$ , siehe Satz 1.5.23, und dies ist der einzige Kreis mit Mittelpunkt  $M$ , der  $g$  berührt, siehe Satz 1.4.35.

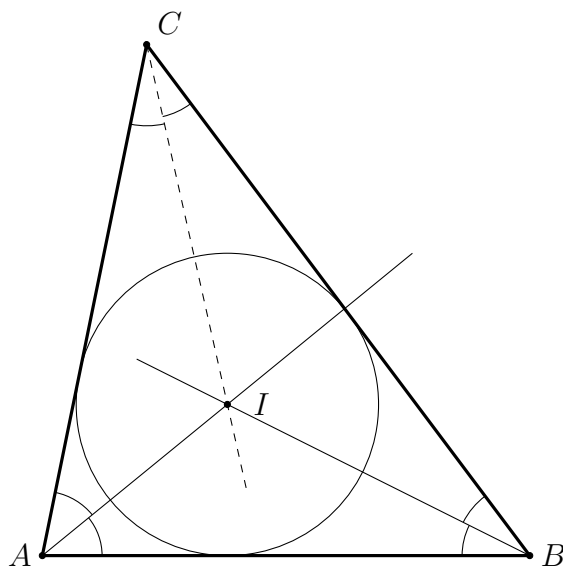
LEMMA 1.5.28 (Winkelsymmetrale). Sei  $\angle(h_1, h_2)$  ein Winkel und bezeichne  $W$  sein Inneres. Weiters sei  $g_1$  die Trägergerade von  $h_1$ , und  $g_2$  bezeichne die Trägergerade von  $h_2$ . Dann stimmt die Menge

$$\{X \in W : d(X, g_1) = d(X, g_2)\}$$

mit der Winkelsymmetrale von  $\angle(h_1, h_2)$  überein, vgl. Definition 1.4.20. Ist  $X$  ein Punkt der Winkelsymmetrale, dann liegen die Fußpunkte der Lote durch  $X$  auf  $g_1$  und  $g_2$  auf den Schenkeln  $h_1$  und  $h_2$ .

BEWEIS. Dies folgt aus Satz 1.4.26 (SWW) und Satz 1.4.27 (SSW) für rechtwinkelige Dreiecke, vgl. Bemerkung 1.4.33. (siehe Übungen)  $\square$

SATZ 1.5.29 (Inkreismittelpunkt [**Euklid**, IV§4]). In jedem Dreieck schneiden sich die drei Winkelsymmetralen in einem Punkt im Inneren des Dreiecks. Dies ist der Mittelpunkt eines Kreises, der alle drei Dreiecksseiten berührt. Es gibt keinen weiteren Kreis, der alle drei Dreiecksseiten berührt.



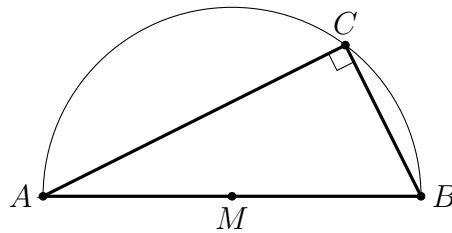
BEWEIS. Sei  $ABC$  ein Dreieck. Nach Proposition 1.2.38 schneidet die Winkelsymmetrale des Winkels  $\angle CAB$  die Seite  $BC$  im Inneren. Erneutes Anwenden von Proposition 1.2.38 zeigt, dass sich die Winkelsymmetralen der Winkel  $\angle CAB$  und  $\angle ABC$  in einem Punkt  $I$  im Inneren des Dreiecks schneiden. Nach Lemma 1.5.28 gilt

$$r := d(I, g(C, A)) = d(I, g(A, B)) = d(I, g(B, C)),$$

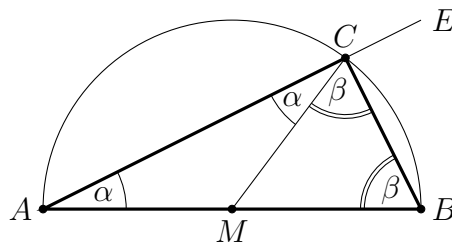
und  $I$  liegt auch auf der Winkelsymmetrale des dritten Winkels  $\angle BCA$ . Nach Bemerkung 1.5.27 berührt der Kreis mit Mittelpunkt  $I$  und Radius  $r$  jede der drei Geraden  $g(A, B)$ ,  $g(B, C)$ ,  $g(C, A)$  in den Fußpunkten der Lote durch  $I$ . Diese Fußpunkte liegen auf den entsprechenden Dreiecksseiten, siehe Lemma 1.5.28. Berührt ein weiterer Kreis jede der drei Geraden  $g(A, B)$ ,  $g(B, C)$ ,  $g(C, A)$  in Punkten auf den Dreiecksseiten, dann muss sein Mittelpunkt im Schnitt der drei Winkelsymmetralen liegen und daher mit  $I$  übereinstimmen. Dies zeigt die Eindeutigkeitsaussage im Satz.  $\square$

DEFINITION 1.5.30 (Inkreis). Der Kreis in Satz 1.5.29 wird als *Inkreis* des Dreiecks bezeichnet. Sein Mittelpunkt heißt *Inkreismittelpunkt* und sein Radius *Inkreisradius*.

SATZ 1.5.31 (Satz von Thales [Euklid, III§31]). *Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel. In anderen Worten, ist  $AB$  Durchmesser eines Kreises  $\Gamma$  und ist  $C$  ein weiterer, von  $A$  und  $B$  verschiedener Punkt auf  $\Gamma$  dann ist  $\angle BCA$  ein rechter Winkel.*

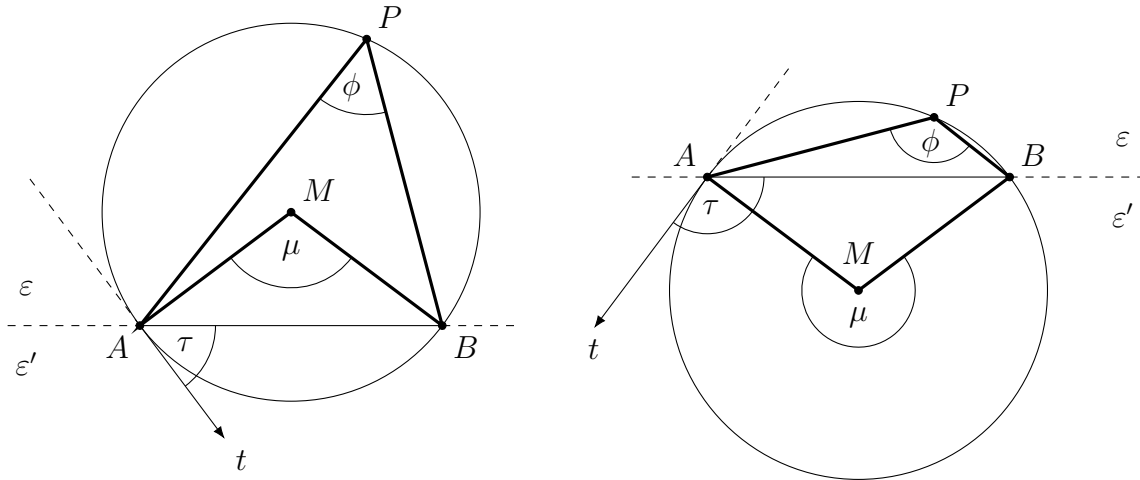


BEWEIS. Bezeichne  $M$  den Mittelpunkt des Kreises  $\Gamma$ . Da  $AB$  Durchmesser ist liegt  $M$  zwischen  $A$  und  $B$ . Da  $A, B, C$  alle auf  $\Gamma$  liegen gilt  $|AM| = |BM| = |CM|$ . Aus Satz 1.4.4



erhalten wir  $\alpha := \sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA$  sowie  $\beta := \sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB$ . Da  $M$  im Inneren des Winkels  $\angle BCA$  liegt folgt  $\sphericalangle BCA = \alpha + \beta$ . Sei  $E$  ein Punkt mit  $A * C * E$ . Nach Satz 1.5.10 gilt auch  $\sphericalangle BCE = \alpha + \beta$ . Somit ist  $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BCE$  und  $\angle BCA$  daher ein rechter Winkel.  $\square$

Wir betrachten einen Kreis  $\Gamma$  mit Mittelpunkt  $M$ . Weiters seien  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte auf  $\Gamma$ . Wir bezeichnen die beiden Seiten von  $g(A, B)$  mit  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$ . Sei  $P$  ein Punkt auf  $\Gamma$ , der in der Halbebene  $\varepsilon$  liegt. Der Winkel  $\phi := \sphericalangle APB$  wird *Peripheriewinkel*



genannt. Bezeichne  $t$  den von  $A$  ausgehenden Halbstrahl, der orthogonal auf den Radius  $MA$  steht und in der Halbebene  $\varepsilon'$  liegt. Der Winkel  $\tau := \sphericalangle(t, (AB))$  heißt *Tangentenwinkel*. Schließlich sei  $0 < \mu < 4R$ , jener Winkel der vom Halbstrahl  $(MA)$  auf der Seite, die  $t$  enthält, abgetragen werden muss, um  $(MB)$  zu erhalten, siehe Bemerkung 1.5.7. Dieser Winkel  $\mu$  wird *Mittelpunktswinkel* genannt.

**SATZ 1.5.32** (Peripherie- und Tangentenwinkelsatz [Euklid, III§20]). *In der zuvor beschriebenen Situation gilt  $2\phi = \mu = 2\tau$ .*

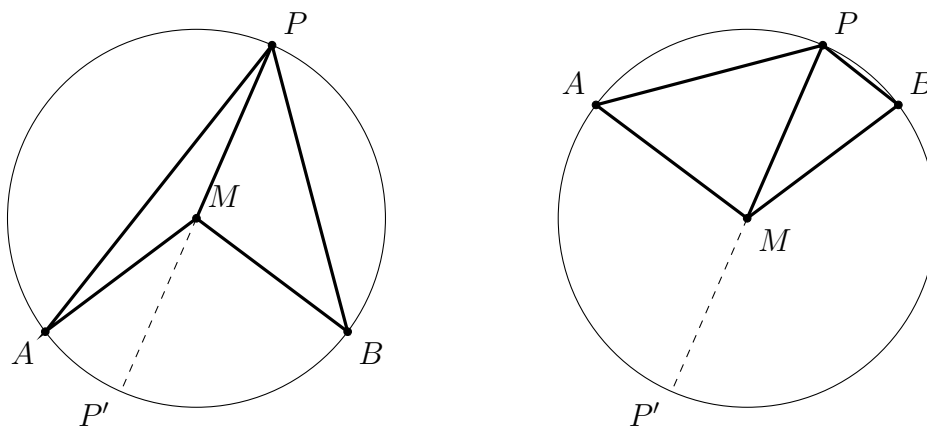
**BEWEIS.** Bezeichne  $P'$  den  $P$  gegenüber liegenden Punkt am Kreis, d.h.  $P * M * P'$ . Wir betrachten zunächst den Fall wo  $M$  im Inneren des Winkels  $APB$  liegt. Es gilt daher

$$\phi = \alpha + \beta \tag{12}$$

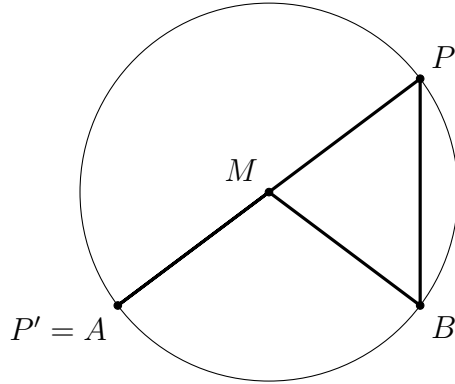
wobei  $\alpha := \sphericalangle APM$  und  $\beta := \sphericalangle BPM$ . Da  $A, B, P$  auf einem Kreis mit Mittelpunkt  $M$  liegen gilt  $|AM| = |PM| = |BM|$ . Daher auch  $\sphericalangle PAM = \alpha$  und  $\sphericalangle PBM = \beta$ , siehe Satz 1.4.4. Mit Satz 1.5.10 erhalten wir  $\sphericalangle AMP' = 2\alpha$  sowie  $\sphericalangle BMP' = 2\beta$ . Wir schließen daraus

$$2\alpha + 2\beta = \mu.$$

Mit (12) ergibt sich nun  $2\phi = \mu$ .



Wir betrachten nun den Fall, dass  $M$  auf  $(AP)$  liegt. Es gilt daher  $P' = A$  und  $\phi = \beta$ , wobei  $\beta := \sphericalangle BPM = \sphericalangle PBM$ . Wie zuvor folgt  $\sphericalangle BMP' = 2\beta$ , also  $2\beta = \mu$  und daher  $2\phi = \mu$ . Analog lässt sich der Fall, wo  $M$  auf  $(BP)$  liegt behandeln.



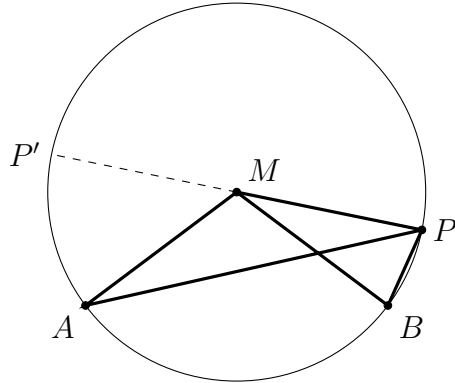
Wir betrachten nun den Fall, wo  $A$  im Inneren des Winkels  $\sphericalangle MPB$  liegt. Es gilt daher

$$\phi = \beta - \alpha \tag{13}$$

wobei  $\alpha = \sphericalangle APM$  und  $\beta = \sphericalangle BPM$ . Wie zuvor gilt  $\sphericalangle PAM = \alpha$  und  $\sphericalangle PBM = \beta$ , siehe Satz 1.4.4, also  $\sphericalangle AMP' = 2\alpha$  sowie  $\sphericalangle BMP' = 2\beta$  nach Satz 1.5.10, und daher

$$2\beta - 2\alpha = \mu.$$

Mit (13) ergibt sich wieder  $2\phi = \mu$ . Analog lässt sich der letzte verbleibende Fall behandeln, wo  $B$  im Inneren des Winkels  $\sphericalangle MPA$  liegt.



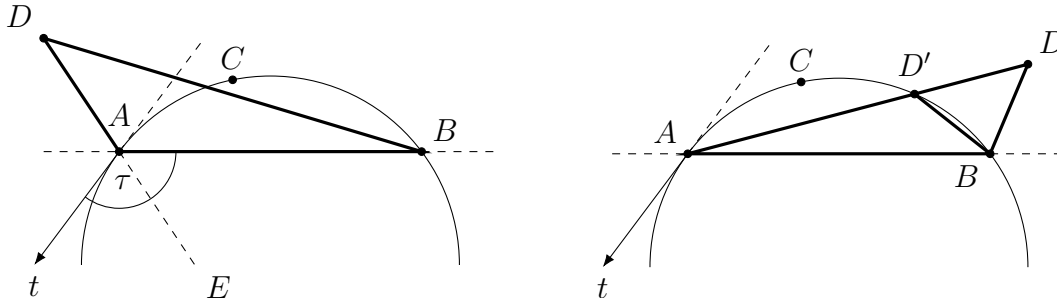
Es bleibt die Gleichung  $2\tau = \mu$  zu zeigen. Wir unterscheiden drei Fälle. Liegt  $M$  auf  $AB$ , dann gilt  $\tau = R$  und  $\mu = 2R$ , also  $2\tau = \mu$ . Liegt  $M$  in  $\varepsilon$ , dann gilt  $\sphericalangle AMB = \mu$  und  $\sphericalangle MBA = \sphericalangle MAB = R - \tau$ , siehe Satz 1.4.4, also  $\mu + 2(R - \tau) = 2R$  nach Satz 1.5.10, und daher  $2\tau = \mu$ . Liegt  $M$  in  $\varepsilon'$ , dann gilt  $\sphericalangle AMB = 4R - \mu$  und  $\sphericalangle MBA = \sphericalangle MAB = \tau - R$ , siehe Satz 1.4.4, also  $(4R - \mu) + 2(\tau - R) = 2R$  nach Satz 1.5.10, und daher  $2\tau = \mu$ .  $\square$

**BEMERKUNG 1.5.33.** Ist die Sehne  $AB$  in Satz 1.5.32 ein Durchmesser, dann ist  $\delta$  ein rechter Winkel und der Peripheriewinkelsatz spezialisiert sich zum Satz von Thales 1.5.31.

**SATZ 1.5.34** ([Euklid, III§21]). Sei  $AB$  eine Strecke und  $C, D$  zwei Punkte auf derselben Seite von  $g(A, B)$ . Die vier Punkte  $A, B, C$  und  $D$  liegen genau dann auf einem Kreis wenn  $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ADB$ .

BEWEIS. Die eine Implikation folgt direkt aus dem Peripheriewinkelsatz 1.5.32: Liegen die vier Punkte auf einem Kreis, dann muss  $\angle ACB \equiv \angle ADB$  erfüllt sein.

Für die umgekehrte Implikation sei nun  $\angle ACB \equiv \angle ADB$ . Betrachte den Kreis  $\Gamma$  durch  $A$ ,  $B$  und  $C$ , siehe Satz 1.5.17. Wir nehmen zunächst an, dass  $D$  auf der Seite der Tangente bei

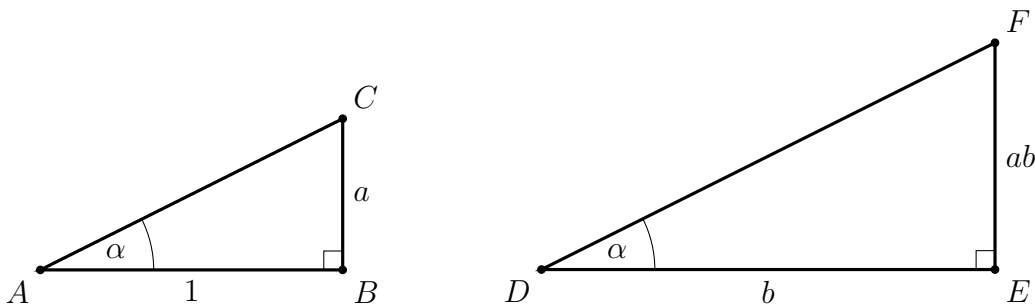


$A$  liegt, die  $B$  nicht enthält. Sei  $E$  ein Punkt mit  $D * A * E$ . Nach dem Außenwinkelsatz 1.4.23 gilt  $\sphericalangle ADB < \sphericalangle BAE$ . Da  $E$  im Inneren des Winkels  $\sphericalangle BAAt$  liegt ist  $\sphericalangle BAE < \tau$ , wobei  $\tau$  den Tangentwinkel bezeichnet. Aus Satz 1.5.32 erhalten wir  $\tau = \sphericalangle ACB$ . Kombination dieser Relationen führt auf den Widerspruch  $\sphericalangle ADB < \sphericalangle ACB$ . Das selbe Argument führt auch auf einen Widerspruch, wenn  $D$  auf der Tangente liegt.

Die Punkte  $D$  und  $B$  müssen somit auf derselben Seite der Tangente bei  $A$  liegen. Daher schneidet der Halbstrahl  $(AD>$  den Kreis in einem weiteren Punkt  $D'$ , siehe Satz 1.5.23. Aus dem Peripheriewinkelsatz 1.5.32 erhalten wir  $\sphericalangle AD'B = \sphericalangle ACB$ . Zusammen mit der Voraussetzung  $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ADB$  folgt  $\sphericalangle AD'B = \sphericalangle ADB$ . Nach dem Außenwinkelsatz 1.4.23 ist dies nur möglich, wenn  $D = D'$  gilt. Also liegt auch  $D$  auf dem Kreis  $\Gamma$ .  $\square$

Um Streckenlängen auch multiplizieren zu können, fixieren wir eine Einheitslänge, die wir mit  $1 \in \mathcal{P}$  bezeichnen. Eine Strecke  $AB$  wird als *Einheitsstrecke* bezeichnet, falls  $|AB| = 1$  gilt. Die folgende Definition des Produkts von Streckenlängen ist durch den Ähnlichkeitssatz für Dreiecke mit kongruenten Winkeln motiviert, vgl. Satz 1.5.43 unten.

DEFINITION 1.5.35 (Multiplikation von Streckenlängen [Hilbert, §15]). Sind  $a, b \in \mathcal{P}$  zwei Kongruenzklassen von Strecken, so definieren wir ihr Produkt,  $ab \in \mathcal{P}$ , wie folgt: Wir wählen ein Dreieck  $ABC$  mit rechtem Winkel  $\angle ABC$  so, dass  $|AB| = 1$  und  $|BC| = a$ . Weiters wählen wir ein Dreieck  $DEF$  mit rechtem Winkel  $\angle DEF$  so, dass  $\angle FDE \equiv \angle CAB$  und  $|DE| = b$ . Wir definieren nun  $ab := |EF|$ .



LEMMA 1.5.36. Die Multiplikation von Kongruenzklassen ist wohldefiniert.

BEWEIS. Ein Dreieck  $ABC$  wie in Definition 1.5.35 existiert nach Satz 1.4.35 und Axiom K3. Ein Dreieck  $CDE$  existiert nach Satz 1.4.35, Axiom K6 und Satz 1.5.8. Es bleibt zu zeigen, dass  $|EF|$  nicht von der Wahl dieser Dreiecke abhängt.

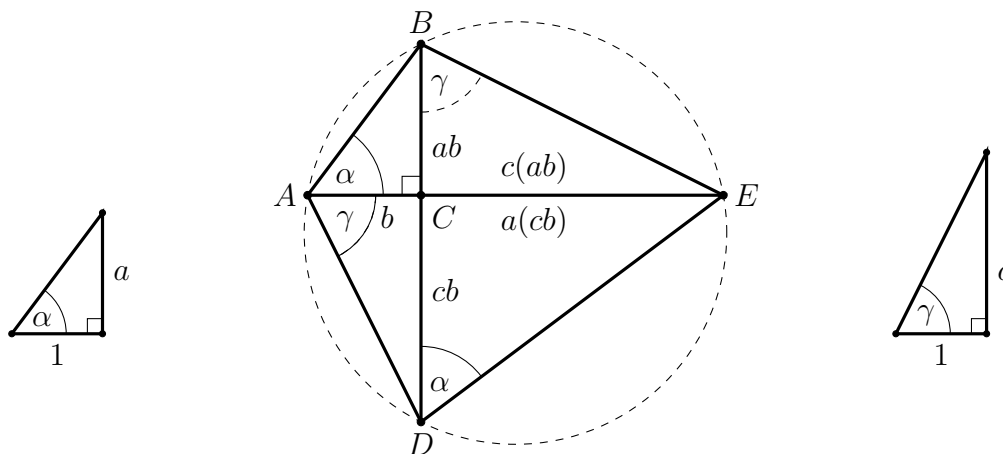
Sei dazu  $A'B'C'$  ein weiteres Dreieck mit rechtem Winkel  $\angle A'B'C'$  und so, dass  $|A'B'| = 1$  und  $|B'C'| = a$ . Darüber hinaus sei  $D'E'F'$  ein weiteres Dreieck mit rechtem Winkel  $\angle D'E'F'$  und so, dass  $\angle F'D'E' \equiv \angle C'A'B'$  und  $|D'E'| = b$ . Es gilt daher  $AB \equiv A'B'$ ,  $BC \equiv B'C'$  und  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ . Aus Axiom K6 (SWS) folgt daher  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ . Somit  $\angle FDE \equiv \angle F'D'E'$ ,  $\angle DEF \equiv \angle D'E'F'$  und  $DE \equiv D'E'$ . Aus Satz 1.4.2 (WSW) erhalten wir  $EF \equiv E'F'$ , d.h.  $|EF| = |E'F'|$ . Dies zeigt, dass das Produkt  $ab$  nicht von der Wahl der Dreiecke abhängt.  $\square$

SATZ 1.5.37 (Rechenregeln für die Streckenmultiplikation [Hilbert, §15]). Für beliebige Elemente  $a, b, c \in \mathcal{P}$  gilt:

- (a)  $ab = ba$ . (Kommutativität)
- (b)  $(ab)c = a(bc)$ . (Assoziativität)
- (c)  $a \cdot 1 = a$ . (Einselement)
- (d) Es existiert  $a' \in \mathcal{P}$  mit  $aa' = 1$ . (multiplikatives Inverses)
- (e)  $a(b + c) = ab + ac$ . (Distributivität)

BEWEIS. Wir folgen hier der Darstellung in [Hartshorne, Proposition 19.2]. Wir beginnen mit (c): Ist  $b = 1$ , dann sind die Dreiecke  $ABC$  und  $DEF$  nach Satz 1.4.2 (WSW) kongruent, insbesondere  $EF \equiv BC$  und daher  $a \cdot 1 = |EF| = |BC| = a$ .

Um (a) und (b) zu zeigen, konstruieren wir, wie in der Skizze angedeutet, ein rechtwinkeliges Dreieck mit Katheten 1 und  $a$  um den Winkel  $\alpha$  zu erhalten. Analog konstruieren wir ein rechtwinkeliges Dreieck mit Katheten 1 und  $c$  um den Winkel  $\gamma$  zu erhalten. Wir betrachten nun ein Dreieck  $ABC$  mit rechtem Winkel  $\angle BCA$ ,  $|CA| = b$  und  $\angle CAB = \alpha$ . Nach Definition der Multiplikation gilt daher  $|CB| = ab$ . Wir tragen den Winkel  $\gamma$  von  $A$  aus auf der Seite von  $g(A, C)$  ab, die  $B$  nicht enthält, und bekommen einen Punkt  $D$  so, dass  $B * C * D$  und  $\angle CAD = \gamma$ . Nach Definition der Multiplikation gilt daher  $|CD| = cb$ . Schließlich tragen wir den Winkel  $\alpha$  von  $D$  aus auf der Seite von  $g(D, C)$  ab, die  $A$  nicht enthält, und bekommen einen Punkt  $E$  so, dass  $A * C * E$  und  $\angle CDE = \alpha$ . Alle vier Winkel bei  $C$  sind rechte Winkel. Nach Definition der Multiplikation gilt daher  $|CE| = a(cb)$ .



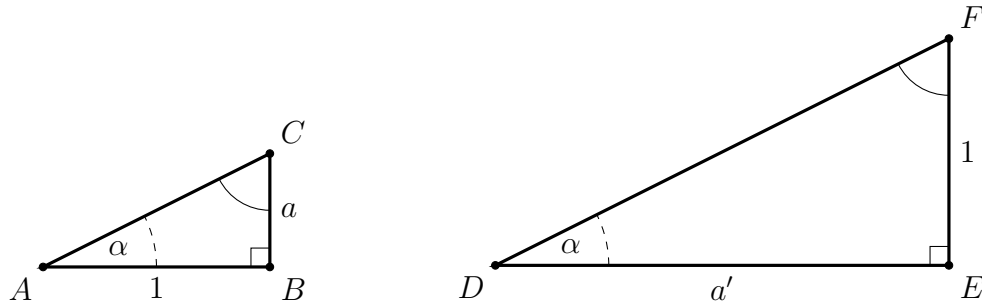


Nach Satz 1.5.34 liegen die vier Punkte  $A, B, D, E$  auf einem Kreis, denn  $\angle BAE \equiv \angle BDE$ . Erneutes Anwenden von Satz 1.5.34 zeigt  $\angle EBD \equiv \angle EAD$ , also  $\sphericalangle EBC = \gamma$ . Nach Definition der Multiplikation gilt daher auch  $|CE| = c(ab)$ . Aus den beiden Ausdrücken für  $|CE|$  erhalten wir

$$c(ab) = a(cb). \quad (14)$$

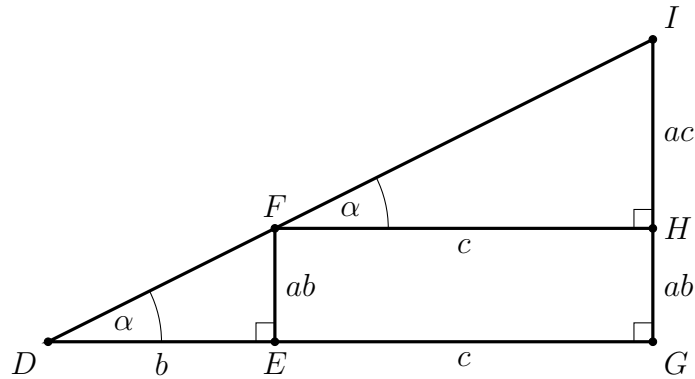
Setzen wir  $b = 1$  folgt mit (c) nun  $ca = ac$ , also ist die Multiplikation kommutativ. Mit der Kommutativität folgt aus (14) sofort  $(ab)c = a(bc)$  und damit auch die Assoziativität.

Ad (d): Nach Satz 1.4.35, Axiom K6 und Satz 1.5.8 existiert ein Dreieck  $DEF$  mit rechtem Winkel  $\angle DEF$  so, dass  $|EF| = 1$  und  $\angle EFD \equiv \angle BCA$ . Nach Bemerkung 1.5.11



gilt auch  $\angle CAB \equiv \angle FDE$ . Setzen wir  $a' := |DE|$ , so folgt  $aa' = |EF| = 1$ .

Ad (e): Wir wählen ein Dreieck  $EDF$  mit rechtem Winkel bei  $E$  so, dass  $\sphericalangle FDE = \alpha$  und  $|DE| = b$ . Es gilt daher  $|EF| = ab$ . Weiters sei  $G$  so, dass  $D * E * G$  und  $|EG| = c$ . Nach



Satz 1.5.8 schneidet die Normale auf  $g(D, G)$  durch  $G$  die Gerade  $g(D, F)$  in einem Punkt  $I$  auf der selben Seite von  $g(D, G)$  wie  $F$ . Nach Axiom A4 kann  $I$  nicht auf der Strecke  $DF$  liegen, es muss daher  $D * F * I$  gelten. Weiters ist  $|DG| = b + c$  und daher  $|GI| = a(b + c)$ . Nach Axiom A4 (Pasch) schneidet die Parallele zu  $g(E, G)$  durch  $F$  die Strecke  $GI$  in einem Punkt  $H$ , der zwischen  $G$  und  $I$  liegt, vgl. Satz 1.5.3. Nach Satz 1.5.4 (Stufenwinkel) ist (i) auch  $\angle FHI$  ein rechter Winkel; (ii)  $\sphericalangle IFH = \alpha$ ; und (iii) sind die Geraden  $g(E, F)$  und  $g(G, H)$  parallel. Insbesondere ist  $EFHG$  ein Parallelogramm, also  $|GH| = |EF| = ab$  sowie  $|FH| = |EG| = c$  nach Satz 1.5.13. Somit gilt auch  $|HI| = ac$ . Da  $G * H * I$  folgt nun

$$a(b + c) = |GI| = |GH| + |HI| = ab + ac.$$

Damit ist der Beweis vollständig. □

LEMMA 1.5.38. *Die Multiplikation auf  $\mathcal{P}$  lässt sich in eindeutiger Weise so zu einer Multiplikation auf  $\mathcal{K}$  ausdehnen, dass  $(\mathcal{K}, +, \cdot)$  ein Körper wird. Die oben fixierte Einheitslänge wird zum Einselement in  $\mathcal{K}$ .*

BEWEIS. Jedes Element in  $\mathcal{K}$  lässt sich in der Form  $a - b$  schreiben, wobei  $a, b \in \mathcal{P}$ . Ist  $\mathcal{K}$  ein Körper dann muss  $(a - b) \cdot (c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$  gelten, wobei auch  $c, d \in \mathcal{P}$ . Wir sehen daraus, dass das Produkt beliebiger Elemente in  $\mathcal{K}$  durch das Produkt von Elementen in  $\mathcal{P}$  völlig bestimmt ist. Es gibt daher höchstens eine Möglichkeit, die Multiplikation auf  $\mathcal{P}$  so auf ganz  $\mathcal{K}$  auszudehnen, dass  $(\mathcal{K}, +, \cdot)$  dadurch zu einem Körper wird. Dies motiviert auch folgende Definition.

Wir zeigen zunächst, dass durch  $[a, b] \cdot [c, d] := [ac + bd, ad + bc]$  auf  $\mathcal{K} = \mathcal{P} \times \mathcal{P} / \sim$  eine Multiplikation wohldefiniert ist, vgl. Lemma 1.3.7. Seien dazu  $(a, b) \sim (a', b')$  und  $(c, d) \sim (c', d')$ , wobei  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathcal{P}$ . Es gilt daher  $ab' = a'b$  und  $cd' = c'd$ . Mit diesen Relationen und den Rechenregeln in Satz 1.5.37 lässt sich sofort

$$(ac + bd)(a'd' + b'c') = (a'c' + b'd')(ad + bc)$$

verifizieren. Dies bedeutet  $(ac + bd, ad + bc) \sim (a'c' + b'd', a'd' + b'c')$ , also  $[ac + bd, ad + bc] = [a'c' + b'd', a'd' + b'c']$ . Somit ist die Multiplikation auf  $\mathcal{K}$  wohldefiniert.

Die Multiplikation auf  $\mathcal{K}$  ist kommutativ, denn mit Satz 1.5.37(a) folgt

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac + bd, ad + bc] = [ca + db, cb + da] = [c, d] \cdot [a, b].$$

Die Multiplikation auf  $\mathcal{K}$  ist assoziativ, denn nach Satz 1.5.37(b) und (e) stimmen

$$\begin{aligned} ([a, b] \cdot [c, d]) \cdot [e, f] &= [ac + bd, ad + bc] \cdot [e, f] \\ &= [(ac + bd)e + (ad + bc)f, (ac + bd)f + (ad + bc)e] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [a, b] \cdot ([c, d] \cdot [e, f]) &= [a, b] \cdot [ce + df, cf + de] \\ &= [a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + df)] \end{aligned}$$

für beliebige  $a, b, c, d, e, f \in \mathcal{P}$  überein.

Die Multiplikation auf  $\mathcal{K}$  ist distributiv, denn nach Satz 1.5.37(e) stimmen

$$[a, b] \cdot ([c, d] + [e, f]) = [a, b] \cdot [c + e, d + f] = [a(c + e) + b(d + f), a(d + f) + b(c + e)]$$

und

$$\begin{aligned} [a, b] \cdot [c, d] + [a, b] \cdot [e, f] &= [ac + bd, ad + bc] + [ae + bf, af + be] \\ &= [ac + bd + ae + bf, ad + bc + af + be] \end{aligned}$$

für beliebige  $a, b, c, d, e, f \in \mathcal{P}$  überein.

Weiters gilt

$$\iota(a) \cdot [c, d] = [ac, ad],$$

denn  $\iota(a) \cdot [c, d] = [a + b, b] \cdot [c, d] = [(a + b)c + bd, (a + b)d + bc] = [ac + (bc + bd), ad + (bc + bd)] = [ac, ad]$  nach Satz 1.5.37(e). Mit Satz 1.5.37(c) folgt daraus, dass  $1 := \iota(1)$  neutrales Element der Multiplikation auf  $\mathcal{K}$  ist. Wir erhalten daraus aber auch

$$\iota(a) \cdot \iota(c) = \iota(a) \cdot [c + d, d] = [a(c + d), ad] = [ac + ad, ad] = \iota(ac). \quad (15)$$

Dies zeigt, dass die eben definierte Multiplikation auf  $\mathcal{P}$  mit der ursprünglichen Multiplikation übereinstimmt. Wir sagen daher, die Multiplikation wurde auf  $\mathcal{K}$  ausgedehnt.

Nach Satz 1.5.37(d) existiert  $a' \in \mathcal{P}$  mit  $aa' = 1$ . Mit (15) folgt  $\iota(a)\iota(a') = \iota(aa') = \iota(1) = 1$ , also besitzen alle Elemente in  $\iota(\mathcal{P})$  multiplikative Inverse. Mit der Distributivität erhalten wir daraus auch  $(-\iota(a)) \cdot (-\iota(a')) = \iota(a) \cdot \iota(a') = 1$ , also haben auch alle Elemente in  $-\iota(\mathcal{P})$  multiplikative Inverse. Zusammen mit Lemma 1.3.7(e) folgt nun, dass alle Elemente in  $\mathcal{K} \setminus \{0\}$  ein multiplikatives Inverses besitzen. Somit ist  $(K, +, \cdot)$  ein Körper, siehe Lemma 1.3.7(c).  $\square$

**KOROLLAR 1.5.39.**  $(\mathcal{K}, +, \cdot, <)$  ist ein angeordneter Körper, d.h. die Ordnungsrelation ist eine mit Addition und Multiplikation verträgliche Totalordnung. Für  $a, b, c \in \mathcal{K}$  gilt daher:

- (a) Aus  $a < b$  folgt  $a + c < b + c$ .
- (b) Aus  $0 < a < b$  und  $0 < c$  folgt  $0 < ac < bc$ .

**BEWEIS.** Nach Korollar 1.3.10 ist die Ordnungsrelation auf  $\mathcal{K}$  eine Totalordnung, die mit der Addition verträglich ist. Nach (15) ist die Menge der positiven Elemente in  $\mathcal{K}$  abgeschlossen unter Multiplikation, vgl. Korollar 1.3.10(d). Sind nun  $0 < a < b$  und  $0 < c$ , dann gilt  $0 < b - a$ , also  $0 < (b - a)c = bc - ac$  und daher  $ac < bc$ .  $\square$

**DEFINITION 1.5.40** (Ähnliche Dreiecke). Zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  werden ähnlich genannt, wenn ihre Winkel entsprechend kongruent sind, d.h.

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C', \quad \angle BCA \equiv \angle B'C'A', \quad \angle CAB \equiv \angle C'A'B',$$

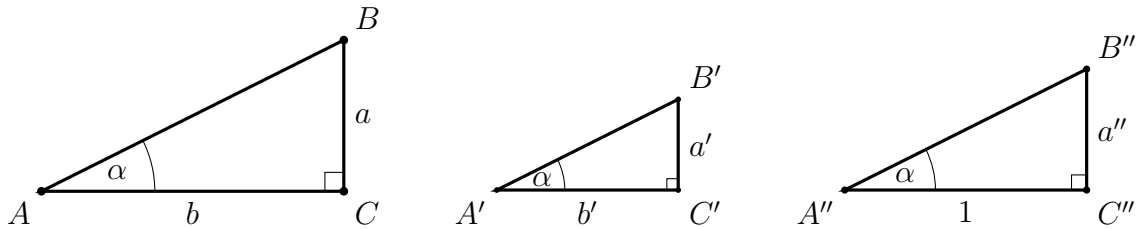
und ihre Seitenlängen entsprechend proportional sind, d.h.

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

**BEMERKUNG 1.5.41.** Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation für Dreiecke.

**LEMMA 1.5.42.** Sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei Dreiecke mit rechten Winkeln  $\angle BCA$  und  $\angle B'C'A'$ , für die  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$  erfüllt ist, dann gilt auch  $\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$ .

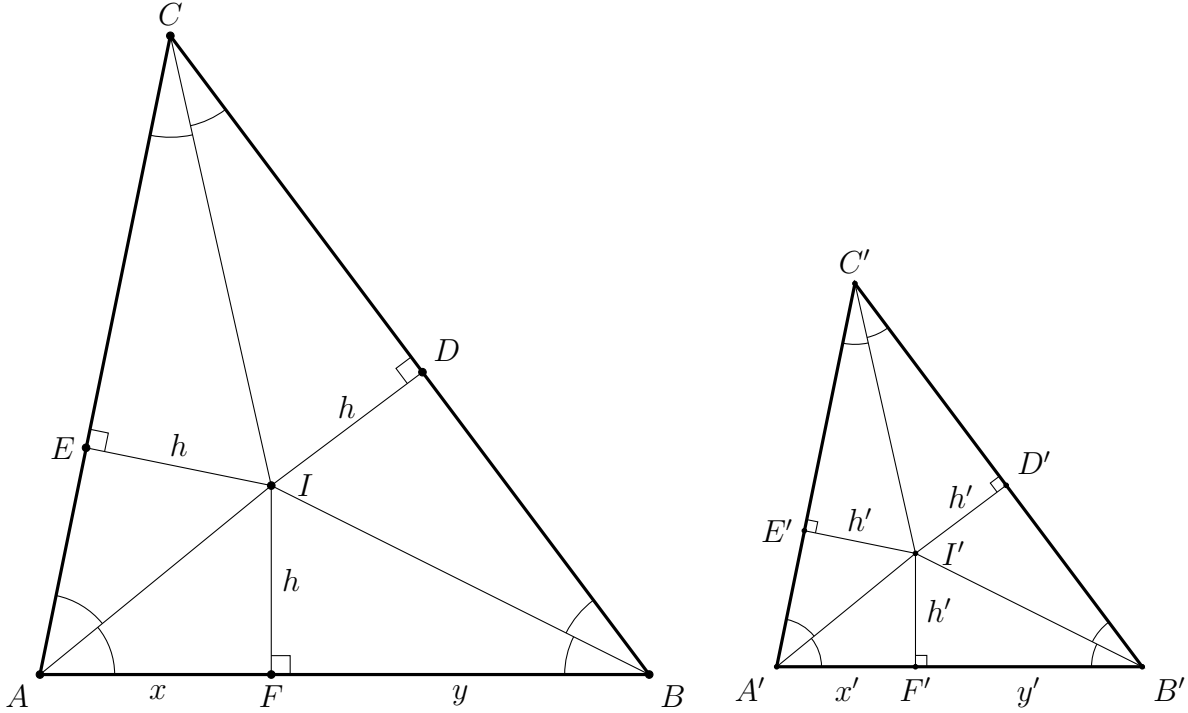
**BEWEIS.** Wir betrachten ein drittes Dreieck  $A''B''C''$  mit rechtem Winkel  $\angle B''C''A''$ , sodass  $\angle C''A''B'' \equiv \angle C'A'B' \equiv \angle CAB$  und  $|C''A''| = 1$ . Bezeichnen wir die Seitenlängen



wie in der Skizze angedeutet so folgt aus der Definition der Multiplikation sofort  $a = a''b$  sowie  $a' = a''b'$ . Mit den Rechenregeln in Satz 1.5.37 folgt durch Elimination von  $a''$  nun  $a/a' = b/b'$  und damit das Lemma.  $\square$

**SATZ 1.5.43** (W:W:W-Satz, [Euklid, VI§4]). Sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei Dreiecke, für die zwei der drei Kongruenzen  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ ,  $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$  und  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$  gelten, dann sind die Dreiecke ähnlich, d.h. auch die dritte Winkelkongruenz ist erfüllt und es gilt  $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$ .

BEWEIS. Wir folgen dem Beweis in [Hilbert, §16], siehe auch [Hartshorne, Proposition 20.1]. Da sich die Winkel im Dreieck auf zwei Rechte aufsummieren, muss auch die dritte Winkelkongruenz gelten, siehe Bemerkung 1.5.11. Wir verbinden den Inkreismittelpunkt  $I$  des Dreiecks  $ABC$  mit den Eckpunkten, fällen die Lote durch  $I$  auf die Trägergeraden der drei Seiten, und bezeichnen die Fußpunkte mit  $D, E, F$  wie in der Skizze angedeutet. Nach



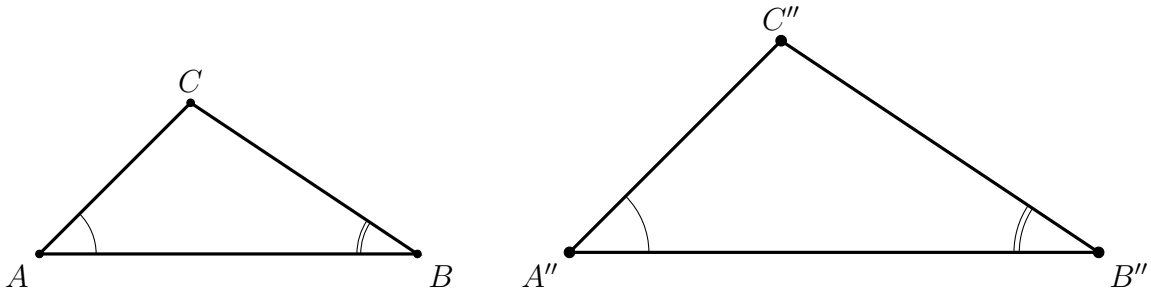
Satz 1.5.29 liegen die Fußpunkte auf den Seiten und es gilt  $h := |ID| = |IE| = |IF|$ . Die Winkelsymmetrale  $(AI >$  halbiert den Winkel  $\angle CAB$  und ebenso halbiert  $(A'I' >$  den Winkel  $\angle C'A'B'$ . Da  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$  gilt daher auch  $\angle IAF \equiv \angle I'A'F'$ . Aus Lemma 1.5.42 erhalten wir  $x/x' = h/h'$ , wobei  $x := |AF|$  und  $x' := |A'F'|$ . Analog folgt  $y/y' = h/h'$ , wobei  $y := |BF|$  und  $y' := |B'F'|$ . Mit den Rechenregeln in Satz 1.5.37 folgt

$$|AB| = x + y = x'h/h' + y'h/h' = (x' + y')h/h' = |A'B'|h/h',$$

also  $\frac{|AB|}{|A'B'|} = h/h'$ . Analog lässt sich  $\frac{|BC|}{|B'C'|} = h/h'$  und  $\frac{|CA|}{|C'A'|} = h/h'$  zeigen.  $\square$

SATZ 1.5.44 (S:W:S-Satz, [Euklid, VI§6]). Sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei Dreiecke, für die  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$  und  $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$  gelten, dann sind die Dreiecke ähnlich, d.h. es sind auch  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ ,  $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$  und  $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$  erfüllt.

BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. Nach Satz 1.5.8 existiert ein Dreieck  $A''B''C''$  mit  $A''B'' \equiv A'B'$ ,  $\angle C''A''B'' \equiv \angle CAB$  und  $\angle C''B''A'' \equiv \angle CBA$ . Nach Satz 1.5.43 sind die Dreiecke  $ABC$  und  $A''B''C''$  ähnlich. Insbesondere gilt  $\frac{|CA|}{|C''A''|} = \frac{|AB|}{|A''B''|}$ . Zusammen mit der Voraussetzung  $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$  folgt  $|C''A''| = |C'A'|$ , also  $C''A'' \equiv C'A'$ . Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke  $A'B'C'$  und  $A''B''C''$  daher kongruent. Somit ist das Dreieck  $ABC$  auch dem Dreieck  $A'B'C'$  ähnlich.  $\square$



SATZ 1.5.45 (S:S:S-Satz, [Euklid, VI§5]). Sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei Dreiecke für die  $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$  gilt, dann sind die Dreiecke ähnlich, d.h. es gilt auch  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ ,  $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$  und  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ .

BEWEIS. Wie im Beweis von Satz 1.5.44 lässt sich dies mit Satz 1.5.43 (W:W:W) auf Satz 1.4.17 (SSS) zurückführen. (siehe Übungen)  $\square$

SATZ 1.5.46 (S:S:W-Satz, [Euklid, VI§7]). Sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei Dreiecke für die  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$  und  $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$  gelten, und ist darüber hinaus auch  $|CA| \geq |AB|$ , dann sind die Dreiecke ähnlich, d.h. es gilt auch  $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$ ,  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$  und  $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$ .

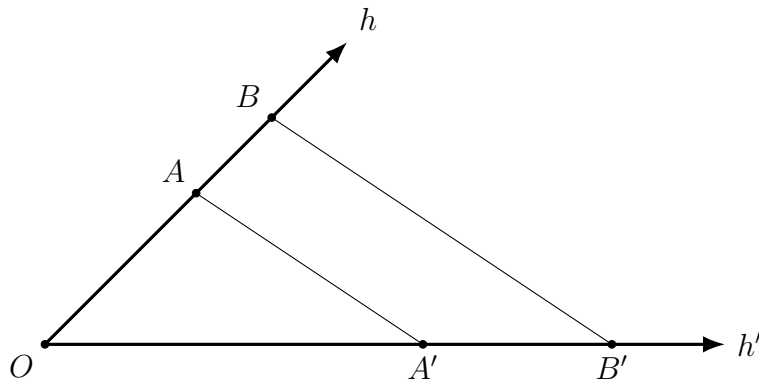
BEWEIS. Wie im Beweis von Satz 1.5.44 lässt sich dies mit Satz 1.5.43 (W:W:W) auf Satz 1.4.27 (SSW) zurückführen. (siehe Übungen)  $\square$

SATZ 1.5.47 (Strahlensatz [Euklid, VI§2]). Sei  $\angle(h, h')$  ein Winkel mit Scheitel  $O$ . Weite rs seien  $A, B \in h$  und  $A', B' \in h'$ . Dann sind die Trägergeraden von  $AA'$  und  $BB'$  genau dann parallel, wenn

$$\frac{|AO|}{|BO|} = \frac{|A'O|}{|B'O|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{|AO|}{|A'O|} = \frac{|BO|}{|B'O|}.$$

In diesem Fall gilt darüberhinaus

$$\frac{|AO|}{|BO|} = \frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{|A'O|}{|B'O|}. \quad (16)$$



BEWEIS. Wir nehmen zunächst an, dass  $g(A, A')$  und  $g(B, B')$  parallel sind. Nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 gilt daher  $\sphericalangle OAA' = \sphericalangle OBB'$ , denn  $A'$  und  $B'$  liegen auf derselben Seite von  $g(A, B)$ . Nach Satz 1.5.43 (W:W:W) sind die Dreiecke  $OAA'$  und  $OBB'$  daher ähnlich, also gilt (16).

Sei nun umgekehrt  $\frac{|AO|}{|BO|} = \frac{|A'O|}{|B'O|}$ . Nach Satz 1.5.44 (S:W:S) sind die Dreiecke  $OAA'$  und  $OBB'$  ähnlich. Insbesondere ist  $\sphericalangle OAA' \equiv \sphericalangle OBB'$ . Da  $A'$  und  $B'$  auf derselben Seite von  $g(A, B)$  liegen, folgt aus dem Stufenwinkelsatz 1.5.4, dass die Geraden  $g(A, A')$  und  $g(B, B')$  parallel sind.  $\square$

BEMERKUNG 1.5.48. In der Situation von Satz 1.5.47 lässt sich aus  $\frac{|AO|}{|BO|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}$  nicht auf die Parallelität von  $g(A, A')$  und  $g(B, B')$  schließen. (siehe Übungen)

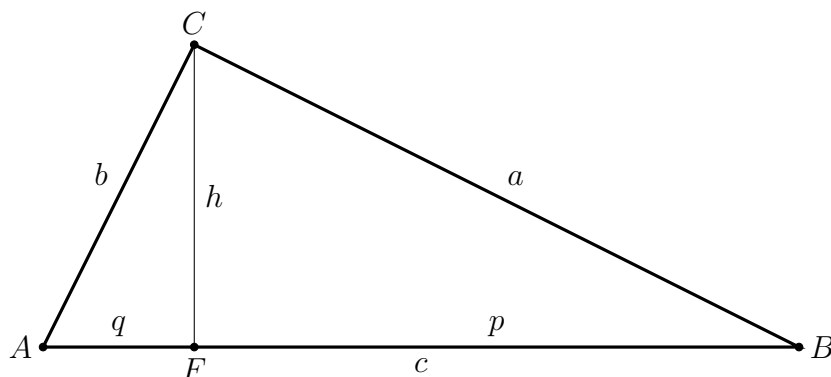
SATZ 1.5.49 (Satzgruppe des Pythagoras [Euklid, I§47, II§14, VI§8]). Sei  $ABC$  ein Dreieck mit rechtem Winkel  $\sphericalangle BCA$ . Dann liegt der Fußpunkt  $F$  des Lots durch  $C$  auf  $g(A, B)$  im Inneren der Seite  $AB$ . Bezeichnen  $a := |BC|$ ,  $b := |CA|$ ,  $c := |AB|$ ,  $h := |FC|$ ,  $p := |BF|$  und  $q := |AF|$ , dann gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

$$a^2 = cp \quad (\text{Kathetensatz})$$

$$b^2 = cq \quad (\text{Kathetensatz})$$

$$h^2 = pq \quad (\text{Höhensatz})$$



BEWEIS. Da die Winkel  $\sphericalangle CAB$  und  $\sphericalangle ABC$  beide spitz sind, siehe Bemerkung 1.4.33, liegt  $F$  im Inneren der Strecke  $AB$ . Insbesondere gilt  $c = p + q$ . Da  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CBF$  und da  $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BFC$  sind die Dreiecke  $ABC$  und  $CBF$  nach Satz 1.5.43 ähnlich. Es gilt daher  $c/a = a/p$ , also  $a^2 = cp$ . Da  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FAC$  und da  $\sphericalangle BCA = \sphericalangle CFA$  sind die Dreiecke  $ABC$  und  $ACF$  nach Satz 1.5.43 ähnlich. Es gilt daher  $c/b = b/q$ , also  $b^2 = cq$ . Nach Bemerkung 1.5.41 sind auch die Dreiecke  $CBF$  und  $ACF$  ähnlich, also gilt  $p/h = h/q$  und daher  $h^2 = pq$ . Addition der beiden Kathetensätze liefert  $a^2 + b^2 = cp + cq = c(p + q) = c^2$ .  $\square$

SATZ 1.5.50 (Umkehrung des pythagoräischen Lehrsatzes [Euklid, I§48]). Ist  $ABC$  ein Dreieck und gilt  $|BC|^2 + |CA|^2 = |AB|^2$ , dann muss  $\sphericalangle BCA$  ein rechter Winkel sein.

BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. Betrachte ein Dreieck  $A'B'C'$  mit rechtem Winkel  $B'C'A'$ , sodass  $|C'A'| = |CA|$  und  $|B'C'| = |BC|$ . Nach Satz 1.5.49 gilt

$$|A'B'|^2 = |B'C'|^2 + |C'A'|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 = |AB|^2$$

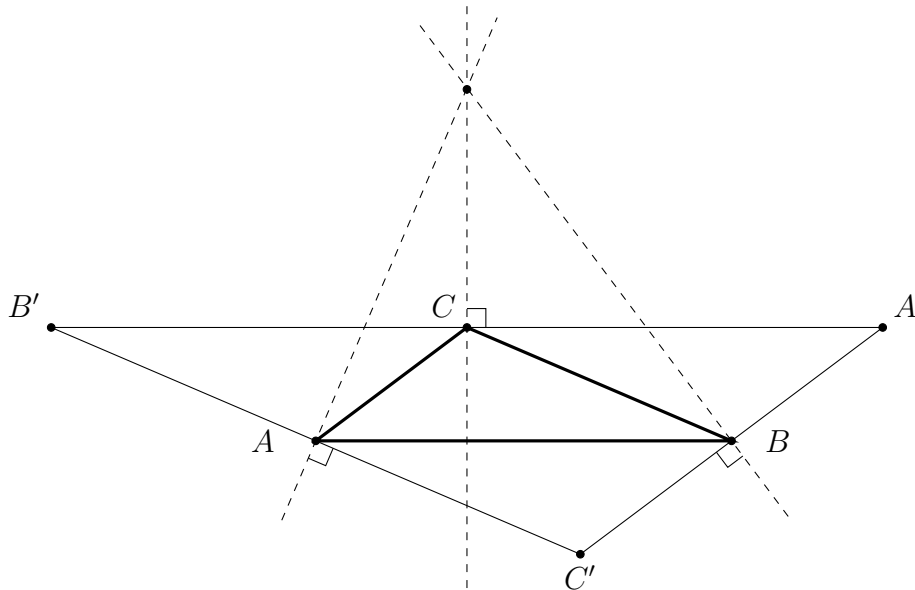
und daher auch  $|A'B'| = |AB|$ . Nach Satz 1.4.17 (SSS) sind die Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  daher kongruent. Insbesondere ist  $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$  ein rechter Winkel.  $\square$

DEFINITION 1.5.51 (Höhen eines Dreiecks). Sei  $ABC$  ein Dreieck. Unter der Höhe durch  $A$  verstehen wir das Lot durch  $A$  auf die Gerade  $g(B, C)$ . Unter der Höhe durch  $B$  verstehen wir das Lot durch  $B$  auf die Gerade  $g(C, A)$ . Unter der Höhe durch  $C$  verstehen wir das Lot durch  $C$  auf die Gerade  $g(A, B)$ .

BEMERKUNG 1.5.52. Sei  $ABC$  ein Dreieck. Die Höhe durch  $C$  trifft die Seite  $(AB)$  genau dann, wenn die Winkel  $\angle ABC$  und  $\angle CAB$  beide spitz sind.

SATZ 1.5.53 (Höhenschnittpunkt). *Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.*

BEWEIS. Wir folgen [Hartshorne, Proposition 5.6]. Sei  $ABC$  ein Dreieck. Wir betrachten die drei Parallelen zu den drei Dreiecksseiten durch die gegenüberliegenden Eckpunkte und bezeichnen die drei Schnittpunkte mit  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  wie in der Skizze angedeutet. Nach



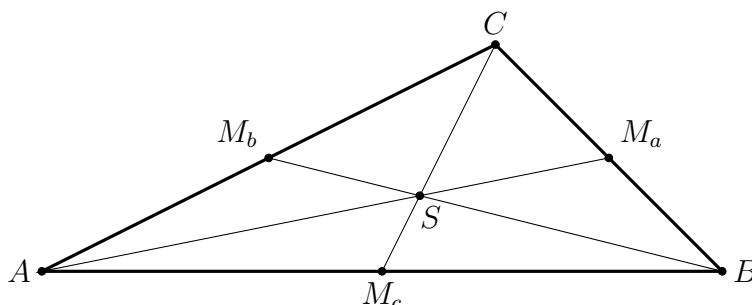
Konstruktion ist daher  $ABCB'$  ein Parallelogramm, also  $B'C \equiv AB$  nach Satz 1.5.13. Ebenso ist  $ABA'C$  ein Parallelogramm und daher auch  $A'C \equiv AB$ . Somit ist  $A'C \equiv B'C$ , und  $C$  daher der Mittelpunkt der Strecke  $A'B'$ . Die Höhe durch  $C$  des Dreiecks  $ABC$  stimmt daher mit der Streckensymmetrale der Seite  $A'B'$  des Dreiecks  $A'B'C'$  überein. Analog stimmen die anderen beiden Höhen von  $ABC$  mit den anderen beiden Streckensymmetralen von  $A'B'C'$  überein. Nach Satz 1.5.17 schneiden sich die drei Streckensymmetralen von  $A'B'C'$  in einem Punkt. Also schneiden sich die drei Höhen des Dreiecks  $ABC$  im selben Punkt.  $\square$

DEFINITION 1.5.54 (Höhenschnittpunkt). Der Schnittpunkt der drei Höhen eines Dreiecks wird *Höhenschnittpunkt* genannt.

DEFINITION 1.5.55 (Schwerlinien). Sei  $ABC$  ein Dreieck. Unter der *Schwerlinie* durch  $A$  verstehen wir die Gerade durch  $A$  und den Mittelpunkt der Seite  $BC$ . Unter der Schwerlinie durch  $B$  verstehen wir die Gerade durch  $B$  und den Mittelpunkt der Seite  $AC$ . Unter der Schwerlinie durch  $C$  verstehen wir die Gerade durch  $C$  und den Mittelpunkt der Seite  $AB$ .

SATZ 1.5.56 (Schwerpunkt). Die drei Schwerlinien eines Dreiecks  $ABC$  schneiden sich in einem Punkt  $S$  im Inneren des Dreiecks. Bezeichnen  $M_a, M_b, M_c$  die Mittelpunkte der Seiten  $BC, CA, AB$ , dann gilt

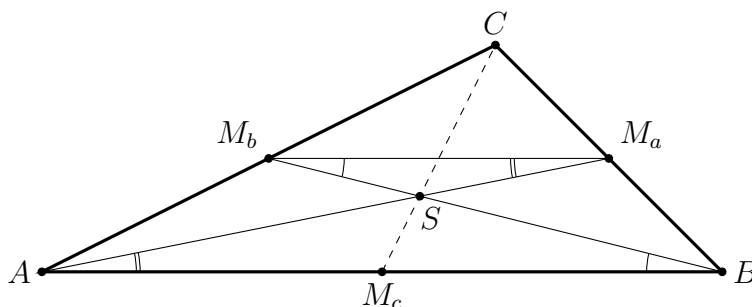
$$\frac{|AS|}{|M_aS|} = \frac{|BS|}{|M_bS|} = \frac{|CS|}{|M_cS|} = 2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{|M_aA|}{|M_aS|} = \frac{|M_bB|}{|M_bS|} = \frac{|M_cC|}{|M_cS|} = 3.$$



BEWEIS. Wir folgen [Hartshorne, Proposition 5.4]. Nach dem Strahlensatz 1.5.47 sind  $g(A, B)$  und  $g(M_a, M_b)$  parallel und es gilt

$$\frac{|AB|}{|M_bM_a|} = \frac{|CA|}{|CM_b|} = \frac{|CB|}{|CM_a|} = 2, \quad (17)$$

denn  $M_a$  und  $M_b$  sind die Streckenmittelpunkte. Beachte, dass  $A$  und  $M_a$  auf verschiedenen



Seiten von  $g(B, M_b)$  liegen, denn  $A$  und  $C$  liegen auf verschiedenen Seiten, und  $C$  und  $M_a$  liegen auf der selben Seite dieser Geraden. Ebenso liegen  $B$  und  $M_b$  auf verschiedenen Seiten der Gerade  $g(A, M_a)$ . Insbesondere schneiden sich die beiden Strecken  $(BM_b)$  und  $(AM_a)$  in einem Punkt  $S$ . Dieser Punkt  $S$  ist der Schnittpunkt der beiden Schwerlinien durch  $A$  und  $B$ . Nach Bemerkung 1.2.41 liegt  $S$  im Inneren des Dreiecks.

Da  $A$  und  $M_a$  auf verschiedenen Seiten der Geraden  $g(B, M_b)$  liegen, bilden  $\angle ABM_b$  und  $\angle M_aM_bB$  Wechselwinkel, also  $\sphericalangle ABM_b = \sphericalangle M_aM_bB$  nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4. Da  $B$  und  $M_b$  auf verschiedenen Seiten der Geraden  $g(A, M_a)$  liegen, bilden  $\angle BAM_a$  und  $\angle M_bM_aA$



Wechselwinkel, also  $\sphericalangle BAM_a = \sphericalangle M_b M_a A$  nach dem Stufenwinkelsatz. Nach Satz 1.5.43 sind die Dreiecke  $ABS$  und  $M_a M_b S$  ähnlich. Insbesondere gilt

$$\frac{|BS|}{|M_b S|} = \frac{|AS|}{|M_a S|} = \frac{|AB|}{|M_a M_b|} = 2,$$

wobei die letzte Gleichung aus (17) folgt. Da  $|M_b B| = |M_b S| + |BS|$  und  $|M_a A| = |M_a S| + |AS|$  erhalten wir daraus

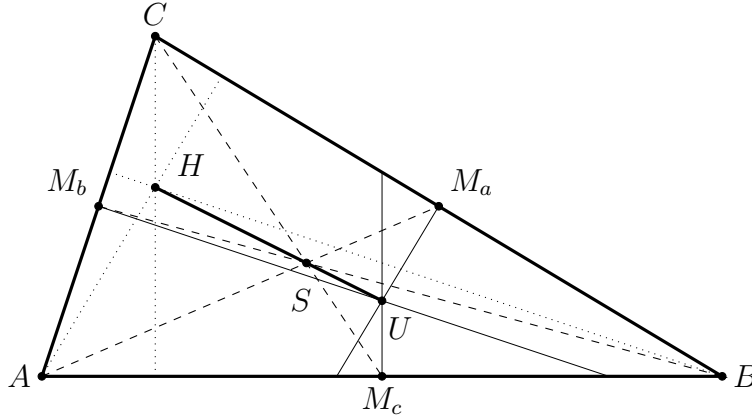
$$\frac{|M_b B|}{|M_b S|} = \frac{|M_a A|}{|M_a S|} = 3.$$

Dasselbe Argument zeigt, dass sich auch die Schwerlinien durch  $A$  und  $C$  in einem Punkt  $S'$  auf der Strecke  $(AM_a)$  treffen, für den ebenfalls  $\frac{|CS'|}{|M_c S'|} = 2$  und  $\frac{|M_c C|}{|M_c S'|} = \frac{|M_a A|}{|M_a S'|} = 3$  gilt. Insbesondere ist  $|M_a S| = \frac{1}{3}|M_a A| = |M_a S'|$  und mit der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K2 folgt  $S = S'$ . Also schneiden sich die drei Schwerlinien im Punkt  $S$ .  $\square$

DEFINITION 1.5.57 (Schwerpunkt). Der Schnittpunkt der drei Schwerlinien eines Dreiecks wird als *Schwerpunkt* bezeichnet.

SATZ 1.5.58 (Euler Gerade). *Der Umkreismittelpunkt  $U$ , der Schwerpunkt  $S$  und der Höhenschnittpunkt  $H$  eines Dreiecks liegen stets auf einer Geraden. Genauer ist  $S \in [UH]$ , und es gilt*

$$|HS| = 2|US| \quad \text{bzw.} \quad |UH| = 3|US|.$$



BEWEIS. Wir folgen im Wesentlichen [Hartshorne, Proposition 5.7]. Stimmen  $S$  und  $U$  überein, dann müssen Schwerlinien, Streckensymmetralen und Höhen zusammen fallen, denn  $S$  liegt im Inneren des Dreiecks, siehe Satz 1.5.56. In diesem Fall gilt daher  $H = S = U$  und die Aussage des Satzes ist trivial.

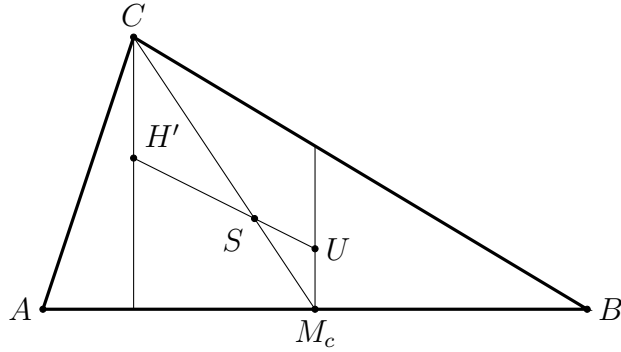
O.B.d.A. sei daher  $S \neq U$ . Bezeichne  $H'$  den Punkt mit

$$U * S * H' \quad \text{und} \quad |H'S| = 2|US|. \quad (18)$$

Wir wollen nun zeigen, dass  $H'$  auf der Höhe durch  $C$  liegt. Nach Satz 1.5.56 gilt

$$M_c * S * C \quad \text{und} \quad |CS| = 2|M_c S|. \quad (19)$$

Stimmen  $U$  und  $M_c$  überein, dann gilt  $H' = C$  und dieser Punkt liegt offensichtlich auf der Höhe durch  $C$ . O.B.d.A. sei daher  $U \neq M_c$ . Liegt  $U$  auf der Schwerlinie durch  $C$ , dann fällt



diese Schwerlinie mit der Höhe durch  $C$  zusammen und enthält den Punkt  $H'$ , also liegt auch in diesem Fall  $H'$  auf der Höhe durch  $C$ .

O.B.d.A. dürfen wir daher annehmen, dass  $U$  nicht auf der Schwerlinie durch  $C$  liegt. Dann liegt auch  $H'$  nicht auf dieser Schwerlinie. Daher bilden  $CSH'$  und  $M_cSU$  zwei Dreiecke. Da  $S$  zwischen  $M_c$  und  $C$  liegt, und  $S$  auch zwischen  $U$  und  $H'$  liegt, bilden  $\angle CSH'$  und  $\angle M_cSU$  Scheitelwinkel, also  $\angle CSH' \equiv \angle M_cSU$  nach Satz 1.4.8. Aus (18) und (19) erhalten wir  $\frac{|CS|}{|M_cS|} = \frac{|H'S|}{|US|}$ . Nach Satz 1.5.44 (S:W:S) sind die Dreiecke  $CSH'$  und  $M_cSU$  daher ähnlich. Insbesondere gilt  $\angle H'CS \equiv \angle UM_cS$  und daher auch  $\angle H'CM_c \equiv \angle UM_cC$ . Da  $H'$  und  $U$  auf verschiedenen Seiten von  $g(C, M_c)$  liegen, bilden  $\angle H'CM_c$  und  $\angle UM_cC$  Wechselwinkel. Nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 sind die Geraden  $g(H', C)$  und  $g(U, M_c)$  daher parallel. Erneutes Anwenden des Stufenwinkelsatzes zeigt, dass auch  $g(H', C)$  normal auf die Seite  $AB$  steht und daher mit der Höhe durch  $C$  übereinstimmt. Insbesondere liegt  $H'$  auf der Höhe durch  $C$ .

Analog lässt sich zeigen, dass  $H'$  auch auf jeder der beiden anderen Höhen liegt. Also stimmt  $H'$  mit dem Höhenschnittpunkt überein. Aus (18) erhalten wir daher  $|HS| = 2|US|$ . Da  $|UH| = |US| + |HS|$  folgt daraus sofort  $|UH| = 3|US|$ .  $\square$

**BEMERKUNG 1.5.59.** Dies liefert einen neuen Beweis dafür, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.

**BEMERKUNG 1.5.60.** In einem gleichseitigen Dreieck fallen Schwerpunkt  $S$ , Umkreismittelpunkt  $U$  und Höhenschnittpunkt  $H$  zusammen. Ist das Dreieck  $ABC$  nicht gleichseitig, dann sind dies drei verschiedene Punkte. Ist etwa  $|AC| \neq |BC|$ , dann kann die Höhe durch  $C$  nicht durch den Mittelpunkt von  $AB$  laufen, siehe Satz 1.4.3. Da die Höhe durch  $A$  und die Streckensymmetrale zu  $AB$  parallel sind, können sie daher keinen Schnittpunkt haben. Insbesondere folgt  $H \neq U$ . Mit Satz 1.5.58 folgt dann auch  $S \neq U$  und  $S \neq H$ .

**DEFINITION 1.5.61 (Euler Gerade).** Unter der *Euler Geraden* eines nicht gleichseitigen Dreiecks verstehen wir die eindeutige Gerade, die den Höhenschnittpunkt, den Schwerpunkt und den Umkreismittelpunkt enthält.

**1.6. Vollständigkeit.** Als letztes Postulat im Axiomensystem der Euklidischen Geometrie fordern wir nun noch die Gültigkeit des *Dedekind'schen Axioms* [**Hartshorne**, §12]:

- D.** Zu jeder Partition einer Geraden in zwei nicht-leere Teilmengen, sodass kein Punkt der einen zwischen zwei Punkten der anderen liegt, existiert ein Punkt in einer der beiden Teilmengen, der zwischen jedem anderen Punkt dieser Teilmenge und jedem Punkt der anderen Teilmenge liegt.

BEMERKUNG 1.6.1. Wir wollen dieses Axiom genauer ausformulieren. Seien also  $\sigma$  und  $\tau$  zwei Teilmengen einer Geraden  $g$  wie im Dedekind'schen Axiom D, d.h. folgende Eigenschaften sollte erfüllt sein:

- (a)  $g = \sigma \cup \tau$  und  $\sigma \cap \tau = \emptyset$  (Partition der Geraden)
- (b)  $\sigma \neq \emptyset$  und  $\tau \neq \emptyset$  (nicht-leere Teilmengen der Gerade)
- (c)  $\forall T \in \tau \forall S, S' \in \sigma : \neg S * T * S'$  (kein Punkt von  $\tau$  liegen zwischen zwei Punkten von  $\sigma$ )<sup>15</sup>
- (d)  $\forall S \in \sigma \forall T, T' \in \tau : \neg T * S * T'$  (kein Punkt von  $\sigma$  liegen zwischen zwei Punkten von  $\tau$ )<sup>16</sup>

Axiom D fordert, dass in dieser Situation stets ein Punkt  $A$  existiert, sodass

$$\forall S \in \sigma \forall T \in \tau : S * A * T \text{ oder } S = A \text{ oder } T = A.^{17}$$

Der Punkt  $A$  ist dadurch eindeutig bestimmt, d.h. es kann keinen weiteren Punkt mit dieser Eigenschaft geben. Jene der beiden Mengen  $\sigma$  und  $\tau$ , die  $A$  enthält, bildet einen abgeschlossenen Halbstrahl in  $g$  mit Scheitel  $A$ , die andere bildet den komplementären von  $A$  ausgehenden offenen Halbstrahl in  $g$ . In diesem Sinn sollen Geraden keine Lücken aufweisen, d.h. vollständig sein.

LEMMA 1.6.2. Sei  $O$  ein Punkt auf einer Geraden  $g$ , bezeichnen  $g_+$  und  $g_-$  die beiden von  $O$  ausgehenden Halbstrahlen in  $g$ , und sei

$$\varphi: g \rightarrow \mathcal{K}, \quad \varphi(A) := \begin{cases} |OA| & \text{falls } A \in g_+, \\ 0 & \text{falls } A = O, \text{ und} \\ -|OA| & \text{falls } A \in g_-. \end{cases} \quad (20)$$

die Bijektion aus Bemerkung 1.3.8. Für drei Punkte  $A, B, C$  auf  $g$  gilt:

$$A * B * C \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(A) < \varphi(B) < \varphi(C) \text{ oder } \varphi(A) > \varphi(B) > \varphi(C)$$

Für einen Beweis verweisen wir auf den nächsten Abschnitt.

SATZ 1.6.3. Der Körper  $\mathcal{K}$  ist ordnungsvollständig, d.h. jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von  $\mathcal{K}$  besitzt ein Supremum.

BEWEIS. Sei  $X \subseteq \mathcal{K}$  eine nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge. Bezeichne

$$\sigma := \{s \in \mathcal{K} \mid \forall x \in X : x \leq s\}$$

die Menge aller oberen Schranken von  $X$ , und sei  $\tau := \mathcal{K} \setminus \sigma$ . Nach Voraussetzung ist  $\sigma \neq \emptyset$ . Aus  $X \neq \emptyset$  folgt  $\tau \neq \emptyset$ , denn für  $x \in X$  kann  $x - 1$  keine obere Schranke sein. Damit ist  $\mathcal{K} = \sigma \cup \tau$  eine Partition von  $\mathcal{K}$  in zwei nicht-leere Teilmengen. Darüber hinaus gilt:

$$\forall t \in \tau \forall s \in \sigma : t < s. \quad (21)$$

Ist nämlich  $t \in \tau$ , dann ist  $t$  keine obere Schranke von  $X$ , also existiert  $x \in X$  mit  $t < x$ , und daher  $t < x \leq s$ , für jede obere Schranke  $s$ .

Wir wählen nun eine beliebige Gerade  $g$  und identifizieren sie mit  $\mathcal{K}$  wie in Bemerkung 1.3.8. D.h. wir betrachten eine Bijektion  $\varphi: g \rightarrow \mathcal{K}$  wie in (20). Nach dem vorangehenden Absatz ist  $g = \varphi^{-1}(\sigma) \cup \varphi^{-1}(\tau)$  eine Partition von  $g$  in zwei nicht-leere Teilmengen. Aus (21) und Lemma 1.6.2 sehen wir, dass kein Punkt von  $\varphi^{-1}(\sigma)$  zwischen zwei Punkten der

<sup>15</sup>Wegen (a) kann dies durch folgende äquivalente Forderung ersetzt werden:  $\sigma$  ist konvex.

<sup>16</sup>Wegen (a) kann dies durch folgende äquivalente Forderung ersetzt werden:  $\tau$  ist konvex.

<sup>17</sup>In anderen Worten:  $\forall S \in \sigma \forall T \in \tau : A \in [ST]$ .

Menge  $\varphi^{-1}(\tau)$  liegt, und umgekehrt auch kein Punkt von  $\varphi^{-1}(\tau)$  zwischen zwei Punkten von  $\varphi^{-1}(\sigma)$  liegen kann. Nach dem Dedekind'schen Axiom D existiert daher  $A \in g$ , sodass

$$\forall S \in \varphi^{-1}(\sigma) \forall T \in \varphi^{-1}(\tau) : S * A * T \text{ oder } S = A \text{ oder } T = A.$$

Für  $a := \varphi(A) \in \mathcal{K}$  erhalten wir mit Lemma 1.6.2:

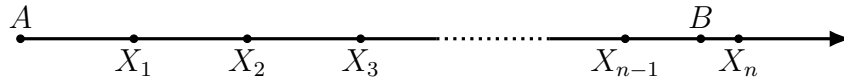
$$\forall t \in \tau \forall s \in \sigma : t \leq a \leq s. \quad (22)$$

Einerseits folgt daraus, dass  $a$  eine obere Schranke von  $X$  ist, denn andernfalls existierte  $x \in X$  mit  $a < x$  und dann eine Zahl  $t$  mit  $a < t < x$ , also  $t \in \tau$ , ein Widerspruch zu (22). Andererseits besagt (22), dass jede obere Schranke von  $X$  mindestens so groß wie  $a$  ist. Somit ist  $a$  das Supremum von  $X$ .  $\square$

LEMMA 1.6.4 (Archimedische Eigenschaft). *Zu  $a, b \in \mathcal{P}$  existiert stets  $n \in \mathbb{N}$  mit  $na > b$ .*

BEWEIS. Wir gehen indirekt vor und nehmen an es existiert ein  $a > 0$ , für das die Menge  $X := \{na : n \in \mathbb{N}\}$  nach oben beschränkt ist. Wegen der Vollständigkeit existiert das Supremum  $s := \sup X$ . Da  $s$  die kleinste obere Schranke von  $X$  ist, und weil  $a > 0$ , kann  $s - a$  keine obere Schranke von  $X$  sein. Es existiert daher  $n \in \mathbb{N}$  mit  $na > s - a$ . Wir erhalten  $(n + 1)a > s$ , ein Widerspruch zur Tatsache, dass  $s$  eine obere Schranke von  $X$  ist.  $\square$

SATZ 1.6.5 (Archimedische Eigenschaft [Hilbert, §8]). *Sind  $AB$  und  $CD$  irgendwelche Strecken, so gibt es eine Anzahl  $n$  derart, dass das  $n$ -malige Hintereinander-Abtragen der Strecke  $CD$  von  $A$  aus auf den durch  $B$  gehenden Halbstrahl über den Punkt  $B$  hinausführt.*



BEWEIS. Nach Lemma 1.6.4 existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n|CD| > |AB|$ . Sukzessives Abtragen der Strecke  $CD$  von  $A$  aus auf dem Halbstrahl durch  $B$  liefert Punkte  $X_1, \dots, X_n$ , sodass  $A * X_1 * X_2 * \dots * X_n$  und  $|AX_1| = |CD| = |X_i X_{i+1}|$  für  $1 \leq i < n$ . Wir erhalten

$$|AX_n| = |AX_1| + |X_1 X_2| + \dots + |X_{n-1} X_n| = n|CD| > |AB|,$$

also  $A * B * X_n$ . Das  $n$ -malige Abtragen der Strecke  $CD$  führt daher über den Punkt  $B$  hinaus, siehe Bemerkung 1.3.11.  $\square$

Je zwei vollständige angeordnete Körper sind isomorph, und der Isomorphismus zwischen ihnen ist eindeutig. Der Körper  $\mathcal{K}$  kann daher mit jedem anderen Modell der reellen Zahlen identifiziert werden. Wir werden ihn daher von nun an mit  $\mathcal{K} = \mathbb{R}$  bezeichnen. Genauer meinen wir damit

$$(\mathcal{K}, +, \cdot, <) = (\mathbb{R}, +, \cdot, <),$$

d.h. die Rechenoperationen auf  $\mathcal{K}$  entsprechen den üblichen Rechenoperationen auf  $\mathbb{R}$ , und die Ordnungsrelation auf  $\mathcal{K}$  entspricht der vertrauten Ordnungsrelation auf  $\mathbb{R}$ . Insbesondere sind die Streckenlängen  $|AB|$  positive reelle Zahlen.

LEMMA 1.6.6 (Quadratwurzeln). *Zu jeder reellen Zahl  $a \geq 0$  existiert eine eindeutige reelle Zahl  $b \geq 0$  mit  $b^2 = a$ .*

BEWEIS. Die Menge  $X := \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq a\}$  enthält 0 und ist daher nicht leer. Darüber hinaus ist  $s := \max\{1, a\} > 0$  eine obere Schranke für  $X$ , denn aus  $x > s > 0$  folgt  $x^2 > s^2 \geq 1a = a$ , also  $x \notin X$ . Sei  $b \in \mathbb{R}$  das Supremum von  $X$ , vgl. Satz 1.6.3. Da  $0 \in X$  muss auch  $0 \leq b$  gelten. Um  $b^2 = a$  zu zeigen schließen wir die Fälle  $b^2 < a$  und  $b^2 > a$  aus:

Im Fall  $b^2 < a$  betrachten wir  $\varepsilon := \min\{1, \frac{a-b^2}{2b+1}\} > 0$  und erhalten

$$(b + \varepsilon)^2 = b^2 + 2\varepsilon b + \varepsilon^2 \leq b^2 + 2\varepsilon b + \varepsilon = b^2 + (2b + 1)\varepsilon \leq b^2 + (a - b^2) = a,$$

also  $b + \varepsilon \in X$ . Damit wäre  $b$  keine obere Schranke von  $X$ , ein Widerspruch.

Im Fall  $b^2 > a$  betrachten wir  $\varepsilon := \frac{b^2 - a}{2b} > 0$  und erhalten

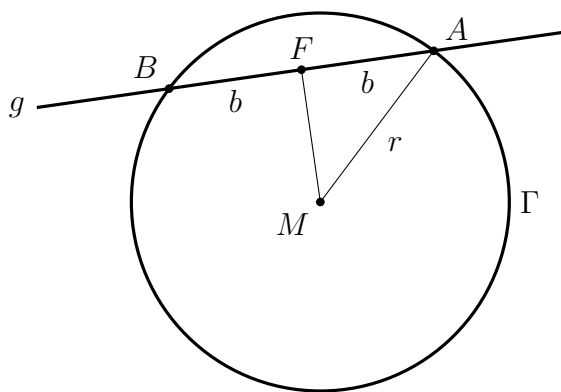
$$(b - \varepsilon)^2 = b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2 \geq b^2 - 2b\varepsilon = b^2 - (b^2 - a) = a$$

sowie  $2b\varepsilon = b^2 - a \leq b^2 \leq 2b^2$ , also  $\varepsilon \leq b$ . Damit wäre auch  $b - \varepsilon$  obere Schranke von  $X$ , denn aus  $x > b - \varepsilon \geq 0$  folgt  $x^2 > (b - \varepsilon)^2 \geq a$ , also  $x \notin X$ . Auch in diesem Fall erhalten wir einen Widerspruch, denn  $b$  ist die kleinste obere Schranke in  $X$ .

Es muss daher  $b^2 = a$  gelten. Um die Eindeutigkeit einzusehen, sei  $c \geq 0$  eine weitere reelle Zahl mit  $c^2 = a$ . Dann gilt  $(b - c)(b + c) = b^2 - c^2 = a - a = 0$ , also muss  $b - c = 0$  oder  $b + c = 0$  sein, d.h.  $b = \pm c$ . Da  $b \geq 0$  und  $c \geq 0$  folgt  $b = c$ .  $\square$

DEFINITION 1.6.7 (Quadratwurzel). Unter der *Quadratwurzel* einer Zahl  $a \geq 0$  verstehen wir die nach Lemma 1.6.6 eindeutig bestimmte Zahl  $b \geq 0$ , für die  $b^2 = a$  gilt. Wir schreiben dafür  $\sqrt{a} := b$ .

SATZ 1.6.8 (Schnitt eines Kreises mit einer Geraden). *Jede Gerade, die einen inneren Punkt eines Kreises enthält schneidet den Kreis in genau zwei Punkten.*



BEWEIS. Sei  $\Gamma$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$ . Weiters sei  $X$  ein Punkt auf einer Geraden  $g$ , der im Inneren von  $\Gamma$  liegt, es gilt daher  $|XM| < r$ . Bezeichne  $F$  den Fußpunkt des Lots durch  $M$  auf  $g$ . Dann liegt auch  $F$  im Inneren des Kreises, denn  $|FM| \leq |XM| < r$  nach Bemerkung 1.5.26. Somit ist  $|FM|^2 < r^2$  und daher  $r^2 - |FM|^2 > 0$ . Nach Lemma 1.6.6 existiert  $0 < b \in \mathbb{R}$  mit  $b^2 = r^2 - |FM|^2$ . Seien nun  $A$  und  $B$  die beiden Punkte auf  $g$  für die  $A * F * B$  und  $|AF| = b = |BF|$  gilt. Da  $MFA$  ein rechtwinkeliges Dreieck bildet erhalten wir  $|AM|^2 = |AF|^2 + |FM|^2 = b^2 + |FM|^2 = r^2$  aus Satz 1.5.49 (Pythagoras). Mit der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 1.6.6 schließen wir  $|AM| = r$ , d.h.  $A \in \Gamma$ . Analog folgt  $B \in \Gamma$ . Weitere Schnittpunkte kann es nicht geben, siehe Bemerkung 1.5.20.  $\square$

BEMERKUNG 1.6.9. Zwei verschiedene Kreise können sich höchstens in zwei Punkten schneiden. Dies folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1.5.17 und Bemerkung 1.5.20.

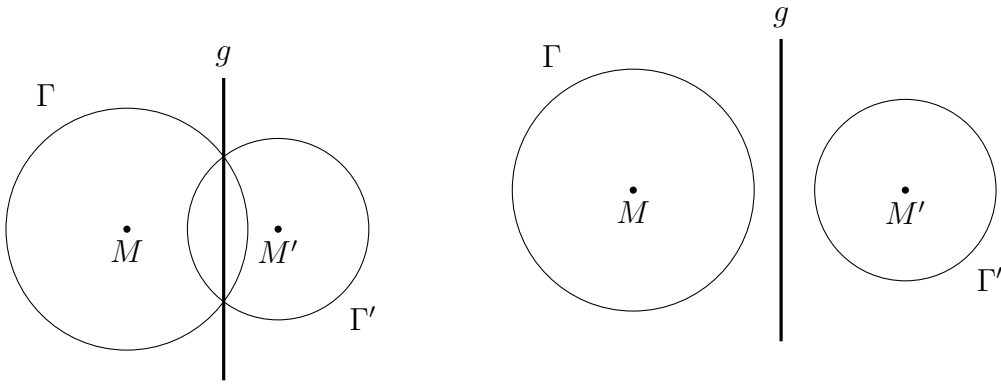
LEMMA 1.6.10 (Potenzgerade). Seien  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  zwei nicht konzentrische Kreise mit Mittelpunkten  $M \neq M'$  und Radien  $r, r' > 0$ . Dann bildet die Menge

$$p := \{X \in \mathcal{E} : |XM|^2 - r^2 = |XM'|^2 - (r')^2\}$$

eine Gerade, die normal auf  $g(M, M')$  steht und Normalabstand

$$d(M, p) = \frac{|d^2 + r^2 - (r')^2|}{2d}$$

von  $M$  hat, wobei  $d := |MM'|$ .



BEWEIS. Sei  $X$  ein Punkt und  $F$  der Fußpunkt des Lots durch  $X$  auf  $g(M, M')$ . Aus Satz 1.5.49 (Pythagoras) folgt  $|XM|^2 = |FM|^2 + |XF|^2$  und  $|XM'|^2 = |FM'|^2 + |XF|^2$ , also

$$|XM|^2 - r^2 = |XM'|^2 - (r')^2 \Leftrightarrow |FM|^2 - r^2 = |FM'|^2 - (r')^2. \quad (23)$$

Auf der Geraden  $g(M, M')$  betrachten wir den Ursprung  $O := M$ , die Halbstrahlen  $g_+ := \langle MM' \rangle$ ,  $g_- := \langle M \rangle M'$  und die damit assoziierte Bijektion  $\varphi: g(M, M') \rightarrow \mathbb{R}$  aus (20). Setzen wir  $f := \varphi(F)$  dann gilt  $|FM|^2 = f^2$  und  $|FM'|^2 = (f - d)^2$ , also<sup>18</sup>

$$\begin{aligned} |FM|^2 - r^2 = |FM'|^2 - (r')^2 &\Leftrightarrow f^2 - r^2 = (f - d)^2 - (r')^2 \\ &\Leftrightarrow f^2 - r^2 = f^2 - 2fd + d^2 - (r')^2 \\ &\Leftrightarrow f = \frac{d^2 + r^2 - (r')^2}{2d} \end{aligned}$$

Zusammen mit (23) zeigt dies, dass die Menge  $p$  eine Gerade bildet die normal auf  $g(M, M')$  steht. Ihr Schnittpunkt mit  $g(M, M')$  hat Abstand  $|f| = \frac{|d^2 + r^2 - (r')^2|}{2d}$  von  $M$ .  $\square$

<sup>18</sup>Die zweite Gleichung lässt sich leicht durch eine Fallunterscheidung verifizieren: (i)  $O * M' * F$ ; (ii)  $F = M'$ ; (iii)  $O * F * M'$ ; (iv)  $F = O$ ; (v)  $F * O * M'$ . Im Fall (i) gilt  $|FM'| = |OF| - |OM'| = f - d$ . Im Fall (ii) gilt  $|FM'| = 0 = f - d$ . Im Fall (iii) gilt  $|FM'| = |OM'| - |OF| = d - f$ . Im Fall (iv) gilt  $|FM'| = |OM'| = d = d - f$ . Im Fall (v) gilt  $|FM'| = |OM'| + |OF| = d - f$ . In jedem Fall folgt  $|FM'|^2 = (f - d)^2$ . Wir werden dies im nächsten Abschnitt ausführlicher behandeln.

LEMMA 1.6.11. Sei  $\Gamma$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$ , sei  $\Gamma'$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $M'$  und Radius  $r'$ , und sei  $d := |MM'|$ . Sind die drei Ungleichungen

$$d < r + r', \quad r < r' + d \quad \text{und} \quad r' < d + r \quad (24)$$

erfüllt, dann schneiden sich  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  in genau zwei Punkten.

BEWEIS. Beachte, dass die Kreise nicht konzentrisch sein können, denn aus den Ungleichungen in (24) folgt  $|MM'| = d > 0$ , ihre Mittelpunkte  $M$  und  $M'$  sind daher verschieden. Nach Lemma 1.6.10 bildet daher

$$p := \{X \in \mathcal{E} : |XM|^2 - r^2 = |XM'|^2 - (r')^2\}$$

eine Gerade. Offensichtlich gilt  $\Gamma \cap p = \Gamma \cap \Gamma' = \Gamma' \cap p$ . Nach Satz 1.6.8 genügt es daher zu zeigen, dass  $p$  einen inneren Punkt von  $\Gamma$  enthält.

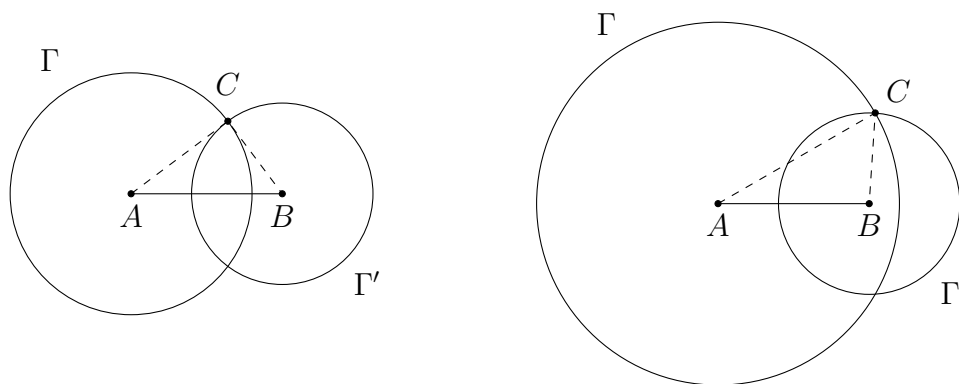
Mit der Formel für den Normalabstand in Lemma 1.6.10 erhalten wir

$$\begin{aligned} d(M, p) < r &\Leftrightarrow |d^2 + r^2 - (r')^2| < 2dr \\ &\Leftrightarrow -2dr < d^2 + r^2 - (r')^2 \text{ und } d^2 + r^2 - (r')^2 < 2dr \\ &\Leftrightarrow (r')^2 < (d+r)^2 \text{ und } (d-r)^2 < (r')^2 \\ &\Leftrightarrow -(d+r) < r' < d+r \text{ und } -r' < d-r < r' \\ &\Leftrightarrow r' < d+r, r < r'+d \text{ und } d < r+r', \end{aligned}$$

denn die Ungleichung  $-(d+r) < r'$  ist immer erfüllt. Aus den Ungleichungen (24) folgt daher  $d(M, p) < r$ , also enthält  $p$  einen inneren Punkt von  $\Gamma$ .  $\square$

SATZ 1.6.12 ([Euklid, I§22]). Sind  $a, b, c \in \mathcal{P}$  so, dass  $a < b+c$ ,  $b < c+a$  und  $c < a+b$ , dann existiert ein Dreieck  $ABC$  mit Seitenlängen  $a = |BC|$ ,  $b = |CA|$  und  $c = |AB|$ .

BEWEIS. Seien  $A$  und  $B$  zwei Punkte mit  $|AB| = c$ . Sei  $\Gamma$  der Kreis mit Mittelpunkt  $A$  und Radius  $b$ , und sei  $\Gamma'$  der Kreis mit Mittelpunkt  $B$  und Radius  $a$ . Nach Lemma 1.6.11



existiert ein Schnittpunkt  $C \in \Gamma \cap \Gamma'$ . Es gilt  $|AC| = b$ , denn  $C$  liegt in  $\Gamma$ ; und es gilt  $|BC| = a$ , denn  $C$  liegt in  $\Gamma'$ . Also ist  $ABC$  das gesuchte Dreieck.  $\square$

BEMERKUNG 1.6.13. Aus Satz 1.6.12 folgt, dass zu jedem  $a \in \mathcal{P}$  ein gleichseitiges Dreieck  $ABC$  mit  $|AB| = |BC| = |CA| = a$  existiert. Dies ist die Aussage des ersten Satzes im ersten Buch von Euklid, siehe [Euklid, I§1].

SATZ 1.6.14 (Schnitt zweier Kreise). Sind  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  zwei Kreise, sodass  $\Gamma'$  einen Punkt im Inneren von  $\Gamma$  und auch einen Punkt im Äußeren von  $\Gamma$  enthält, dann schneiden sich die beiden Kreise in genau zwei Punkten.

BEWEIS. Wir bezeichnen die Mittelpunkte der Kreise mit  $M$  und  $M'$ , ihre Radien mit  $r$  und  $r'$ . Weiters sei  $d := |MM'|$ . Nach Voraussetzung existiert ein Punkt  $X \in \Gamma'$ , der im Inneren von  $\Gamma$  liegt. Aus der Dreiecksungleichung, siehe Satz 1.4.25, folgt

$$d = |MM'| \leq |MX| + |XM'| = |MX| + r' < r + r'$$

sowie

$$r' = |M'X| \leq |M'M| + |MX| = d + |MX| < d + r.$$

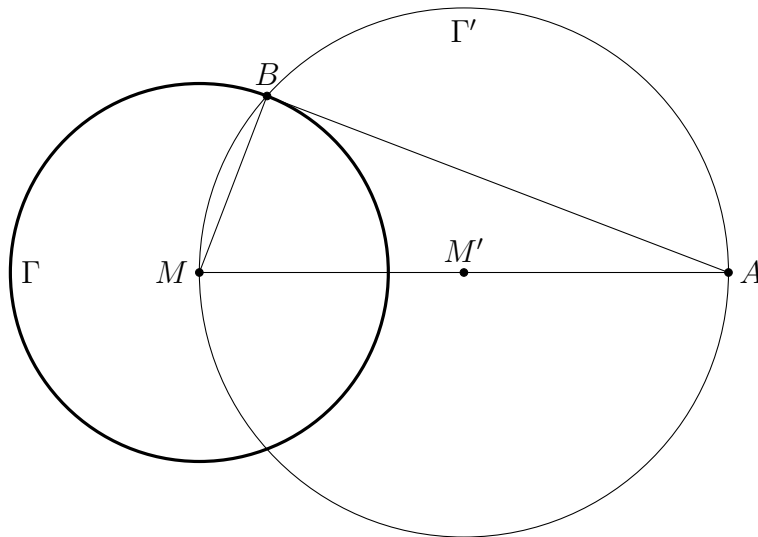
Da auch ein Punkt  $Y \in \Gamma'$  existiert, der im Äußeren von  $\Gamma$  liegt, erhalten wir analog

$$r < |MY| \leq |MM'| + |M'Y| = d + r'.$$

Der Satz folgt daher aus Lemma 1.6.11.  $\square$

SATZ 1.6.15 (Tangenten [Euklid, III§17]). Durch jeden Punkt im Äußeren eines Kreises laufen genau zwei Tangenten an den Kreis.

BEWEIS. Sie  $M$  der Mittelpunkt eines Kreises  $\Gamma$  und  $A$  ein Punkt im Äußeren von  $\Gamma$ . Weiters bezeichne  $M'$  den Mittelpunkt der Strecke  $AM$  und  $\Gamma'$  den Kreis mit Mittelpunkt  $M'$  durch  $A$  und  $M$ . Ist  $B \in \Gamma \cap \Gamma'$ , dann ist  $\angle ABM$  nach Satz 1.5.31 (Thales) ein rechter Winkel und daher  $g(A, B)$  Tangente an den Kreis  $\Gamma'$ , siehe Satz 1.5.23. Ist umgekehrt  $B \in \Gamma$  und  $g(A, B)$  tangential an  $\Gamma$ , dann ist  $\angle ABM$  nach Satz 1.5.23 ein rechter Winkel und daher  $B \in \Gamma'$ , siehe Satz 1.5.34 und Satz 1.5.31. Dies zeigt, dass  $\Gamma \cap \Gamma'$  mit der Menge der Berührungspunkte von Tangenten durch  $A$  an  $\Gamma$  übereinstimmt. Es genügt daher zu zeigen, dass  $\Gamma \cap \Gamma'$  aus genau zwei Punkten besteht.



Offensichtlich ist  $M$  ein Punkt auf  $\Gamma'$ , der im Inneren von  $\Gamma$  liegt. Nach Voraussetzung ist  $A$  ein Punkt auf  $\Gamma'$ , der im Äußeren von  $\Gamma$  liegt. Nach Satz 1.6.14 besteht  $\Gamma \cap \Gamma'$  daher aus genau zwei Punkten. Es gibt daher genau zwei Tangenten durch  $A$ .  $\square$

BEMERKUNG 1.6.16. Euklids Tangentenkonstruktion [Euklid, III§17] verwendet nur den Schnitt von Geraden und Kreis. (siehe Übungen)



## 2. Koordinaten

### 2.1. Teilverhältnis.

DEFINITION 2.1.1 (Teilverhältnis). Sind  $A, B, C$  drei Punkte auf einer Geraden und  $B \neq C$ , dann ist ihr *Teilverhältnis* wie folgt definiert:

$$\frac{AB}{BC} := \begin{cases} \frac{|AB|}{|BC|} & \text{falls } B \in (AC), \text{ d.h. } A * B * C, \\ -\frac{|AB|}{|BC|} & \text{falls } B \notin [AC], \text{ d.h. } B * A * C \text{ oder } A * C * B, \\ 0 & \text{falls } B = A, \text{ und} \\ -1 & \text{falls } A = C. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{|AB|}{|BC|} & \text{falls } A \in \langle B \rangle C, \\ 0 & \text{falls } A = B, \text{ und} \\ -\frac{|AB|}{|BC|} & \text{falls } A \in (BC \rangle. \end{cases}$$

BEMERKUNG 2.1.2. Für drei Punkte  $A, B \neq C$  auf einer Geraden gilt offensichtlich

$$\left| \frac{AB}{BC} \right| = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

BEMERKUNG 2.1.3. Sind  $B$  und  $C$  zwei verschiedene Punkte einer Geraden  $g$ , dann ist die Abbildung

$$g \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \mapsto \frac{AB}{BC},$$

eine Bijektion. Dies folgt aus Bemerkung 1.3.8. Zu jeder reellen Zahl  $x$  existiert daher genau ein Punkt  $A$  auf  $g$  mit  $\frac{AB}{BC} = x$ . Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} x > 0 &\Leftrightarrow A \in \langle B \rangle C \\ x = 0 &\Leftrightarrow A = B \\ x < 0 &\Leftrightarrow A \in (BC \rangle \\ x = -1 &\Leftrightarrow A = C \end{aligned} \tag{25}$$

BEMERKUNG 2.1.4 (Mittelpunkt). Sind  $A, B \neq C$  drei Punkte einer Geraden dann gilt  $\frac{AB}{BC} = 1$  genau dann, wenn  $B$  der Mittelpunkt von  $A$  und  $C$  ist.

BEMERKUNG 2.1.5 (Schwerpunkt). Mit der Notation in Satz 1.5.56 gilt

$$\frac{AS}{SM_a} = \frac{BS}{SM_b} = \frac{CS}{SM_c} = 2.$$

BEMERKUNG 2.1.6 (Euler Gerade). Ist  $ABC$  ein nicht gleichseitiges Dreieck, dann gilt mit der Notation von Satz 1.5.58

$$\frac{HS}{SU} = 2.$$

LEMMA 2.1.7. Sind  $A, B, C$  drei verschiedene Punkte einer Geraden, dann hängen die sechs Teilverhältnisse, die daraus gebildet werden können, wie folgt zusammen:

$$\begin{array}{lll} \frac{AB}{BC} = x & \frac{BC}{CA} = \frac{1}{-x-1} & \frac{CA}{AB} = -\frac{1}{x} - 1 = \frac{-x-1}{x} \\ \frac{CB}{BA} = \frac{1}{x} & \frac{AC}{CB} = -x-1 & \frac{BA}{AC} = \frac{1}{-\frac{1}{x}-1} = \frac{x}{-x-1} \end{array}$$

BEWEIS. Bezeichnet  $x = \frac{AB}{BC}$  dann folgt die erste Formel in der zweiten Zeile,  $\frac{CB}{BA} = \frac{1}{x}$ , unmittelbar aus der Definition. Um die zweite Formel in der zweiten Zeile zu überprüfen unterscheiden wir drei Fälle: Ist  $A * B * C$ , dann gilt  $|AC| = |AB| + |BC|$  und daher

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{|AC|}{|CB|} = -\frac{|AB|}{|BC|} - 1 = -\frac{AB}{BC} - 1.$$

Ist  $B * A * C$ , dann gilt  $|BC| = |BA| + |AC|$  und daher

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AB|}{|BC|} - 1 = -\frac{AB}{BC} - 1.$$

Ist  $A * C * B$ , dann gilt  $|AB| = |AC| + |CB|$  und daher

$$\frac{AC}{CB} = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AB|}{|BC|} - 1 = -\frac{AB}{BC} - 1.$$

In jedem Fall ergibt sich also  $\frac{AC}{CB} = -x - 1$ , also die zweite Formel in der zweiten Zeile. Die verbleibenden Formeln folgen durch Kombination der beiden bereits gezeigten:

$$\begin{aligned} \frac{BC}{CA} &= \frac{1}{\frac{AC}{CB}} = \frac{1}{-x-1} \\ \frac{CA}{AB} &= -\frac{CB}{BA} - 1 = -\frac{1}{x} - 1 \\ \frac{BA}{AC} &= \frac{1}{\frac{CA}{AB}} = \frac{1}{-\frac{1}{x}-1} \end{aligned} \quad \square$$

BEMERKUNG 2.1.8 (Euler Gerade). Die Beziehung zwischen Umkreismittelpunkt, Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt in einem nicht gleichseitigem Dreieck kann äquivalent durch eine der folgenden Teilverhältnisse beschrieben werden, vgl. Bemerkung 2.1.6:

$$\begin{array}{ccc} \frac{HS}{SU} = 2 & \frac{SU}{UH} = -\frac{1}{3} & \frac{UH}{HS} = -\frac{3}{2} \\ \frac{US}{SH} = \frac{1}{2} & \frac{HU}{US} = -3 & \frac{SH}{HU} = -\frac{2}{3} \end{array}$$

BEMERKUNG 2.1.9. Sind  $A$  und  $C$  zwei verschiedene Punkte einer Geraden  $g$ , dann ist die Abbildung

$$g \setminus \{C\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad B \mapsto \frac{AB}{BC},$$

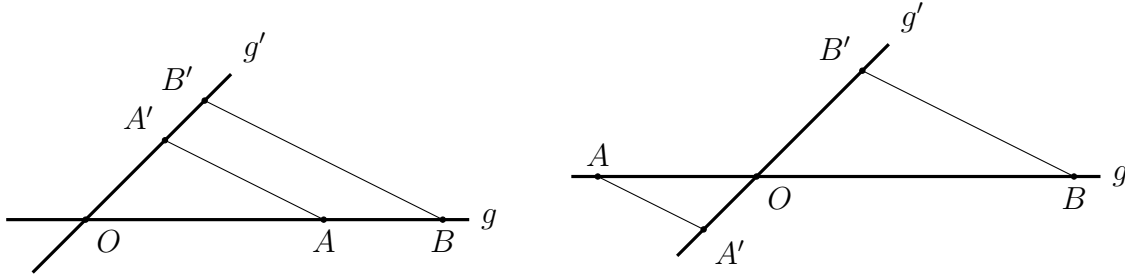
eine Bijektion. Dies folgt aus Bemerkung 2.1.3, denn  $\frac{AB}{BC} = -\frac{1}{\frac{BC}{CA}} - 1$  nach Lemma 2.1.7, und  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $y \mapsto -\frac{1}{y} - 1$ , ist eine Bijektion. Zu jeder reellen Zahl  $x \neq -1$  existiert daher genau ein Punkt  $A \neq C$  auf  $g$  mit  $\frac{AB}{BC} = x$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} x > 0 &\Leftrightarrow B \in (AC) \\ x = 0 &\Leftrightarrow B = A \\ -1 < x < 0 &\Leftrightarrow B \in \langle A \rangle C \\ x < -1 &\Leftrightarrow B \in A \langle C \rangle \end{aligned} \quad (26)$$

SATZ 2.1.10 (Orientierte Version des Strahlensatzes). Seien  $g$  und  $g'$  zwei nicht parallele Geraden mit Schnittpunkt  $O$ . Weiters seien  $A, B \in g$  beide verschieden von  $O$ , und  $A', B' \in g'$  beide verschieden von  $O$ . In dieser Situation sind die Geraden  $g(A, A')$  und  $g(B, B')$  genau dann parallel, wenn

$$\frac{AO}{OB} = \frac{A'O}{OB'}. \quad (27)$$

Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn  $\frac{AB}{BO} = \frac{A'B'}{B'O}$  bzw.  $\frac{BA}{AO} = \frac{B'A'}{A'O}$  erfüllt ist.



BEWEIS. Seien zunächst  $g(A, A')$  und  $g(B, B')$  parallel. Dann gilt:

$$A \text{ und } B \text{ auf selber Seite von } O \text{ in } g \Leftrightarrow A' \text{ und } B' \text{ auf selber Seite von } O \text{ in } g'. \quad (28)$$

Um die eine Implikation einzusehen sei o.B.d.A.  $O * A * B$ . Nach Axiom A4 (Pasch) muss die Gerade  $g(A, A')$  auch die Seite  $OB'$  des Dreiecks  $OBB'$  treffen, also  $A' \in (OB')$  und daher liegen  $A'$  und  $B'$  auf derselben Seite von  $O$  in  $g'$ . Die umgekehrte Implikation folgt analog.

Liegen  $A$  und  $B$  auf der selben Seite von  $O$  in  $g$ , dann gilt  $\angle AOA' = \angle BOB'$  nach (28), und  $\angle OA'A \equiv \angle OB'B$  nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4, denn dies sind Stufenwinkel, da  $A$  und  $B$  auf derselben Seite von  $g'$  liegen. Liegen  $A$  und  $B$  auf verschiedenen Seiten von  $O$  in  $g$ , dann gilt  $\angle AO'A' \equiv \angle BOB'$  nach dem Scheitelwinkelsatz 1.4.8, siehe (28), und  $\angle OA'A \equiv \angle OB'B$  nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4, denn dies sind Wechselwinkel, da  $A$  und  $B$  auf verschiedenen Seiten von  $g'$  liegen. In beiden Fällen gilt  $\angle AO'A' \equiv \angle BOB'$  und  $\angle OA'A \equiv \angle OB'B$ , also sind die Dreiecke  $OAA'$  und  $OBB'$  nach Satz 1.5.43 (W:W:W) ähnlich. Mit Bemerkung 2.1.2 erhalten wir

$$\left| \frac{AO}{OB} \right| = \frac{|AO|}{|OB|} = \frac{|A'O|}{|OB'|} = \left| \frac{A'O}{OB'} \right|. \quad (29)$$

Aus (28) und (26) sehen wir, dass die Teilverhältnisse  $\frac{AO}{OB}$  und  $\frac{A'O}{OB'}$  das gleiche Vorzeichen haben, die Gleichung (27) folgt daher aus (29).

Um die umgekehrte Implikation zu zeigen sei nun (27) erfüllt. Die Parallele zu  $g(B, B')$  muss die Gerade  $g'$  in einem Punkt  $\tilde{A}'$  treffen, der von  $O$  verschieden ist. Nach dem vorangehenden Absatz gilt  $\frac{AO}{OB} = \frac{\tilde{A}'O}{OB'}$ . Zusammen mit der Voraussetzung (27) folgt  $\frac{A'O}{OB'} = \frac{\tilde{A}'O}{OB'}$ . Mit Bemerkung 2.1.3 folgt  $A' = \tilde{A}'$ , also ist auch die Gerade  $g(A, A')$  parallel zu  $g(B, B')$ .

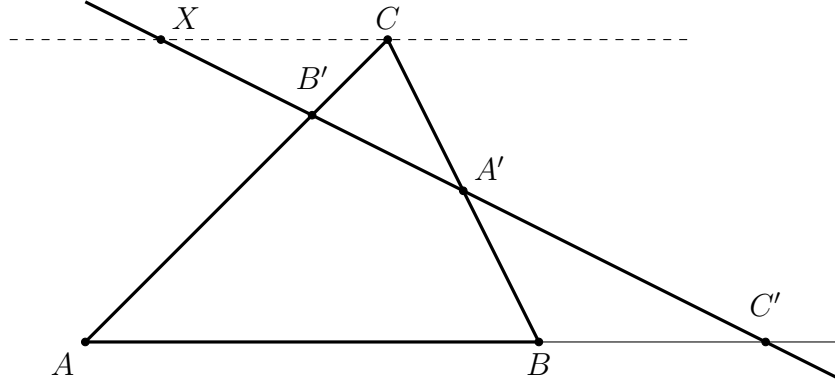
Aus Lemma 2.1.7 erhalten wir:

$$\frac{AO}{OB} = \frac{A'O}{OB'} \Leftrightarrow \frac{AB}{BO} = \frac{A'B'}{B'O} \Leftrightarrow \frac{BA}{AO} = \frac{B'A'}{A'O}.$$

Die Bedingung (27) kann daher durch  $\frac{AB}{BO} = \frac{A'B'}{B'O}$  oder  $\frac{BA}{AO} = \frac{B'A'}{A'O}$  ersetzt werden.  $\square$

SATZ 2.1.11 (Satz von Menelaos). Sei  $ABC$  ein Dreieck,  $A' \in g(B, C)$ ,  $B' \in g(C, A)$  und  $C' \in g(A, B)$ , wobei  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  verschieden von den drei Eckpunkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  seien sollen. In dieser Situation liegen die Punkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  genau dann auf einer Geraden, wenn

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} = -1. \quad (30)$$



BEWEIS. Wir nehmen zunächst an, dass die drei Punkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  auf einer Geraden liegen. Diese Gerade muss die Parallele zur Seite  $AB$  durch  $C$  in einem Punkt  $X \neq C$  treffen. Beachte auch, dass  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  und  $X$  vier verschiedene Punkte sind. Aus dem Strahlensatz erhalten wir

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{|C'A|}{|XC|} \quad \text{und} \quad \frac{|CA'}{|A'B|} = \frac{|XC|}{|BC'|}.$$

Elimination von  $|XC|$  führt unter Verwendung von Bemerkung 2.1.2 auf

$$\left| \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} \right| = \frac{|AB'|}{|B'C|} \cdot \frac{|BC'|}{|C'A|} \cdot \frac{|CA'}{|A'B|} = 1. \quad (31)$$

Es bleibt daher nur noch das Vorzeichen in (30) zu verifizieren. Nach Axiom A4 (Pasch) trifft die Gerade durch  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  keine oder zwei Dreiecksseiten. Von den drei Teilverhältnissen in (30) sind daher keines oder zwei positiv, die anderen negativ, siehe (26). Die linke Seite von (30) muss somit negativ sein, die Gleichung (30) folgt daher aus (31).

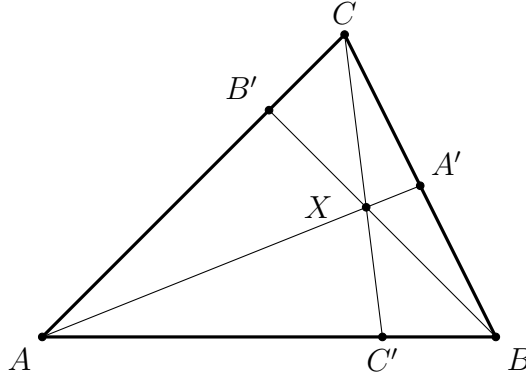
Für die Umkehrung nehmen nun an, dass die Gleichung (30) erfüllt ist. Wir wollen uns zunächst davon überzeugen, dass die beiden Geraden  $g(A, B)$  und  $g(A', B')$  nicht parallel sein können. Wären sie parallel, erhielten wir aus dem orientierten Strahlensatz 2.1.10 die Relation  $\frac{AB'}{B'C} = \frac{BA'}{A'C}$ , wegen (30) und weil  $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} = 1$ , siehe Lemma 2.1.7, daher die Gleichung  $\frac{BC'}{C'A} = -1$ , und somit den Widerspruch  $A = B$ , siehe (25). Es existiert daher ein Schnittpunkt  $\tilde{C}'$  von  $g(A', B')$  und  $g(A, B)$ . Beachte, dass  $\tilde{C}'$  nicht mit  $A$  oder  $B$  zusammenfallen kann. Aus dem vorangehenden Absatz erhalten wir daher

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{B\tilde{C}'}{\tilde{C}'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} = -1.$$

Zusammen mit der Voraussetzung (30) folgt  $\frac{B\tilde{C}'}{\tilde{C}'A} = \frac{BC'}{C'A}$  und daher  $\tilde{C}' = C'$ , siehe Bemerkung 2.1.9. Somit liegen auch  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  auf einer Geraden.  $\square$

SATZ 2.1.12 (Satz von Ceva). Sei  $ABC$  ein Dreieck,  $A' \in g(B, C)$ ,  $B' \in g(C, A)$  und  $C' \in g(A, B)$ , wobei  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  verschieden von den drei Eckpunkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  seien sollen. Die Geraden  $g(A, A')$ ,  $g(B, B')$ ,  $g(C, C')$  sind parallel oder schneiden sich in einem Punkt genau dann, wenn

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} = 1. \quad (32)$$



BEWEIS. Wir nehmen zunächst an, dass sich die drei Geraden  $g(A, A')$ ,  $g(B, B')$  und  $g(C, C')$  in einem Punkt  $X$  schneiden. Beachte, dass  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $X$  paarweise verschieden sein müssen. Wenden wir den Satz von Menelaos auf das Dreieck  $C'BC$  und die Gerade  $g(A, A')$  an erhalten wir

$$\frac{C'X}{XC} \cdot \frac{BA}{AC'} \cdot \frac{CA'}{A'B} = -1.$$

Anwenden desselben Satzes auf das Dreieck  $AC'C$  und die Gerade  $g(B, B')$  liefert

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{C'B}{BA} \cdot \frac{CX}{XC'} = -1.$$

Multiplikation dieser beiden Gleichungen führt unter Verwendung von

$$\frac{C'X}{XC} \cdot \frac{CX}{XC'} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{BA}{AC'} \cdot \frac{C'B}{BA} = \frac{BC'}{C'A},$$

siehe Lemma 2.1.7, auf (32).

Sind die drei Geraden  $g(A, A')$ ,  $g(B, B')$  und  $g(C, C')$  parallel, so folgt aus dem orientierten Strahlensatz 2.1.10

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{A'B}{BC} \quad \text{sowie} \quad \frac{BC'}{C'A} = \frac{BC}{CA'}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen erhalten wir mit Hilfe der Relationen

$$\frac{A'B}{BC} \cdot \frac{BC}{CA'} = \frac{BA'}{A'C} \quad \text{und} \quad \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} = 1,$$

siehe Lemma 2.1.7, auch in diesem Fall die Gleichung (32).

Für die Umkehrung nehmen wir nun an, dass die Gleichung (32) erfüllt ist. O.B.d.A. seien die Geraden  $g(A, A')$  und  $g(B, B')$  nicht parallel. Es existiert daher ein Schnittpunkt

$X$  von  $g(A, A')$  und  $g(B, B')$ . Beachte, dass  $X$  nicht mit  $C$  zusammenfallen kann. Wenden wir den Satz von Menelaos auf das Dreieck  $AA'C$  und die Gerade  $g(X, B')$  an, erhalten wir

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{A'X}{XA} \cdot \frac{CB}{BA'} = -1. \quad (33)$$

Die beiden Geraden  $g(C, X)$  und  $g(A, B)$  können nicht parallel sein, denn andernfalls wäre  $\frac{A'X}{XA} = \frac{A'C}{CB}$  nach dem orientierten Strahlensatz 2.1.10, was zusammen mit (33) und  $\frac{A'C}{CB} \cdot \frac{CB}{BA'} = \frac{CA'}{A'B}$ , siehe Lemma 2.1.7, auf  $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} = -1$  führt, mit der Voraussetzung (32) folgt  $\frac{BC'}{C'A} = -1$  und dann der Widerspruch  $B = A$ , siehe (25). Somit existiert ein Schnittpunkt  $\tilde{C}'$  von  $g(C, X)$  und  $g(A, B)$ . Beachte,  $A \neq \tilde{C}' \neq B$ . Aus dem vorangehenden Absatz erhalten wir

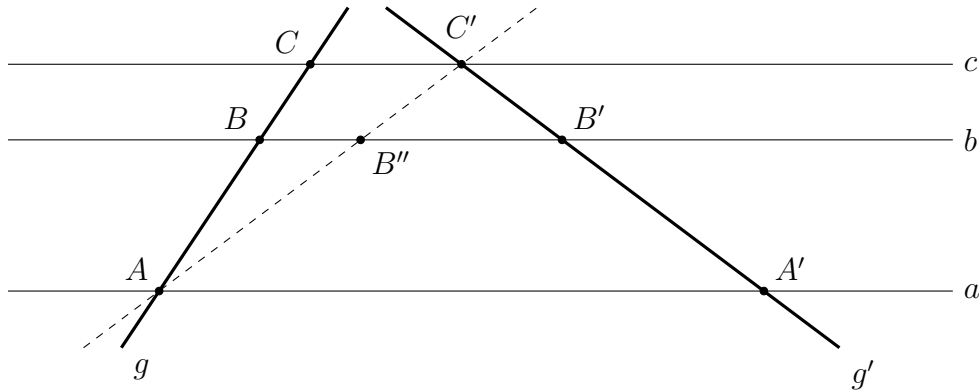
$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{B\tilde{C}'}{\tilde{C}'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} = 1.$$

Zusammen mit der Voraussetzung (32) folgt  $\frac{B\tilde{C}'}{\tilde{C}'A} = \frac{BC'}{C'A}$  und daher  $\tilde{C}' = C'$ , siehe Bemerkung 2.1.9. Somit geht auch die Gerade  $g(C, C')$  durch  $X$ .  $\square$

**BEMERKUNG 2.1.13.** Aus dem Satz von Ceva folgt erneut, dass sich die drei Schwerlinien eines Dreiecks in einem Punkt treffen, vgl. Satz 1.5.56. Bezeichnen  $A' = M_a$ ,  $B' = M_b$  und  $C' = M_c$  die Seitenmittelpunkte eines Dreiecks  $ABC$ , dann gilt  $\frac{AB'}{B'C} = \frac{BC'}{C'A} = \frac{CA'}{A'B} = 1$  und daher (32). Beachte, dass verschiedene Schwerlinien eines Dreiecks nach Proposition 1.2.38 nicht parallel sein können.

**KOROLLAR 2.1.14.** Seien  $a, b, c$  drei parallele Geraden und  $b \neq c$ . Weiters seien  $g$  und  $g'$  zwei Geraden die beide nicht parallel zu  $a, b$  und  $c$  sind. Bezeichnen  $A, B, C$  und  $A', B', C'$  die Schnittpunkte wie in der Skizze angedeutet, dann gilt

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}. \quad (34)$$



**BEWEIS.** Stimmen  $a$  und  $b$  überein, dann ist  $A = B$  sowie  $A' = B'$  und beide Teilverhältnisse in (34) sind gleich 0. Stimmen  $a$  und  $c$  überein, dann gilt  $A = C$  sowie  $A' = C'$  und beide Teilverhältnisse in (34) sind gleich  $-1$ , siehe (25). O.B.d.A. seien daher  $a, b$  und  $c$  drei verschiedene Geraden. O.B.d.A. dürfen wir auch  $g \neq g'$  annehmen. Ist  $A = A'$  dann  $C \neq C'$  und (34) folgt aus dem orientierten Strahlensatz 2.1.10. Ist  $C = C'$  dann  $A \neq A'$  und (34) folgt aus dem orientierten Strahlensatz 2.1.10. O.B.d.A. sei daher  $A \neq A'$  und

$C \neq C'$ . Beachte, dass die Gerade  $g'' := g(A, C')$  zu keiner der Geraden  $a, b, c, g, g''$  parallel ist. Bezeichnet  $B''$  den Schnittpunkt von  $g''$  und  $b$ , dann erhalten wir aus dem orientierten Strahlensatz 2.1.10

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB''}{B''C'} \quad \text{und} \quad \frac{AB''}{B''C'} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Die Relation (34) folgt durch Kombination dieser beiden Gleichungen.  $\square$

## 2.2. Koordinaten auf Geraden.

DEFINITION 2.2.1 (Koordinatensystem auf Geraden). Unter einem *affinen Koordinatensystem* auf einer Geraden  $g$  verstehen wir ein Paar  $(O, X)$  wobei  $O$  und  $X$  zwei verschiedene Punkte von  $g$  sind. Der Punkt  $O$  wird als *Koordinatenursprung* bezeichnet. Der Halbstrahl  $(OX>$  heißt positive Koordinatenhalbachse, der Halbstrahl  $<O)X$  wird als negative Koordinatenhalbachse bezeichnet.

DEFINITION 2.2.2. Unter der Koordinatenabbildung eines Koordinatensystems  $(O, X)$  auf einer Geraden  $g$  verstehen wir die Abbildung

$$x: g \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(A) := -\frac{AO}{OX} = \begin{cases} \frac{|OA|}{|OX|} & \text{falls } A \in (OX>, \\ 0 & \text{falls } A = O, \text{ und} \\ -\frac{|OA|}{|OX|} & \text{falls } A \in <O)X. \end{cases}$$

PROPOSITION 2.2.3. Die Koordinatenabbildung  $x: g \rightarrow \mathbb{R}$  eines affinen Koordinatensystems  $(O, X)$  einer Geraden  $g$  ist eine Bijektion. Sie bildet die positive Koordinatenhalbachse bijektiv auf  $(0, \infty)$  ab, und sie bildet die negative Koordinatenhalbachse bijektiv auf  $(-\infty, 0)$  ab. Darüber hinaus gilt  $x(O) = 0$  sowie  $x(X) = 1$ .

BEWEIS. Dies folgt aus Bemerkung 2.1.3.  $\square$

PROPOSITION 2.2.4 (Koordinatenwechsel). Seien  $(O, X)$  und  $(O', X')$  zwei affine Koordinatensysteme auf einer Geraden  $g$ . Bezeichnen  $x: g \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x': g \rightarrow \mathbb{R}$  die damit assoziierten Koordinatenabbildungen, dann existiert  $0 \neq a \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R}$  so, dass

$$x'(A) = a \cdot x(A) + b$$

für alle Punkte  $A \in g$  gilt. Dabei ist  $b = x'(O)$ ,  $a = x'(X) - x'(O)$  und  $|a| = \frac{|OX|}{|O'X'|}$ .

BEWEIS. Wir nehmen zunächst  $X' \neq O$  an. Für beliebige Punkte  $A \in g$  gilt dann:

$$\frac{AO}{OX'} = a_1 \cdot \frac{AO}{OX}, \quad \text{wobei } a_1 := -\frac{XO}{OX'} \neq 0. \quad (35)$$

Dies folgt direkt aus der Definition, durch die Fallunterscheidung: (i)  $X$  und  $X'$  auf derselben Seite von  $O$  in  $g$ ; (ii)  $X$  und  $X'$  auf verschiedenen Seiten von  $O$  in  $g$ . Ersetzen wir in (35)  $O$  durch  $X'$ ,  $X'$  durch  $O'$  und  $X$  durch  $O$ , so erhalten wir auch:

$$\frac{AX'}{X'O'} = a_2 \cdot \frac{AX'}{X'O}, \quad \text{wobei } a_2 := -\frac{OX'}{X'O'} \neq 0. \quad (36)$$

Mit Lemma 2.1.7 folgt

$$\frac{AO'}{O'X'} = -\frac{AX'}{X'O'} - 1 = -a_2 \cdot \frac{AX'}{X'O} - 1 = -a_2 \cdot \left( -\frac{AO}{OX'} - 1 \right) - 1 = a_2 \cdot \frac{AO}{OX'} - (1 - a_2).$$

Kombination mit (35) liefert

$$\frac{AO'}{O'X'} = a \cdot \frac{AO}{OX} - b \quad (37)$$

wobei  $a = a_1 a_2 \neq 0$  und  $b = 1 - a_2$ . Aus (35) und (36) erhalten wir auch

$$|a| = |a_1 a_2| = |a_1| \cdot |a_2| = \left| \frac{XO}{OX'} \right| \cdot \left| \frac{OX'}{X'O'} \right| = \frac{|XO|}{|OX'|} \cdot \frac{|OX'|}{|X'O'|} = \frac{|XO|}{|X'O'|} = \frac{|OX|}{|O'X'|},$$

wobei wir im vierten Gleichheitszeichen Bemerkung 2.1.2 verwendet haben.

Im Fall  $X' = O$  muss  $X' \neq X$  gelten. Nach dem vorangehenden Absatz existieren daher  $\tilde{a} \neq 0$  und  $\tilde{b} \in \mathbb{R}$ , sodass  $\frac{AO'}{O'X'} = \tilde{a} \cdot \frac{AX}{XO} - \tilde{b}$  für alle  $A \in g$ , und  $|\tilde{a}| = \frac{|XO|}{|O'X'|}$ . Mit Lemma 2.1.7 folgt

$$\frac{AO'}{O'X'} = \tilde{a} \cdot \frac{AX}{XO} - \tilde{b} = \tilde{a} \left( -\frac{AO}{OX} - 1 \right) - \tilde{b} = -\tilde{a} \cdot \frac{AO}{OX} - (\tilde{a} + \tilde{b}).$$

Auch in diesem Fall existieren daher reelle Zahlen  $a = -\tilde{a} \neq 0$  und  $b = \tilde{a} + \tilde{b}$ , sodass (37) für alle  $A \in g$  erfüllt ist. Auch in diesem Fall gilt  $|a| = |\tilde{a}| = \frac{|XO|}{|O'X'|} = \frac{|OX|}{|O'X'|}$ . Äquivalent lässt (37) durch  $x'(A) = a \cdot x(A) + b$  ausdrücken. Einsetzen von  $A = O$  liefert  $x'(O) = a \cdot x(O) + b = b$ , denn  $x(O) = 0$ . Einsetzen von  $A = X$  liefert  $x'(X) = a \cdot x(X) + b = a + b$ , denn  $x(X) = 1$ .  $\square$

**PROPOSITION 2.2.5.** *Sei  $g$  eine Gerade und  $x: g \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems auf  $g$ . Dann gilt für beliebige Punkte  $A, B \neq C$  auf  $g$  die Formel*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{x(B) - x(A)}{x(C) - x(B)}.$$

**BEWEIS.** Bezeichne  $x': g \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatenabbildung des affinen Koordinatensystems  $(B, C)$  auf  $g$ . Dann gilt  $x'(B) = 0$ ,  $x'(C) = 1$  und  $x'(A) = -\frac{AB}{BC}$ , also

$$\frac{AB}{BC} = \frac{x'(B) - x'(A)}{x'(C) - x'(B)} = \frac{x(B) - x(A)}{x(C) - x(B)},$$

wobei die zweite Gleichung aus Proposition 2.2.4 folgt.  $\square$

**PROPOSITION 2.2.6.** *Sei  $g$  eine Gerade und  $x: g \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems auf  $g$ . Weiters seien  $A, B$  und  $C$  drei Punkte auf  $g$  und  $a := x(A)$ ,  $b := x(B)$  und  $c := x(C)$  ihre Koordinaten. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a)  $A * B * C$
- (b)  $a < b < c$  oder  $a > b > c$
- (c)  $b \neq c$  und  $\frac{b-a}{c-b} > 0$
- (d)  $a \neq b$  und  $\frac{b-c}{a-b} > 0$
- (e)  $c \neq a$  und  $0 < \frac{b-a}{c-a} < 1$

**BEWEIS.** Die Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow$ (c) folgt aus Proposition 2.2.5 und (26). Die Äquivalenz der anderen Aussagen ist offensichtlich.  $\square$

**BEMERKUNG 2.2.7.** Die Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow$ (b) zeigt auch Lemma 1.6.2.

**DEFINITION 2.2.8** (Kartesisches Koordinatensystem). Unter einem *kartesischen Koordinatensystem* auf einer Geraden  $g$  verstehen wir ein affines Koordinatensystem  $(O, X)$  auf  $g$  für das  $|OX| = 1$  gilt.



PROPOSITION 2.2.9. *Bezeichnet  $x: g \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems auf einer Geraden  $g$ , dann gilt für je zwei Punkte  $A$  und  $B$  auf  $g$ :*

$$|AB| = |x(B) - x(A)|.$$

BEWEIS. Sei  $x': g \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatenabbildung eines weiteren kartesischen Koordinatensystems  $(O', X')$  auf  $g$  mit Ursprung  $O' = A$ . Dann gilt  $x'(A) = 0$  und  $x'(B) = \pm|O'B|$ , also

$$|x'(B) - x'(A)| = |x'(B)| = |O'B| = |AB|. \quad (38)$$

Nach Proposition 2.2.4 existieren reelle Zahlen  $a \neq 0$  und  $b$ , sodass  $x'(P) = a \cdot x(P) + b$  für alle  $P \in g$  gilt. Wir erhalten  $x'(B) - x'(A) = a \cdot (x(B) - x(A))$  und daher

$$|x'(B) - x'(A)| = |a| \cdot |x(B) - x(A)|. \quad (39)$$

Da beide Koordinatensysteme kartesisch sind, gilt  $|a| = \frac{|OX|}{|O'X'|} = \frac{1}{1} = 1$ , siehe Proposition 2.2.4. Kombinieren wir dies mit (38) und (39) folgt die Proposition.  $\square$

BEMERKUNG 2.2.10. In der Situation von Proposition 2.2.9 erhalten wir auch

$$|AB|^2 = (x(B) - x(A))^2.$$

Wir haben dies im Beweis von Lemma 1.6.10 verwendet.

### 2.3. Koordinaten der Ebene.

DEFINITION 2.3.1 (Koordinatensystem). Unter einem *affinen Koordinatensystem* der Ebene verstehen wir drei Punkte  $(O, X_1, X_2)$  die nicht auf einer Geraden liegen, d.h. drei Punkte, die ein Dreieck bilden. Der Punkt  $O$  wird als *Ursprung* des Koordinatensystems bezeichnet. Die beiden Geraden  $g(O, X_1)$  und  $g(O, X_2)$  werden *Koordinatenachsen* genannt. Die Halbstrahlen  $\langle OX_1 \rangle$  und  $\langle OX_2 \rangle$  werden als positive *Koordinatenhalbachsen* bezeichnet. Die Halbstrahlen  $\langle O \rangle X_1$  und  $\langle O \rangle X_2$  werden negative *Koordinatenhalbachsen* genannt.

LEMMA 2.3.2. *Bezüglich eines affinen Koordinatensystems sei  $g_1$  eine zur ersten Koordinatenachse parallele Gerade, und  $g_2$  eine zur zweiten Koordinatenachse parallele Gerade. Dann schneiden sich  $g_1$  und  $g_2$  in genau einem Punkt.*

BEWEIS. Wären  $g_1$  und  $g_2$  parallel, dann wären nach Satz 1.5.1 auch die beiden Koordinatenachsen zueinander parallel, ein Widerspruch zur Tatsache, dass sich die beiden Achsen nur im Ursprung  $O$  schneiden.  $\square$

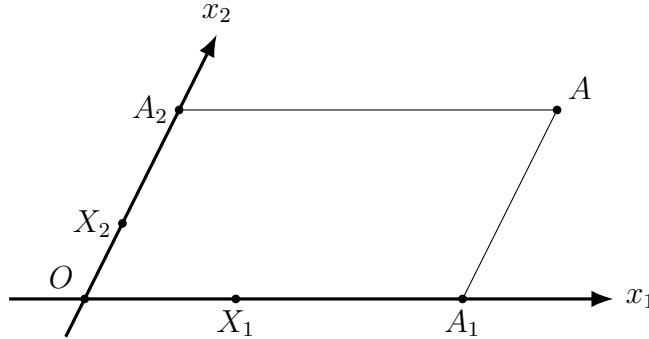
Wir schreiben

$$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

DEFINITION 2.3.3 (Koordinatenabbildung). Sei  $(O, X_1, X_2)$  ein affines Koordinatensystem der Ebene. Bezeichne  $x_1: g(O, X_1) \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatenabbildung des Koordinatensystems  $(O, X_1)$  auf der ersten Achse  $g(O, X_1)$ , und bezeichne  $x_2: g(O, X_2) \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatenabbildung des Koordinatensystems  $(O, X_2)$  auf der zweiten Achse  $g(O, X_2)$ . Unter der *Koordinatenabbildung* des Koordinatensystems  $(O, X_1, X_2)$  verstehen wir die Abbildung

$$x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x(A) := \begin{pmatrix} x_1(A_1) \\ x_2(A_2) \end{pmatrix},$$

wobei  $A_1$  den Schnittpunkt der ersten Koordinatenachse  $g(O, X_1)$  mit der Parallelen durch  $A$  zur zweiten Achse  $g(O, X_2)$  bezeichnet, und  $A_2$  den Schnittpunkt der zweiten Koordinatenachse  $g(O, X_2)$  mit der Parallelen durch  $A$  zur ersten Achse  $g(O, X_1)$  bezeichnet. Diese



Schnittpunkte existieren und sind eindeutig nach Lemma 2.3.2. Die beiden Komponenten  $x_1(A_1)$  und  $x_2(A_2)$  werden als *Koordinaten* des Punktes  $A$  bezüglich des Koordinatensystems  $(O, X_1, X_2)$  bezeichnet. Wir schreiben dafür auch  $x_1(A) := x_1(A_1)$  und  $x_2(A) := x_2(A_2)$ . In anderen Worten,  $x_1(A) = \pm \frac{|OA_1|}{|OX_1|}$ , wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob  $A_1$  auf der positiven oder negativen Koordinatenhalbachse liegt. Analog ist  $x_2(A) = \pm \frac{|OA_2|}{|OX_2|}$ , wobei das Vorzeichen von der Koordinatenhalbachse bestimmt wird, auf der  $A_2$  liegt.

**PROPOSITION 2.3.4.** *Die Koordinatenabbildung  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eines affinen Koordinatensystems ist eine Bijektion. Zu jedem  $y \in \mathbb{R}^2$  existiert daher ein eindeutiger Punkt  $A \in \mathcal{E}$  mit  $x(A) = y$ .*

**BEWEIS.** Um die Injektivität einzusehen, sei  $A$  ein Punkt,  $g_1, g_2$  die Parallelen zu den beiden Achsen durch  $A$ , und  $A_1, A_2$  die Schnittpunkte mit den beiden Achsen. Sei  $A'$  ein weiterer Punkt,  $g'_1, g'_2$  die Parallelen zu den beiden Achsen durch  $A'$ , und  $A'_1, A'_2$  die Schnittpunkte mit den beiden Achsen. Ist  $x(A) = x(A')$ , dann gilt  $x_1(A_1) = x_1(A'_1)$  sowie  $x_2(A_2) = x_2(A'_2)$ . Aus Proposition 2.2.3 folgt  $A_1 = A'_1$  und  $A_2 = A'_2$ . Aus Satz 1.5.3 folgt  $g_1 = g'_1$  und  $g_2 = g'_2$ . Mit Lemma 2.3.2 erhalten wir  $A = A'$ .

Um die Surjektivität einzusehen, sei  $y \in \mathbb{R}^2$  mit Komponenten  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ . Nach Proposition 2.2.3 existiert  $A_1 \in g(O, X_1)$  mit  $x_1(A_1) = y_1$  und es existiert  $A_2 \in g(O, X_2)$  mit  $x_2(A_2) = y_2$ . Bezeichne  $g_1$  die Parallele zur zweiten Achse  $g(O, X_2)$  durch  $A_1$ , und  $g_2$  die Parallele zur ersten Achse  $g(O, X_1)$  durch  $A_2$ . Nach Lemma 2.3.2 existiert ein Schnittpunkt  $A \in g_1 \cap g_2$ . Nach Konstruktion gilt  $x(A) = y$ .  $\square$

**BEMERKUNG 2.3.5.** Ist  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems  $(O, X_1, X_2)$ , dann gilt

$$x(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(X_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad x(X_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für einen Punkt  $A \in \mathcal{E}$  mit Koordinaten  $x(A) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  gilt:

- (a)  $A$  liegt auf der ersten Koordinatenachse genau dann wenn  $x_2 = 0$ .
- (b)  $A$  liegt auf der pos. ersten Koordinatenhalbachse genau dann wenn  $x_1 > 0$  und  $x_2 = 0$ .

- (c)  $A$  liegt auf der neg. ersten Koordinatenhalbachse genau dann wenn  $x_1 < 0$  und  $x_2 = 0$ .
- (d)  $A$  liegt auf der zweiten Koordinatenachse genau dann wenn  $x_1 = 0$ .
- (e)  $A$  liegt auf der pos. zweiten Koordinatenhalbachse genau dann wenn  $x_1 = 0$  und  $x_2 > 0$ .
- (f)  $A$  liegt auf der neg. zweiten Koordinatenhalbachse genau dann wenn  $x_1 = 0$  und  $x_2 < 0$ .

SATZ 2.3.6 (Geraden in Koordinaten). Sei  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems und  $g$  eine Gerade in  $\mathcal{E}$ . Dann existieren  $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ , sodass  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$  und

$$x(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\}.$$

BEWEIS. Seien  $B$  und  $C$  zwei verschiedene Punkte der Geraden  $g$ . Wir nehmen zunächst an, dass  $g$  zu keiner der beiden Koordinatenachsen parallel ist. Liegt ein weiterer Punkt  $A$  auf  $g$  dann erhalten wir aus Korollar 2.1.14 die Gleichungen

$$\frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} = \frac{AB}{BC} = \frac{A_2 B_2}{B_2 C_2}.$$

Mit Proposition 2.2.5 folgt

$$\frac{x_1(B) - x_1(A)}{x_1(C) - x_1(B)} = \frac{x_2(B) - x_2(A)}{x_2(C) - x_2(B)}.$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} a_1 &:= -(x_2(C) - x_2(B)) \\ a_2 &:= x_1(C) - x_1(B) \\ b &:= x_2(B)(x_1(C) - x_1(B)) - x_1(B)(x_2(C) - x_2(B)) \end{aligned}$$

dann lässt sich dies äquivalent in der Form

$$a_1 \cdot x_1(A) + a_2 \cdot x_2(A) = b \tag{40}$$

schreiben. Diese Gleichung bleibt offenbar gültig, wenn  $g$  zu einer der beiden Achsen parallel ist. Ist  $g$  zur ersten Koordinatenachse parallel, dann  $x_2(A) = x_2(B) = x_2(C)$  und  $a_2 \neq 0$  nach Lemma 2.3.2. Ist  $g$  zur zweiten Koordinatenachse parallel, dann  $x_1(A) = x_1(B) = x_1(C)$  und  $a_1 \neq 0$  nach Lemma 2.3.2. Insbesondere ist  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ . Dies zeigt

$$x(g) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\}. \tag{41}$$

Um Gleichheit zu zeigen seien nun  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  so, dass  $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ . O.B.d.A. sei  $g$  nicht parallel zur zweiten Koordinatenachse und daher  $a_2 \neq 0$ . Nach Proposition 2.2.3 existiert ein Punkt  $A_1$  auf der ersten Koordinatenachse mit  $x_1(A_1) = x_1$ . Bezeichnet  $A$  den Schnittpunkt von  $g$  mit der Parallelen zur zweiten Koordinatenachse durch  $A_1$ , dann gilt (40). Kombinieren wir dies mit  $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$  so folgt  $x_2(A) = x_2$ , denn  $x_1(A) = x_1(A_1) = x_1$  und  $a_2 \neq 0$ . Dies zeigt die umgekehrte Inklusion in (41), es gilt daher Gleichheit.  $\square$

DEFINITION 2.3.7 (Addition und Skalarmultiplikation in  $\mathbb{R}^2$ ). Vektoraddition und Skalarmultiplikation auf  $\mathbb{R}^2$  sind durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}, \quad t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t v_1 \\ t v_2 \end{pmatrix},$$

definiert, wobei  $v_1, v_2, w_1, w_2, t \in \mathbb{R}$ . In anderen Worten: Vektoren in  $\mathbb{R}^2$  werden komponentenweise addiert und komponentenweise mit Skalaren multipliziert.

LEMMA 2.3.8 (Rechenregeln für Vektoraddition und Skalarmultiplikation).  $(\mathbb{R}^2, +)$  ist eine abelsche Gruppe. Der Nullvektor  $0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist das neutrale Element bezüglich der Addition. Das additive Inverse von  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  ist  $-v = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$ .

Für beliebige  $v, w \in \mathbb{R}^2$  und  $s, t \in \mathbb{R}$  gilt:

- (a)  $s(tv) = (st)v$
- (b)  $t(v + w) = tv + tw$
- (c)  $(s + t)v = sv + tv$
- (d)  $1v = v$
- (e)  $(-1)v = -v$
- (f)  $tv = 0$  genau dann, wenn  $t = 0$  oder  $v = 0$ .

BEWEIS. Die Kommutativität der Vektoraddition folgt aus der Kommutativität der Addition auf  $\mathbb{R}$ , denn

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + v_1 \\ w_2 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = w + v.$$

Die Assoziativität der Vektoraddition folgt aus der Assoziativität der Addition auf  $\mathbb{R}$ , denn

$$\begin{aligned} u + (v + w) &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 + (v_1 + w_1) \\ u_2 + (v_2 + w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) + w_1 \\ (u_2 + v_2) + w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (u + v) + w. \end{aligned}$$

Der Nullvektor ist neutrales Element der Addition, denn

$$v + 0 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + 0 \\ v_2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v.$$

Die additiven Inversen sind durch die oben angegebene Formel gegeben, denn

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_1 \\ v_2 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Somit bildet  $(\mathbb{R}^2, +)$  eine abelsche Gruppe.

Das Assoziativgesetz in (a) folgt aus der Assoziativität der Multiplikation in  $\mathbb{R}$ , denn

$$s(tv) = s \left\{ t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\} = s \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(tv_1) \\ s(tv_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (st)v_1 \\ (st)v_2 \end{pmatrix} = (st) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (st)v.$$

Das Distributivgesetz in (b) folgt aus dem Distributivgesetz auf  $\mathbb{R}$ , denn

$$\begin{aligned} t(v+w) &= t \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\} = t \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(v_1+w_1) \\ t(v_2+w_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} tv_1+tw_1 \\ tv_2+tw_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tw_1 \\ tw_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = tv+tw. \end{aligned}$$

Auch das andere Distributivgesetz in (c) folgt aus dem Distributivgesetz auf  $\mathbb{R}$ , denn

$$\begin{aligned} (s+t)v &= (s+t) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s+t)v_1 \\ (s+t)v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sv_1+tv_1 \\ sv_2+tv_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} sv_1 \\ sv_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = sv+tv. \end{aligned}$$

Die Aussagen in (d) und (e) sind offensichtlich. Ist  $t=0$  oder  $v=0$  dann offenbar auch  $tv=0$ . Umgekehrt erhalten wir aus  $tv=0$  sofort  $tv_1=0=tv_2$ , also  $t=0$  oder  $v_1=0=v_2$ , d.h.  $t=0$  oder  $v=0$ . Damit ist auch (f) gezeigt.  $\square$

LEMMA 2.3.9. Für eine Teilmenge  $g \subseteq \mathbb{R}^2$  sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

(a) Es existieren  $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$  sodass  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$  und

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b \right\}.$$

(b) Es existieren  $P, v \in \mathbb{R}^2$ , sodass  $v \neq 0$  und

$$g = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}.$$

BEWEIS. Seien  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ,  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$  und  $v = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ . Für  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  gilt dann:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = tv. \quad (42)$$

Dabei ist die Implikation  $\Leftarrow$  offensichtlich. Um die umgekehrte Implikation  $\Rightarrow$  einzusehen, unterscheiden wir zwei Fälle: (i) ist  $a_1 \neq 0$ , dann hat  $t = x_2/a_1$  die gewünschte Eigenschaft; und (ii) ist  $a_2 \neq 0$ , dann hat  $t = -x_1/a_2$  die gewünschte Eigenschaft.

Ist weiters  $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  und  $b = a_1p_1 + a_2p_2$ , dann folgt aus (42):

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 = b &\quad \Leftrightarrow \quad a_1(x_1 - p_1) + a_2(x_2 - p_2) = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{pmatrix} = tv \\ &\quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P + tv \end{aligned} \quad (43)$$

Damit ist die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) nun offensichtlich. Für die umgekehrte Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) sei nun  $g$  wie in (a). Da  $a_1$  und  $a_2$  nicht beide verschwinden existieren  $p_1$  und  $p_2$ , sodass  $a_1p_1 + a_2p_2 = b$  gilt. Ist nämlich  $a_2 \neq 0$  dann haben  $p_1 = 0$  und  $p_2 = b/a_2$  die gewünschte Eigenschaft; ist  $a_1 \neq 0$  dann können wir  $p_2 = 0$  und  $p_1 = b/a_1$  verwenden. Aus

(43) folgt nun, dass  $g$  auch durch eine Parameterdarstellung wie in (b) beschrieben werden kann.  $\square$

DEFINITION 2.3.10 (Geraden in  $\mathbb{R}^2$ ). Unter einer Geraden in  $\mathbb{R}^2$  verstehen wir eine Teilmenge, die sich wie in Lemma 2.3.9 schreiben lässt. Eine Darstellung wie in Lemma 2.3.9(a) wird als *Beschreibung der Geraden durch eine lineare Gleichung* bezeichnet. Eine Darstellung wie in Lemma 2.3.9(b) wird *Parameterdarstellung* der Geraden genannt.

BEMERKUNG 2.3.11 (Äquivalente Parameterdarstellungen). Ist  $g = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$  eine Gerade und  $Q \in g$ , dann hat  $g$  auch die Darstellung  $g = \{Q + sv : s \in \mathbb{R}\}$ . Nach Voraussetzung existiert nämlich  $t_Q \in \mathbb{R}$  mit  $Q = P + t_Q v$ , woraus wir  $P + tv = Q + (t - t_Q)v$  bzw.  $Q + sv = P + (s + t_Q)v$  erhalten.

BEMERKUNG 2.3.12 (Äquivalente Parameterdarstellungen). Ist  $g = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$  eine Gerade,  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  und  $\tilde{v} := \lambda v$ , dann hat  $g$  auch die Darstellung  $g = \{P + s\tilde{v} : s \in \mathbb{R}\}$ . Es gilt nämlich  $P + tv = P + (t/\lambda)\tilde{v}$  bzw.  $P + s\tilde{v} = P + (s\lambda)v$ .

BEMERKUNG 2.3.13 (Beschreibungen durch äquivalente Gleichungen). Wir betrachten eine Gerade in Gleichungsform,  $g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\}$ , und  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ . Setzen wir  $\tilde{a}_1 := \lambda a_1$ ,  $\tilde{a}_2 := \lambda a_2$  und  $\tilde{b} := \lambda b$ , dann hat  $g$  auch die Darstellung  $g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 = \tilde{b} \right\}$ . Da  $\lambda \neq 0$  sind die Gleichungen  $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$  und  $\tilde{a}_1 x_1 + \tilde{a}_2 x_2 = \tilde{b}$  nämlich äquivalent.

DEFINITION 2.3.14 (Richtungsvektoren von Geraden). Unter einem *Richtungsvektor* einer Geraden  $g$  in  $\mathbb{R}^2$  verstehen wir jeden Vektor der Form  $B - A$ , wobei  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte von  $g$  sind.

BEMERKUNG 2.3.15. Richtungsvektoren von Geraden in  $\mathbb{R}^2$  sind stets ungleich Null.

BEMERKUNG 2.3.16 (Menge aller Richtungsvektoren). Ist  $g = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$  eine Gerade in Parameterdarstellung, dann besteht die Menge aller Richtungsvektoren von  $g$  aus allen Vektoren der Form  $\lambda v$ , wobei  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ . Insbesondere ist  $v$  ein Richtungsvektor. Sind nämlich  $A = P + tv$  und  $B = Q + sv$  zwei Punkte auf  $g$ , dann folgt  $B - A = (P + sv) - (P + tv) = (s - t)v$ . Gilt  $A \neq B$ , dann auch  $s - t \neq 0$ .

BEMERKUNG 2.3.17 (Äquivalente Parameterdarstellungen). Sind

$$\{P + tv : t \in \mathbb{R}\} = g = \{Q + sw : s \in \mathbb{R}\}$$

zwei Parameterdarstellungen derselben Geraden, dann existiert  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  mit  $w = \lambda v$ . Dies folgt aus Bemerkung 2.3.16, denn  $v$  und  $w$  sind Richtungsvektoren derselben Geraden.

BEMERKUNG 2.3.18. Ist  $g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\}$  eine Gerade in Gleichungsform, dann ist  $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$  Richtungsvektor von  $g$ . Ist umgekehrt  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  Richtungsvektor einer Geraden  $g$ , dann existiert  $b \in \mathbb{R}$ , sodass  $g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : v_2 x_1 - v_1 x_2 = b \right\}$ . Die Zahl  $b$  lässt sich durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes ermitteln. Dies folgt aus dem Beweis von Lemma 2.3.9.

BEMERKUNG 2.3.19 (Beschreibungen durch äquivalente Gleichungen). Sind

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b \right\} = g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \tilde{a}_1x_1 + \tilde{a}_2x_2 = \tilde{b} \right\}$$

zwei Darstellungen derselben Geraden, dann existiert  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\tilde{a}_1 = \lambda a_1$ ,  $\tilde{a}_2 = \lambda a_2$  und  $\tilde{b} = \lambda b$ . Dies folgt aus den Bemerkungen 2.3.16 und 2.3.18.

BEMERKUNG 2.3.20. Ist  $P$  ein Punkt einer Geraden  $g$  mit Richtungsvektor  $v$ , dann hat  $g$  die Parameterdarstellung  $g = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$ . Nach Voraussetzung lässt sich die Gerade nämlich in der Form  $g = \{Q + tw : t \in \mathbb{R}\}$  schreiben. Nach Bemerkung 2.3.16 existiert  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  mit  $v = \lambda w$ . Mit Bemerkung 2.3.12 erhalten wir die Darstellung  $g = \{Q + tv : t \in \mathbb{R}\}$ . Nach Bemerkung 2.3.11 können wir  $Q$  durch  $P$  ersetzen und erhalten schließlich  $g = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$ .

BEMERKUNG 2.3.21. Sind  $A$  und  $B$  zwei verschiedene Punkte einer Geraden  $g$ , dann hat  $g$  die Parameterdarstellung  $g = \{A + t(B - A) : t \in \mathbb{R}\}$ . Dies folgt aus Bemerkung 2.3.20.

BEISPIEL 2.3.22. Die Gerade  $g = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$  soll durch eine Gleichung beschrieben werden. Nach Bemerkung 2.3.18 lässt sich  $g$  durch eine Gleichung der Form  $2x_1 - x_2 = b$  beschreiben. Einsetzen des Punktes  $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$  liefert  $b = 10$  und wir erhalten die Darstellung

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 10 \right\}.$$

BEISPIEL 2.3.23. Es soll die Gerade durch die beiden Punkte  $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$  durch eine Parameterdarstellung und auch durch eine Gleichung beschrieben werden. Wir bestimmen dazu einen Richtungsvektor  $B - A = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  und erhalten die Darstellungen

$$g(A, B) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 4x_1 - 3x_2 = -1 \right\},$$

vgl. die Bemerkungen 2.3.18 und (2.3.21).

BEISPIEL 2.3.24. Die Gerade  $g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 7x_1 + 8x_2 = 21 \right\}$  soll durch eine Parameterdarstellung beschrieben werden. Nach Bemerkung 2.3.18 ist  $\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$  Richtungsvektor von  $g$ . In der Gleichung für  $g$  setzen wir  $x_2 = 0$  und erhalten  $x_1 = 3$ . Somit ist  $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  ein Punkt auf  $g$  und wir erhalten die Parameterdarstellung

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

LEMMA 2.3.25. Für Geraden in  $\mathbb{R}^2$  sind die Inzidenzaxiome I1, I2 und I3 erfüllt.

BEWEIS. Um Axiom I1 zu verifizieren seien  $A, B \in \mathbb{R}^2$  und  $A \neq B$ . Dann ist  $B - A \neq 0$  und  $\{A + t(B - A) : t \in \mathbb{R}\}$  daher eine Gerade, die offensichtlich  $A$  und  $B$  enthält. Die Eindeutigkeit der Geraden folgt aus Bemerkung 2.3.21.

Ist  $g = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$  eine Gerade in  $\mathbb{R}^2$ , dann sind  $P$  und  $P + v$  zwei verschiedene Punkte von  $g$ , denn  $v \neq 0$ . Dies zeigt, dass Axiom I2 erfüllt ist.

Um Axiom I3 einzusehen genügt es zu zeigen, dass die Punkte  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  nicht kollinear sind. Indirekt angenommen diese drei Punkte liegen auf einer Geraden. Dann existieren  $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$  mit  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$  und so, dass die Komponenten der drei Punkte der Gleichung  $a_1x_1 + a_2x_2 = b$  genügen, siehe Lemma 2.3.9. Daraus erhalten wir drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 &= b, \\ a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 &= b, \\ a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 &= b. \end{aligned}$$

Es folgt  $b = a_1 = a_2 = 0$ , ein Widerspruch zu  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ .  $\square$

KOROLLAR 2.3.26. Sei  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Eine Teilmenge  $g \subseteq \mathcal{E}$  ist genau dann eine Gerade, wenn  $x(g)$  eine Gerade in  $\mathbb{R}^2$  ist.

BEWEIS. Die eine Implikation haben wir bereits in Satz 2.3.6 gesehen. Für die umgekehrte Implikation sei nun  $x(g)$  eine Gerade in  $\mathbb{R}^2$ . Wir wollen zeigen, dass  $g$  eine Gerade in  $\mathcal{E}$  ist. Jede Gerade in  $\mathbb{R}^2$  enthält wenigstens zwei verschiedene Punkte, siehe Axiom I2 in Lemma 2.3.25. Es existieren daher  $A, B \in g$  mit  $x(A) \neq x(B)$ . Bezeichne  $h := g(A, B)$  die Gerade durch  $A$  und  $B$ . Nach Satz 2.3.6 ist  $x(h)$  eine Gerade in  $\mathbb{R}^2$ . Nach Konstruktion laufen die beiden Geraden  $x(g)$  und  $x(h)$  beide durch die Punkte  $x(A)$  und  $x(B)$ . Nach der Eindeutigkeitsaussage in Axiom I1 in Lemma 2.3.25 muss daher  $x(g) = x(h)$  gelten. Mit Proposition 2.3.4 folgt  $g = h$ , also ist  $g$  eine Gerade.  $\square$

PROPOSITION 2.3.27 (Teilverhältnis in Koordinaten). Sei  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems und seien  $B \neq C$  zwei verschiedene Punkte in  $\mathcal{E}$ . Liegt ein weiterer Punkt  $A$  auf der Geraden  $g := g(B, C)$ , dann gilt

$$x(A) = x(B) + t(x(C) - x(B)) \quad \text{wobei } t = -\frac{AB}{BC}.$$

Der Parameter  $t$  stimmt daher mit der Koordinate des entsprechenden Punktes  $A$  bezüglich des Koordinatensystems  $(B, C)$  auf  $g$  überein.

BEWEIS. Ist  $g$  nicht parallel zur zweiten Koordinatenachse, dann gilt  $x_1(B) \neq x_1(C)$  und wir erhalten wie im Beweis von Satz 2.3.6

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{x_1(B) - x_1(A)}{x_1(C) - x_1(B)}.$$

Mit  $t = -\frac{AB}{BC}$  lässt sich dies äquivalent in der Form

$$x_1(A) = x_1(B) + t(x_1(C) - x_1(B))$$

schreiben. Diese Gleichung bleibt auch gültig, wenn  $g$  parallel zur zweiten Koordinatenachse ist, denn in diesem Fall gilt  $x_1(A) = x_1(B) = x_1(C)$ . Analog erhalten wir

$$x_2(A) = x_2(B) + t(x_2(C) - x_2(B)).$$



Zusammen besagen die letzten beiden Gleichungen gerade  $x(A) = x(B) + t(x(C) - x(B))$ .  $\square$

**BEMERKUNG 2.3.28** (Anordnungsrelation in Koordinaten). Ist  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems und sind  $A, B, C \in \mathcal{E}$  drei Punkte, so gilt  $B * A * C$  genau dann wenn eine reelle Zahl  $0 < t < 1$  existiert, sodass  $x(A) = x(B) + t(x(C) - x(B))$ . Dies folgt sofort aus Satz 2.3.6 und Proposition 2.3.27, denn ein Punkt  $A$  liegt genau dann zwischen  $B$  und  $C$ , wenn  $A$  auf der Geraden  $g(B, C)$  liegt und  $-1 < \frac{AB}{BC} < 0$  gilt, siehe Bemerkung 2.1.9. Für Intervalle erhalten wir somit die Koordinatendarstellung

$$x((BC)) = \{x(B) + t(x(C) - x(B)) \mid 0 < t < 1\}.$$

Analog erhalten wir folgende Beschreibung der Halbstrahlen in Koordinaten:

$$x((BC>)) = \{x(B) + t(x(C) - x(B)) \mid t > 0\}, \quad (44)$$

$$x(<B)C) = \{x(B) + t(x(C) - x(B)) \mid t < 0\}. \quad (45)$$

Dabei folgt die erste aus der Gleichung vor (25), und die zweite aus (26).

**DEFINITION 2.3.29** (Parallele Geraden in  $\mathbb{R}^2$ ). Zwei Geraden  $g$  und  $h$  in  $\mathbb{R}^2$  werden *parallel* genannt, falls  $g = h$  oder  $g \cap h = \emptyset$  gilt. Wir schreiben in diesem Fall  $g \parallel h$ , vgl. Definition 1.1.2.

**PROPOSITION 2.3.30** (Parallele Geraden in Koordinaten). Sei  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Zwei Geraden  $g$  und  $h$  in  $\mathcal{E}$  sind genau dann parallel, wenn  $x(g)$  und  $x(h)$  parallel Geraden in  $\mathbb{R}^2$  sind.

**BEWEIS.** Dies folgt sofort aus der Injektivität der Koordinatenabbildung, siehe Proposition 2.2.3.  $\square$

**DEFINITION 2.3.31** (Parallele Vektoren in  $\mathbb{R}^2$ ). Zwei Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  werden *parallel* genannt falls  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  existiert, sodass  $v = \lambda w$ . In diesem Fall schreiben wir  $v \parallel w$ .

**BEMERKUNG 2.3.32.** Parallel zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

**LEMMA 2.3.33.** Zwei Vektoren  $0 \neq v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  und  $0 \neq w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$  sind genau dann parallel, wenn  $v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0$  gilt.

**BEWEIS.** Sind  $v$  und  $w$  parallel, dann existiert  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $v = \lambda w$  und wir erhalten  $v_1 w_2 - v_2 w_1 = \lambda w_1 w_2 - \lambda w_2 w_1 = 0$ . Sei nun umgekehrt  $v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0$ . Ist  $w_1 \neq 0$  dann setzen wir  $\lambda := v_1/w_1$  und erhalten

$$\lambda w = \frac{v_1}{w_1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 / w_1 \\ v_1 w_2 / w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v.$$

Ist  $w_2 \neq 0$  dann können wir  $\lambda := v_2/w_2$  verwenden und erhalten

$$\lambda w = \frac{v_2}{w_2} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_1 / w_2 \\ v_2 w_2 / w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v.$$

In jedem Fall existiert also  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  mit  $v = \lambda w$ .  $\square$

**PROPOSITION 2.3.34** (Parallele Geraden in  $\mathbb{R}^2$ ). Zwei Geraden in  $\mathbb{R}^2$  sind genau dann parallel wenn ihre Richtungsvektoren parallel sind.

BEWEIS. Sei  $g = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$  eine Gerade und  $h$  eine weitere Gerade mit Richtungsvektor  $w$ . Wir bezeichnen die Komponenten dieser Vektoren mit  $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  und  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ . Nach Bemerkung 2.3.18 lässt sich  $h$  in der Form

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : w_2 x_1 - w_1 x_2 = b \right\}$$

schreiben, für ein geeignetes  $b \in \mathbb{R}$ . Die Schnittpunkte von  $g$  und  $h$  entsprechen daher den Parametern  $t \in \mathbb{R}$ , die der Gleichung

$$w_2(p_1 + tv_1) - w_1(p_2 + tv_2) = b$$

genügen. Äquivalent kann diese Gleichung in der Form

$$t(w_2 v_1 - w_1 v_2) = b - w_2 p_1 + w_1 p_2$$

geschrieben werden. Die beiden Geraden  $g$  und  $h$  schneiden sich genau dann in einem einzigen Punkt, wenn diese Gleichung eine eindeutige Lösung  $t \in \mathbb{R}$  besitzt. Dies ist offensichtlich genau dann der Fall wenn  $w_2 v_1 - w_1 v_2 \neq 0$  gilt. Die Geraden  $g$  und  $h$  sind daher genau dann parallel, wenn  $w_2 v_1 - w_1 v_2 = 0$  gilt. Nach Lemma 2.3.33 ist dies genau dann der Fall wenn die Richtungsvektoren  $v$  und  $w$  parallel sind.  $\square$

BEMERKUNG 2.3.35 (Parallele in Parameterdarstellung). Sei  $g$  eine Gerade in  $\mathbb{R}^2$  mit Richtungsvektor  $v$  und sei  $P$  ein weiterer Punkt in  $\mathbb{R}^2$ . Dann ist  $\{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$  die eindeutige Parallele zu  $g$  durch  $P$ .

BEISPIEL 2.3.36. Es soll die Parallele zur Geraden  $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$  durch den Punkt  $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$  bestimmt werden. Nach Bemerkung 2.3.35 ist sie durch  $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$  gegeben.

BEMERKUNG 2.3.37 (Parallele in Gleichungsform). Sei  $g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\}$  eine Gerade in Gleichungsform und  $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$  ein Punkt in  $\mathbb{R}^2$ . Setzen wir  $c := a_1 p_1 + a_2 p_2$ , dann ist  $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = c \right\}$  die eindeutige Parallele zu  $g$  durch  $P$ .

BEISPIEL 2.3.38. Es soll die Parallele zur Geraden  $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + 7x_2 = 1 \right\}$  durch den Punkt  $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$  in Gleichungsform bestimmt werden. Nach Bemerkung 2.3.37 ist diese durch  $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + 7x_2 = 30 \right\}$  gegeben.

BEMERKUNG 2.3.39 (Schnitt von Geraden und Gleichungssysteme). Da sich Geraden in  $\mathbb{R}^2$  durch lineare Gleichungen beschreiben lassen, kann der Schnittpunkt zweier Geraden durch Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden. Sind beide Geraden

in Gleichungsform gegeben, erhalten wir ein System von zwei linearen Gleichungen in zwei Variablen (den beiden Komponenten des Schnittpunkts). Auch wenn beide Geraden in Parameterdarstellung gegeben sind, führt die Schnittpunktbestimmung auf ein System von zwei linearen Gleichungen in zwei Variablen (den Parametern der beiden Parameterdarstellungen). Liegt eine Gerade in Parameterdarstellung vor und ist die andere durch eine Gleichung beschrieben, dann führt Einsetzen der Parameterdarstellung in die Gleichung auf eine einzige lineare Gleichung in einer Variable (dem Parameter der Parameterdarstellung). Sind die Geraden nicht parallel, dann haben sie genau einen Schnittpunkt und entsprechend haben die Gleichungssysteme (bzw. die Gleichung) genau eine Lösung.

**BEWEIS DES ORIENTIERTEN STRAHLENSATZES 2.1.10 MITTELS KOORDINATEN.** Wir betrachten das Koordinatensystem  $(O, B, B')$  und die damit assoziierte Koordinatenabbildung  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Es gilt daher, siehe Bemerkung 2.3.5,

$$x(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(B') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus Proposition 2.3.27 erhalten wir

$$x(A) = \begin{pmatrix} -\frac{AO}{OB} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(A') = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{A'O}{OB'} \end{pmatrix}.$$

Für die Richtungsvektoren der Geraden  $g(x(A), x(A'))$  und  $g(x(B), x(B'))$  folgt

$$x(A') - x(A) = \begin{pmatrix} \frac{AO}{OB} \\ -\frac{A'O}{OB'} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(B') - x(B) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

$$\begin{aligned} g(A, A') \parallel g(B, B') &\Leftrightarrow g(x(A), x(A')) \parallel g(x(B), x(B')) && \text{nach Proposition 2.3.30} \\ &\Leftrightarrow x(A') - x(A) \parallel x(B') - x(B) && \text{nach Proposition 2.3.34} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{AO}{OB} \\ -\frac{A'O}{OB'} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{nach (46)} \\ &\Leftrightarrow \frac{AO}{OB} \cdot 1 - \left(-\frac{A'O}{OB'}\right) \cdot (-1) = 0 && \text{nach Lemma 2.3.33} \\ &\Leftrightarrow \frac{AO}{OB} = \frac{A'O}{OB'} \end{aligned}$$

Damit ist der Satz 2.1.10 erneut bewiesen. Da der Strahlensatz bei der Herleitung grundlegender Eigenschaften affiner Koordinatensysteme eine wesentliche Rolle spielt, ist es allerdings nicht besonders überraschen, dass er sich damit nun leicht beweisen lässt.  $\square$

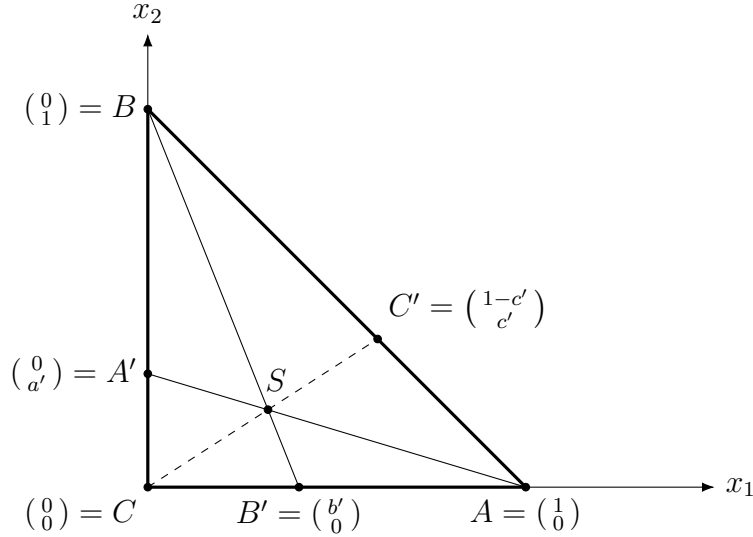
**BEWEIS DES SATZES VON CEVA 2.1.12 MITTELS KOORDINATEN.** Wir betrachten das affine Koordinatensystem  $(C, A, B)$  und die damit assoziierte Koordinatenabbildung  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Es gilt daher, siehe Bemerkung 2.3.5,

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Da die Punkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  auf den Trägergeraden der Dreiecksseiten liegen, müssen ihre Koordinaten von der Form

$$x(A') = \begin{pmatrix} 0 \\ a' \end{pmatrix}, \quad x(B') = \begin{pmatrix} b' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(C') = \begin{pmatrix} 1-c' \\ c' \end{pmatrix}. \quad (48)$$

sein, siehe Satz 2.3.6. Da diese Punkte nach Voraussetzung verschieden von den Eckpunkten



des Dreiecks sind, gilt  $a', b', c' \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Aus Proposition 2.3.27 erhalten wir

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{1-b'}{b'}, \quad \frac{BC'}{C'A} = \frac{1-c'}{c'} \quad \text{und} \quad \frac{CA'}{A'B} = \frac{a'}{1-a'}, \quad (49)$$

denn

$$\begin{aligned} x(B') - x(A) &= \frac{1-b'}{b'} (x(C) - x(B')), \\ x(C') - x(B) &= \frac{1-c'}{c'} (x(A) - x(C')), \\ x(A') - x(C) &= \frac{a'}{1-a'} (x(B) - x(A')). \end{aligned}$$

Um den Schnittpunkt der Geraden  $g(x(A), x(A'))$  und  $g(x(B), x(B'))$  zu berechnen bestimmen wir die Richtungsvektoren

$$x(A') - x(A) = \begin{pmatrix} -1 \\ a' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(B') - x(B) = \begin{pmatrix} b' \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Wir erhalten folgende Darstellungen durch Gleichungen, siehe Bemerkung 2.3.18,

$$\begin{aligned} g(x(A), x(A')) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a'x_1 + x_2 = a' \right\} \quad \text{und} \\ g(x(B), x(B')) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + b'x_2 = b' \right\}. \end{aligned}$$

Nach Proposition 2.3.34 und Lemma 2.3.33 sind diese beiden Geraden genau dann parallel wenn  $a'b' = 1$  gilt, siehe (50). Wir nehmen an, dass sie nicht parallel sind und bezeichnen

ihren Schnittpunkt mit  $S$ . Eine einfache Rechnung liefert

$$S = \frac{1}{1 - a'b'} \left( \frac{(1 - a')b'}{a'(1 - b')} \right). \quad (51)$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} &g(A, A'), g(B, B'), g(C, C') \text{ schneiden sich in einem Punkt} \\ \Leftrightarrow &g(x(A), x(A')), g(x(B), x(B')), g(x(C), x(C')) \text{ konkurrent} \\ \Leftrightarrow &x(C), S, x(C') \text{ liegen auf einer Geraden} \\ \Leftrightarrow &S - x(C) \text{ und } x(C') - x(C) \text{ sind parallel} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} (1 - a')b' \\ a'(1 - b') \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 - c' \\ c' \end{pmatrix} \quad (\text{siehe (47), (48) und (51)}) \\ \Leftrightarrow &(1 - a')b'c' - a'(1 - b')(1 - c') = 0 \quad (\text{nach Lemma 2.3.33}) \\ \Leftrightarrow &\frac{1 - b'}{b'} \cdot \frac{1 - c'}{c'} \cdot \frac{a'}{1 - a'} = 1 \\ \Leftrightarrow &\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} = 1 \quad (\text{siehe (49)}) \end{aligned}$$

Auch der Fall paralleler Geraden lässt sich leicht behandeln. Nach Lemma 2.3.33 sind die beiden Geraden  $g(A, A')$  und  $g(C, C')$  genau dann parallel wenn  $(1 - c')a' = -c'$  gilt, siehe (48) und (50). Damit ist der Satz von Ceva erneut bewiesen.  $\square$

DEFINITION 2.3.40 (Skalarprodukt und Norm). Unter dem *Standardskalarprodukt* zweier Vektoren  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  und  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  verstehen wir die Zahl

$$\langle v, w \rangle := v_1w_1 + v_2w_2.$$

Unter der *Norm* von  $v$  verstehen wir die Zahl

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Beachte, dass die Wurzel existiert, denn  $\langle v, v \rangle = v_1^2 + v_2^2 \geq 0$ .

LEMMA 2.3.41 (Eigenschaften des Skalarprodukts). Für  $v, v', w, w \in \mathbb{R}^2$  und  $t \in \mathbb{R}$  gilt:

- (a)  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$  (*Symmetrie*)
- (b)  $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$  und  $\langle tv, w \rangle = t\langle v, w \rangle$  (*Linearität in der ersten Variable*)
- (c)  $\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$  und  $\langle v, tw \rangle = t\langle v, w \rangle$  (*Linearität in der zweiten Variable*)
- (d)  $\langle v, v \rangle \geq 0$  und  $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$  (*positiv definit*)

BEWEIS. Die Aussage in (a) ist offensichtlich, denn

$$\langle v, w \rangle = v_1w_1 + v_2w_2 = w_1v_1 + w_2v_2 = \langle w, v \rangle.$$

Auch die Aussage in (b) lässt sich direkt verifizieren, denn

$$\langle v + v', w \rangle = (v_1 + v'_1)w_1 + (v_2 + v'_2)w_2 = v_1w_1 + v'_1w_1 + v_2w_2 + v'_2w_2 = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$$

und

$$\langle tv, w \rangle = (tv_1)w_1 + (tv_2)w_2 = t(v_1w_1 + v_2w_2) = t\langle v, w \rangle.$$

Die Aussage in (c) folgt durch Kombination von (a) und (b). Genauer, gilt

$$\langle v, w + w' \rangle = \langle w + w', v \rangle = \langle w, v \rangle + \langle w', v \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$$

und

$$\langle v, tw \rangle = \langle tw, v \rangle = t\langle w, v \rangle = t\langle v, w \rangle.$$

Da Quadrate nicht negativ sind, gilt  $\langle v, v \rangle = v_1^2 + v_2^2 \geq 0$ . Gleichheit tritt genau dann ein, wenn  $v_1^2 = 0 = v_2^2$ . Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn  $v_1 = 0 = v_2$ , also genau dann wenn  $v = 0$ .  $\square$

**BEMERKUNG 2.3.42.** Mit den Rechenregeln in Lemma 2.3.41 folgt:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v + w \rangle + \langle w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2. \end{aligned} \tag{52}$$

Eine analoge Rechnung zeigt auch

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2. \tag{53}$$

**LEMMA 2.3.43** (Cauchy–Schwartz Ungleichung). *Für  $v, w \in \mathbb{R}^2$  gilt*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \tag{54}$$

*Gleichheit tritt genau dann ein, wenn ein der beiden Vektor ein Vielfaches des anderen ist.*

**BEWEIS.** O.B.d.A. sei  $v \neq 0$ . Sei  $t := \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2}$  und daher  $\langle v, w - tv \rangle = \langle v, w \rangle - t\langle v, v \rangle = 0$ . Mit (52) und  $\|tv\|^2 = \langle tv, tv \rangle = t\langle v, tv \rangle = t^2\langle v, v \rangle = t^2\|v\|^2$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|tv + (w - tv)\|^2 \\ &= \|tv\|^2 + 2\langle tv, w - tv \rangle + \|w - tv\|^2 \\ &= t^2\|v\|^2 + 2t\langle v, w - tv \rangle + \|w - tv\|^2 \\ &= t^2\|v\|^2 + \|w - tv\|^2 \\ &\geq t^2\|v\|^2 \\ &= \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|v\|^2}. \end{aligned}$$

Somit  $\langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2$  und daher (54). Gleichheit tritt genau dann ein wenn  $\|w - tv\|^2 = 0$ , d.h. genau dann wenn  $w - tv = 0$  ist, also genau dann wenn  $w$  ein Vielfaches von  $v$  ist.  $\square$

**LEMMA 2.3.44** (Eigenschaften der Norm). *Für  $v, w \in \mathbb{R}^2$  und  $t \in \mathbb{R}$  gilt:*

- (a)  $\|v\| \geq 0$  und  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$  (nicht-degeneriert)
- (b)  $\|tv\| = |t| \cdot \|v\|$  (Homogenität)
- (c)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  (Dreiecksungleichung)

**BEWEIS.** Die Aussage in (a) folgt sofort aus Lemma 2.3.41(d). Die Aussage in (b) folgt sofort aus Lemma 2.3.41(b)&(c), denn

$$\|tv\|^2 = \langle tv, tv \rangle = t\langle v, tv \rangle = t^2\langle v, v \rangle = t^2\|v\|^2,$$

und daher  $\|tv\| = |t| \cdot \|v\|$ . Mit (52) und Lemma 2.3.43 erhalten wir

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2,$$

und dann (c).  $\square$

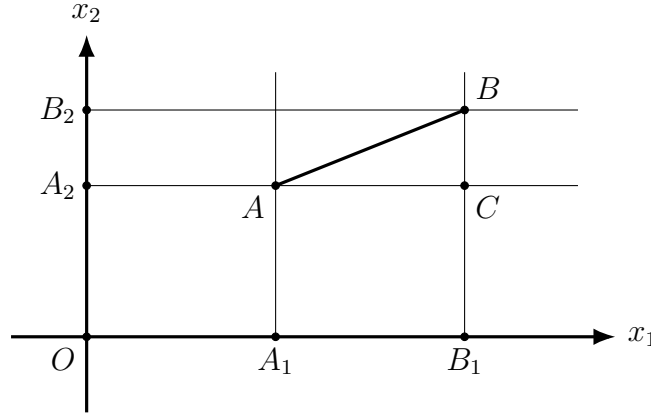
**DEFINITION 2.3.45** (Kartesisches Koordinatensystem). Unter einem *kartesischen Koordinatensystem* der Ebene verstehen wir ein affines Koordinatensystem  $(O, X_1, X_2)$ , für das  $\angle X_1 O X_2$  ein rechter Winkel ist und  $|OX_1| = 1 = |OX_2|$  gilt.

**SATZ 2.3.46** (Abstand zwischen Punkten in Koordinaten). Sei  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die *Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems*. Für Punkte  $A$  und  $B$  gilt dann

$$|AB| = \|x(B) - x(A)\|.$$

Zwei Strecken  $AB$  und  $CD$  genau dann kongruent, wenn  $\|x(B) - x(A)\| = \|x(D) - x(C)\|$ .

**BEWEIS.** Wir zeichnen Parallele zu den beiden Achsen durch  $A$  und  $B$  und bezeichnen die Schnittpunkte wie in der Skizze angedeutet. Ist  $C$  verschieden von  $A$  und  $B$ , dann bildet



$ABC$  ein rechtwinkeliges Dreieck und wir erhalten aus Satz 1.5.49 (Pythagoras)

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2.$$

Beachte, dass diese Gleichung auch gültig bleibt, wenn  $C$  mit  $A$  oder  $B$  oder beiden zusammenfällt. Da  $ACB_1A_1$  und  $BCA_2B_2$  Parallelogramme bilden, erhalten wir aus Satz 1.5.13

$$|AC| = |A_1B_1| \quad \text{und} \quad |CB| = |A_2B_2|$$

Auch diese Gleichungen bleiben richtig, wenn  $C$  mit  $A$  oder  $B$  oder beiden zusammenfällt. Aus Proposition 2.2.9 folgt

$$|A_1B_1| = |x_1(B) - x_1(A)| \quad \text{und} \quad |A_2B_2| = |x_2(B) - x_2(A)|.$$

Somit

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |x_1(B) - x_1(A)|^2 + |x_2(B) - x_2(A)|^2 \\ &= (x_1(B) - x_1(A))^2 + (x_2(B) - x_2(A))^2 = \|x(B) - x(A)\|^2, \end{aligned}$$

also  $|AB| = \|x(B) - x(A)\|$ . Die zweite Aussage des Satzes folgt unmittelbar.  $\square$

SATZ 2.3.47 (Kongruente Winkel in Koordinaten). Sei  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems. Zwei Winkel  $\angle ABC$  und  $\angle A'B'C'$  sind genau dann kongruent wenn

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{\langle v', w' \rangle}{\|v'\| \|w'\|}, \quad (55)$$

wobei  $v := x(A) - x(B)$ ,  $w := x(C) - x(B)$ ,  $v' := x(A') - x(B')$  und  $w' := x(C') - x(B')$ . Insbesondere ist  $\angle ABC$  genau dann ein rechter Winkel, wenn  $\langle v, w \rangle = 0$  erfüllt ist.

BEWEIS. Wir betrachten Winkel  $\angle A''B''C''$ , wobei  $B'' := B'$ ,  $A''$  ein Punkt auf dem Schenkel  $(B'A'>$ , und  $C''$  ein Punkt auf dem Schenkel  $(B'C''>$ , sodass

$$|B''A''| = |BA| \quad \text{und} \quad |B''C''| = |BC|. \quad (56)$$

Nach Konstruktion gilt

$$\angle A''B''C'' = \angle A'B'C'. \quad (57)$$

Wegen (44) existieren  $s > 0$  und  $t > 0$ , sodass  $v'' = sv'$  und  $w'' = tw'$ , wobei  $v'' := x(A'') - x(B'')$  und  $w'' := x(C'') - x(B'')$ . Mit Lemma 2.3.41 und Lemma 2.3.44 folgt

$$\frac{\langle v'', w'' \rangle}{\|v''\| \|w''\|} = \frac{\langle sv', tw' \rangle}{\|sv'\| \|tw'\|} = \frac{st}{|s||t|} \cdot \frac{\langle v', w' \rangle}{\|v'\| \|w'\|} = \frac{\langle v', w' \rangle}{\|v'\| \|w'\|}.$$

Wegen (56) folgt aus Satz 1.4.3 (SWS) und Satz 1.4.17 (SSS)

$$\angle ABC \equiv \angle A''B''C'' \quad \Leftrightarrow \quad |CA| = |C''A''|. \quad (58)$$

Mit Proposition 2.3.46 und (53) und weil  $x(A) - x(C) = v - w$  gilt

$$|CA|^2 = \|x(A) - x(C)\|^2 = \|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$$

und analog

$$|C''A''|^2 = \|v''\|^2 - 2\langle v'', w'' \rangle + \|w''\|^2.$$

Proposition 2.3.46 und (56) erhalten wir  $\|v''\| = |BA''| = |BA| = \|v\|$  sowie  $\|w''\| = |BC''| = |BC| = \|w\|$ . Somit

$$|CA| = |C''A''| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{\langle v'', w'' \rangle}{\|v''\| \|w''\|} \quad (59)$$

Die erste Aussage des Satzes folgt nun durch Kombination von (57), (58) und (59).

Um auch die Charakterisierung rechter Winkel einzusehen betrachten wir  $A' = A$ ,  $B' = B$  und den Punkt  $C'$  mit Koordinaten  $x(C') = x(B) - (x(C) - x(B))$ . Nach Konstruktion liegt  $C'$  auf dem Halbstrahl  $\langle B \rangle C$ , siehe (45), also sind  $\angle ABC$  und  $\angle A'B'C'$  Nebenwinkel. Somit ist  $\angle ABC$  genau dann ein rechter Winkel, wenn  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$  gilt, siehe Definition 1.4.29. Aus dem vorangehenden Absatz folgt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die Relation (55) gilt. Da  $v' = v$ ,  $w' = -w$ ,  $\|v'\| = \|v\|$ ,  $\|w'\| = \|w\|$  und  $\langle v', w' \rangle = -\langle v, w \rangle$  ist dies genau dann der Fall, wenn  $\langle v, w \rangle = 0$  erfüllt ist.  $\square$

DEFINITION 2.3.48 (Orthogonale Vektoren in  $\mathbb{R}^2$ ). Zwei Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^2$  werden *orthogonal* genannt, wenn  $\langle v, w \rangle = 0$  gilt. In diesem Fall sagen wir auch  $v$  und  $w$  stehen *normal* aufeinander und schreiben  $v \perp w$ .

BEMERKUNG 2.3.49. Sei  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems,  $g, h$  zwei Geraden,  $v$  Richtungsvektor von  $x(g)$ , und  $w$  Richtungsvektor von  $x(h)$ . Nach Satz 2.3.47 stehen  $g$  und  $h$  genau dann normal aufeinander, wenn  $v \perp w$  gilt.



Steht ein Vektor  $n \in \mathbb{R}^2$  normal auf einen Richtungsvektor  $v$  einer Geraden  $g$  in  $\mathbb{R}^2$ , d.h.  $\langle n, v \rangle = 0$ , dann steht  $n$  auf alle Richtungsvektoren von  $g$  normal. Jeder andere Richtungsvektor von  $g$  ist nämlich von der Form  $\lambda v$  für ein  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  und daher gilt  $\langle n, \lambda v \rangle = \lambda \langle n, v \rangle = 0$ .

**DEFINITION 2.3.50** (Normalvektor einer Geraden in  $\mathbb{R}^2$ ). Unter einem Normalvektor einer Geraden in  $\mathbb{R}^2$  verstehen wir jeden Vektor  $0 \neq n \in \mathbb{R}^2$ , der normal auf die Richtungsvektoren der Geraden steht.

**BEMERKUNG 2.3.51.** Sei  $0 \neq v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  und  $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Dann gilt  $\langle v, n \rangle = 0$  genau dann wenn  $v_1 n_1 + v_2 n_2 = 0$ , und dies ist genau dann der Fall, wenn  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $n = \lambda \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$  existiert, siehe Bemerkung 2.3.18. Insbesondere erhalten wir einen zu  $v$  normalen Vektor indem wir die beiden Komponenten von  $v$  vertauschen und eine davon mit  $-1$  multiplizieren. Alle anderen Vektoren, die normal auf  $v$  stehen sind Vielfache davon.

**BEMERKUNG 2.3.52** (Menge aller Normalvektoren). Ist  $n$  Normalvektor einer Geraden  $g$  in  $\mathbb{R}^2$  dann stimmt  $\{\lambda n : 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}\}$  mit der Menge aller Normalvektoren von  $g$  überein. Dies folgt aus Bemerkung 2.3.51.

**BEMERKUNG 2.3.53** (Normalvektordarstellung von Geraden). Ist  $A$  ein Punkte einer Geraden  $g$  in  $\mathbb{R}^2$  mit Normalvektor  $n$ , dann lässt sich  $g$  in der Form

$$g = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X - A \rangle = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X \rangle = \langle n, A \rangle\}$$

schreiben. Umgekehrt ist jede Menge der Gestalt  $\{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X - A \rangle = 0\}$ , wobei  $n, A \in \mathbb{R}^2$  und  $n \neq 0$ , eine Gerade mit Normalvektor  $n$ , die durch den Punkt  $A$  läuft. Dies folgt aus den Bemerkungen 2.3.18 und 2.3.51, denn  $\langle n, X \rangle = n_1 x_1 + n_2 x_2$ , wenn wir die Komponenten von  $n$  und  $X$  mit  $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$  und  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  bezeichnen.

**BEISPIEL 2.3.54.** Die Gerade durch die beiden Punkte  $A = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$  soll durch eine Gleichung beschrieben werden. Wir berechnen einen Richtungsvektor  $B - A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  und erhalten einen Normalvektor  $n = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ , siehe Bemerkung 2.3.51. Nach Bemerkung 2.3.53 besitzt die Gerade die Normalvektordarstellung

$$g(A, B) = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, X - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 15 \right\}.$$

**PROPOSITION 2.3.55** (Normalabstand eines Punktes von einer Geraden). Sei  $A$  ein Punkt auf einer Geraden  $g$  und  $P$  ein weiterer Punkt. Ist  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems,  $n \in \mathbb{R}^2$  Normalvektor von  $x(g)$  und  $w := x(P) - x(A)$  dann gilt für den Normalabstand von  $P$  zu  $g$  die Formel

$$d(P, g) = \frac{|\langle n, w \rangle|}{\|n\|}.$$

**BEWEIS.** Sei  $h$  das Lot durch  $P$  auf  $g$ . Da wir ein kartesisches Koordinatensystem betrachten ist der Richtungsvektor von  $x(h)$  Normalvektor von  $x(g)$ , siehe Bemerkung 2.3.49.

Da auch  $n$  Normalvektor von  $x(g)$  ist muss  $n$  Richtungsvektor von  $x(h)$  sein, siehe Bemerkung 2.3.52. In Koordinaten ist das Lot daher durch die Parameterdarstellung

$$x(h) = \{x(P) + tn : t \in \mathbb{R}\}$$

beschrieben, siehe Bemerkung 2.3.20. Für die Koordinatendarstellung der Geraden  $g$  gilt

$$x(g) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X - x(A) \rangle = 0\},$$

siehe Bemerkung 2.3.53. Schneiden von  $x(h)$  mit  $x(g)$  führt auf die Gleichung

$$\langle n, x(P) + tn - x(A) \rangle = 0.$$

Auflösen nach  $t$  liefert  $t = -\frac{\langle n, w \rangle}{\|n\|^2}$ , siehe Lemma 2.3.41. Bezeichnet  $F$  den Fußpunkt des Lots, d.h. den Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ , erhalten wir daher

$$x(F) = x(P) - \frac{\langle n, w \rangle}{\|n\|^2} n.$$

Für den Normalabstand erhalten wir mit Proposition 2.2.9 und Lemma 2.3.44(b)

$$d(P, g) = |PF| = \|x(F) - x(P)\| = \left\| -\frac{\langle n, w \rangle}{\|n\|^2} n \right\| = \frac{|\langle n, w \rangle|}{\|n\|^2} \|n\| = \frac{|\langle n, w \rangle|}{\|n\|}. \quad \square$$

**PROPOSITION 2.3.56** (Normalprojektion eines Punktes). *Sei  $A$  ein Punkt auf einer Geraden  $g$ ,  $P$  ein weiterer Punkt und  $F$  der Fußpunkt des Lots durch  $P$  auf  $g$ . Ist  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems,  $v \in \mathbb{R}^2$  Richtungsvektor von  $x(g)$  und  $w := x(P) - x(A)$ , dann gilt*

$$|AF| = \frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\|} \quad \text{und} \quad |PF| = \frac{\sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}}{\|v\|}.$$

**BEWEIS.** Bezeichne  $h$  das Lot durch  $P$  auf  $g$ . Die erste Gleichung folgt aus Proposition 2.3.55, denn  $|AF| = d(A, h)$  und  $v$  ist Normalvektor von  $x(h)$ . Die zweite Gleichung folgt dann mit dem Satz des Pythagoras,  $|PF|^2 = |AP|^2 - |AF|^2$ , und  $|AP| = \|x(P) - x(A)\| = \|w\|$  durch eine direkte Rechnung.  $\square$

**HÖHENSCHNITTPUNKT MIT KARTESISCHEM KOORDINATENSYSTEM.** Wir wollen uns erneut davon überzeugen, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks  $ABC$  in einem Punkt schneiden. Sei dazu  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems. Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir  $\tilde{A} := x(A)$ ,  $\tilde{B} := x(B)$  und  $\tilde{C} := x(C)$  für die Koordinaten der Eckpunkte. Wir bezeichnen die drei Höhen mit  $h_A$ ,  $h_B$  und  $h_C$ . Da die Höhe durch  $A$  normal auf die Seite  $BC$  steht, ist  $\tilde{C} - \tilde{B}$  Normalvektor von  $x(h_A)$ , siehe Bemerkung 2.3.49. Ebenso sind  $\tilde{A} - \tilde{C}$  und  $\tilde{B} - \tilde{A}$  Normalvektoren von  $x(h_B)$  bzw.  $x(h_C)$ . Mit Bemerkung 2.3.53 erhalten wir die Koordinatendarstellungen:

$$x(h_A) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{C} - \tilde{B}, X - \tilde{A} \rangle = 0\}, \quad (60)$$

$$x(h_B) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{A} - \tilde{C}, X - \tilde{B} \rangle = 0\}, \quad (61)$$

$$x(h_C) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{B} - \tilde{A}, X - \tilde{C} \rangle = 0\}. \quad (62)$$

Sei nun  $H$  der Schnittpunkt von  $h_A$  und  $h_B$ . Es genügt zu zeigen, dass  $H$  auch auf  $h_C$  liegt. Nach (60) und (61) erfüllen die Koordinaten  $x(H)$  des Punktes  $H$  die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{C} - \tilde{B}, x(H) \rangle &= \langle \tilde{C}, \tilde{A} \rangle - \langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle, \\ \langle \tilde{A} - \tilde{C}, x(H) \rangle &= \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle - \langle \tilde{C}, \tilde{B} \rangle,\end{aligned}$$

siehe Lemma 2.3.41. Addition der beiden Relationen führt auf

$$\langle \tilde{A} - \tilde{B}, x(H) \rangle = \langle \tilde{C}, \tilde{A} \rangle - \langle \tilde{C}, \tilde{B} \rangle.$$

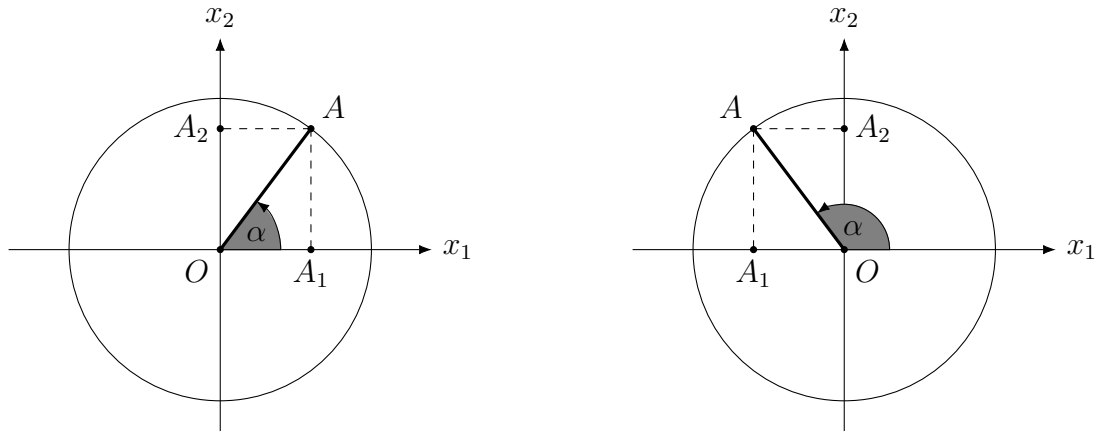
Da dies zur Gleichung  $\langle \tilde{B} - \tilde{A}, X - \tilde{C} \rangle = 0$  äquivalent ist, erhalten wir  $x(H) \in x(h_C)$ , siehe (62), und schließlich  $H \in h_C$ .  $\square$

**2.4. Trigonometrie.** Das Gradmaß ordnet jeder reellen Zahl  $x$  einen Winkel zu, der mit  $x^\circ$  bezeichnet wird. Diese Abbildung,  $\mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathcal{W}}$ ,  $x \mapsto x^\circ$ , ist durch folgende Eigenschaften eindeutig charakterisiert: Für beliebige  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

- (i)  $(x + y)^\circ = x^\circ + y^\circ$  (Additivität),
- (ii)  $x < y$  gilt  $x^\circ < y^\circ$  (Monotonie) und
- (iii)  $90^\circ = R$  (Normierung durch rechten Winkel).

Wir werden dies hier nicht verifizieren. Es lässt sich zeigen, dass das Gradmaß eine Bijektion liefert,  $\mathbb{R} \cong \tilde{\mathcal{W}}$ , d.h. zu jedem Winkel  $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$  existiert genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha = x^\circ$ .

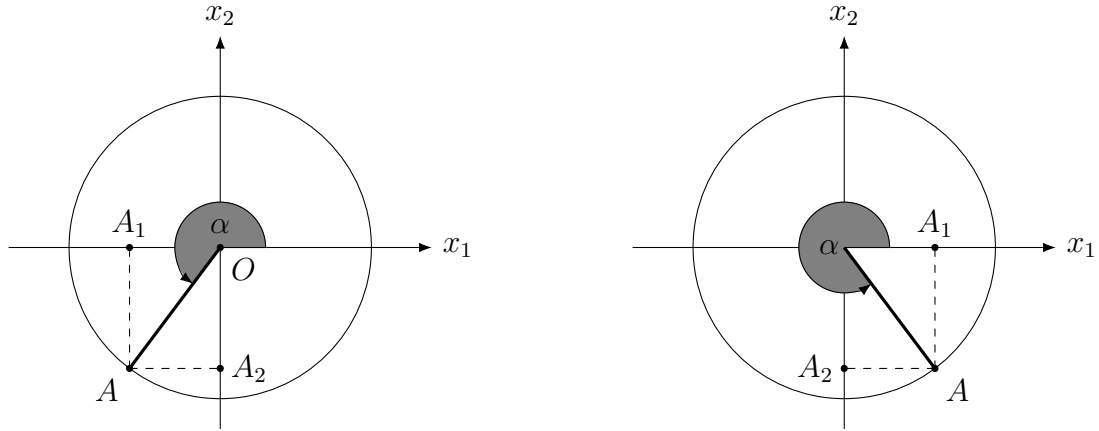
**DEFINITION 2.4.1 (Sinus und Kosinus).** Sei  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems mit Koordinatenursprung  $O$ . Für jeden Winkel  $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$



definieren wir reelle Zahlen  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  wie folgt. Wir tragen den Winkel  $\alpha$  von der positiven ersten Halbachse auf der Halbebene, die die positive zweite Halbachse enthält ab und erhalten einen Halbstrahl  $h$  mit Ausgangspunkt  $O$ , siehe Bemerkung 1.5.7. Bezeichne  $A$  den Punkt auf  $h$  mit  $|OA| = 1$ , d.h. den eindeutigen Schnittpunkt von  $h$  und dem Einheitskreis mit Mittelpunkt  $O$ . Die Winkelfunktionen werden durch die Koordinaten des Punktes  $A$  definiert,

$$\cos \alpha := x_1(A) \quad \text{und} \quad \sin \alpha := x_2(A), \quad \text{d.h.} \quad x(A) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher  $\cos \alpha = \pm |OA_1|$  und  $\sin \alpha = \pm |OA_2|$ , wobei  $A_1$  und  $A_2$ , wie in der Abbildung angedeutet, die Projektionen auf die beiden Achsen bezeichnen.



BEMERKUNG 2.4.2. Wir werden bald sehen, dass die Winkelfunktionen nicht von der Wahl des kartesischen Koordinatensystems abhängen.

BEMERKUNG 2.4.3. In der Situation von Definition 2.4.1 sei nun  $A'$  ein beliebiger Punkt auf dem Halbstrahl  $h$  und  $r := |OA'|$ . Dann gilt

$$x_1(A') = r \cdot \cos \alpha, \quad x_2(A') = r \cdot \sin \alpha, \quad \text{d.h.} \quad x(A') = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Nach Proposition 2.3.27 haben wir nämlich  $x(O) - x(A') = \frac{A'O}{OA'} \cdot (x(A) - x(O))$ . Zusammen mit  $x(O) = 0$  und  $\frac{A'O}{OA'} = -\frac{|A'O|}{|OA'|} = -r$  folgt  $x(A') = r \cdot x(A)$ , also (63).

BEMERKUNG 2.4.4. Für jeden Winkel  $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$  gilt

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Da  $A$  am Einheitskreis liegt und weil  $x(O) = 0$  erhalten wir mit Satz 2.3.46 nämlich

$$1 = |OA|^2 = \|x(A) - x(O)\|^2 = \|x(A)\|^2 = x_1(A)^2 + x_2(A)^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha.$$

BEMERKUNG 2.4.5. Für jeden Winkel  $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$  gilt

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \quad \text{und} \quad -1 \leq \sin \alpha \leq 1.$$

Aus Bemerkung 2.4.4 erhalten wir nämlich  $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \geq \cos^2 \alpha$ , also  $|\cos \alpha| \leq 1$  und analog  $|\sin \alpha| \leq 1$ .

BEMERKUNG 2.4.6 (Spezielle Funktionswerte). Direkt aus der Definition lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \cos(0^\circ) = \cos(360^\circ) &= 1, & \sin(0^\circ) = \sin(360^\circ) &= 0, \\ \cos(90^\circ) &= 0, & \sin(90^\circ) &= 1, \\ \cos(180^\circ) &= -1, & \sin(180^\circ) &= 0, \\ \cos(270^\circ) &= 0, & \sin(270^\circ) &= -1. \end{aligned}$$

BEMERKUNG 2.4.7 (Vorzeichen der Winkelfunktionen). Direkt aus der Definition folgt:

- (a) Für  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  gilt  $0 < \cos \alpha < 1$  und  $0 < \sin \alpha < 1$ .
- (b) Für  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  gilt  $-1 < \cos \alpha < 0$  und  $0 < \sin \alpha < 1$ .
- (c) Für  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$  gilt  $-1 < \cos \alpha < 0$  und  $-1 < \sin \alpha < 0$ .
- (d) Für  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$  gilt  $0 < \cos \alpha < 1$  und  $-1 < \sin \alpha < 0$ .

BEMERKUNG 2.4.8. Zu jeder reellen Zahl  $u$  mit  $-1 \leq u \leq 1$  existiert ein Winkel im Intervall  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ , sodass  $\cos \alpha = u$ . Bezeichnet nämlich  $A$  den Punkt am Einheitskreis mit Koordinaten  $x(A) = \left( \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right)$  und  $\alpha := \sphericalangle AOX_1$ , dann gilt  $\cos \alpha = x_1(A) = u$ .

PROPOSITION 2.4.9 (Periodizität). Für beliebige Winkel  $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$  gilt:

$$\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin(\alpha), \quad \sin(\alpha + 90^\circ) = \cos(\alpha), \quad (64)$$

$$\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos(\alpha), \quad \sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin(\alpha), \quad (65)$$

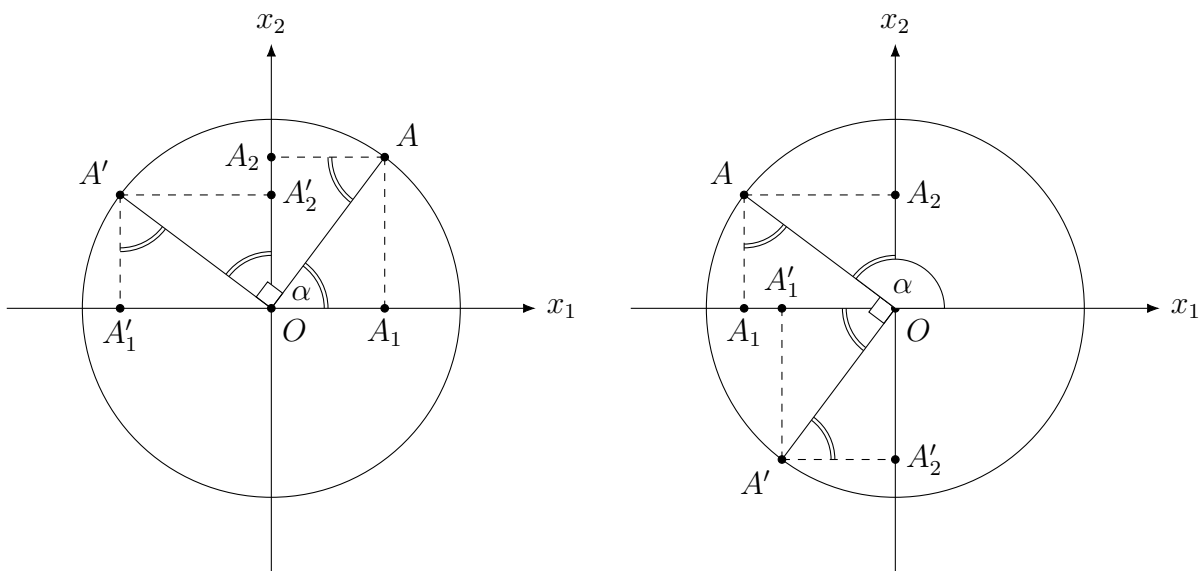
$$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos(\alpha), \quad \sin(\alpha + 360^\circ) = \sin(\alpha). \quad (66)$$

BEWEIS. Die beiden Gleichungen in (66) sind offensichtlich, Abtragen der beiden Winkel  $\alpha$  und  $\alpha + 360^\circ$  liefert denselben Halbstrahl  $h$ , siehe Bemerkung 1.5.7. Um die anderen Relationen einzusehen bezeichnen wir die Punkte am Einheitskreis, die wir durch Abtragen der Winkel  $\alpha$ ,  $\alpha + 90^\circ$  und  $\alpha + 180^\circ$  erhalten mit  $A$ ,  $A'$  und  $A''$ . Somit

$$x(A) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad x(A') = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 90^\circ) \\ \sin(\alpha + 90^\circ) \end{pmatrix}, \quad x(A'') = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 180^\circ) \\ \sin(\alpha + 180^\circ) \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Da  $O$  Mittelpunkt der Strecke  $AA''$  ist gilt  $\frac{A''O}{OA} = 1$ , siehe Bemerkung 2.1.4. Aus Proposition 2.3.27 erhalten wir  $x(O) - x(A'') = \frac{A''O}{OA} \cdot (x(A) - x(O))$ , also  $x(A'') = -x(A)$ , denn  $x(O) = 0$ . Mit (67) folgt (65).

Um (64) zu zeigen betrachten wir zunächst  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Wir bezeichnen die Projektionen von  $A$  und  $A'$  auf die beiden Koordinatenachsen mit  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A'_1$  und  $A'_2$  wie in der Abbildung angedeutet. Beachte  $\sphericalangle A_1OA + 90^\circ = \sphericalangle A_1OA' = 90^\circ + \sphericalangle A'_2OA'$ , also



$\sphericalangle A_1OA = \sphericalangle A'_2OA'$ . Mit dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 folgt

$$\sphericalangle A_2AO = \sphericalangle A_1OA = \sphericalangle A'_2OA' = \sphericalangle A'_1A'O.$$

Nach Satz 1.4.26 (SWW) sind die Dreiecke  $OA_1A$  und  $OA'_2A'$  daher kongruent, es gilt daher  $|OA_1| = |OA'_2|$ . Ebenso sind die Dreiecke  $OA_2A$  und  $OA'_1A'$  kongruent, also  $|OA_2| = |OA'_1|$ .

Wir erhalten

$$\begin{aligned}x_1(A') &= -|OA'_1| = -|OA_2| = -x_2(A), \\x_2(A') &= |OA'_2| = |OA_1| = x_1(A).\end{aligned}$$

Zusammen mit (67) folgen die Gleichungen in (64) für Winkel  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

Auch für  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  haben wir die Kongruenzen  $OA_1A \cong OA'_2A'$  und  $OA_2A \cong OA'_1A'$ , also  $|OA_1| = |OA'_2|$  und  $|OA_2| = |OA'_1|$ . Wieder erhalten wir:

$$\begin{aligned}x_1(A') &= -|OA'_1| = -|OA_2| = -x_2(A), \\x_2(A') &= -|OA'_2| = -|OA_1| = x_1(A).\end{aligned}$$

Mit (67) sehen wir, dass die Relationen in (64) auch für Winkel  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  gültig sind. Zusammen mit Bemerkung 2.4.6 folgt (64) für  $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ . Mit (65) sehen wir, dass dies für  $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$  richtig bleibt. Mit (66) erhalten wir (64) für beliebige Winkel  $\alpha$ .  $\square$

**BEMERKUNG 2.4.10 (Symmetrien).** Für beliebige Winkel  $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$  gilt:

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \text{und} \quad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha).$$

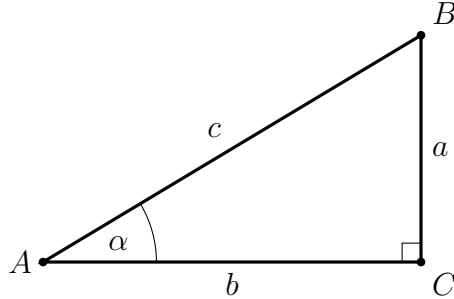
Kombinieren wir diese Symmetrien mit Proposition 2.4.9 erhalten wir auch

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{und} \quad \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

sowie

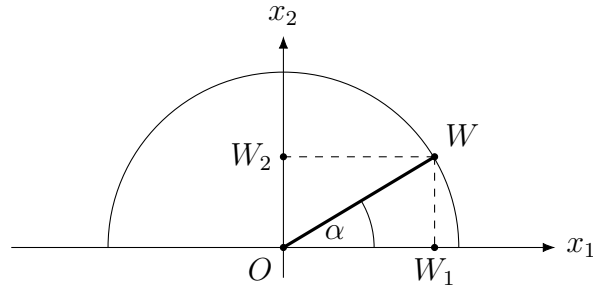
$$\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha). \tag{68}$$

**PROPOSITION 2.4.11 (Winkelfunktionen in rechtwinkligen Dreiecken).** *Ist  $ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit Seiten  $a = |BC|$ ,  $b = |CA|$ ,  $c = |AB|$ , Winkel  $\alpha := \sphericalangle CAB$  und rechtem Winkel  $\gamma = \sphericalangle BCA = 90^\circ$ , dann gilt  $\cos \alpha = b/c$  und  $\sin \alpha = a/c$ .*



**BEWEIS.** Bezeichne  $W$  den Punkt am Einheitskreis, den wir durch Abtragen des Winkels  $\alpha$  von der positiven ersten Koordinatenhalbachse erhalten. Die Schnittpunkte der Achsen mit den Parallelen zu den Achsen durch  $W$  bezeichnen wir mit  $W_1$  und  $W_2$ . Da  $\alpha$  spitz ist, siehe Bemerkung 1.4.33, liegen  $W_1$  und  $W_2$  auf den positiven Koordinatenhalbachsen. Es gilt daher  $x_1(W) = |OW_1|$  und  $x_2(W) = |OW_2| = |W_1W|$ , wobei wir im letzten Gleichheitszeichen Satz 1.5.13 verwendet haben. Nach Satz 1.5.43 (W:W:W) sind die Dreiecke  $ABC$  und  $OWW_1$  ähnlich. Da  $|OW| = 1$  erhalten wir

$$\cos \alpha = x_1(W) = |OW_1| = \frac{|OW_1|}{|OW|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}$$



und

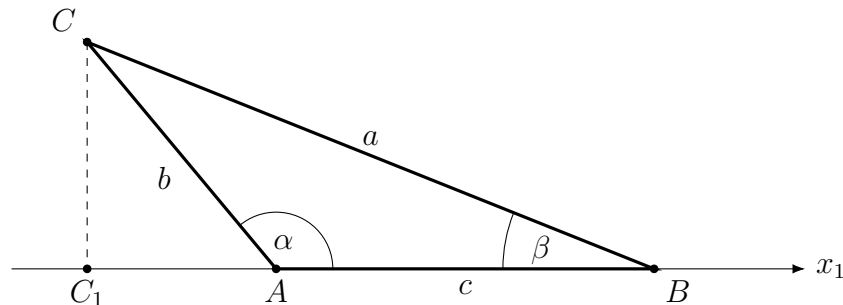
$$\sin \alpha = x_2(W) = |W_1W| = \frac{|W_1W|}{|OW|} = \frac{|CB|}{|AB|} = \frac{a}{c}. \quad \square$$

BEMERKUNG 2.4.12. Aus den Propositionen 2.4.11 und 2.4.9 folgt nun, dass die Winkel-funktionen nicht von der Wahl des kartesischen Koordinatensystems abhängen.

SATZ 2.4.13 (Sinussatz). Ist  $ABC$  ein Dreieck mit Seitenlängen  $a = |BC|$ ,  $b = |CA|$ ,  $c = |AB|$  und Winkeln  $\alpha = \angle CAB$ ,  $\beta = \angle ABC$ ,  $\gamma = \angle BCA$ , dann gilt

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

BEWEIS. Bezeichne  $C_1$  den Fußpunkt der Höhe durch  $C$ . Betrachten wir ein kartesisches



Koordinatensystem mit Ursprung  $A$ , sodass  $B$  auf der positiven ersten Koordinatenhalbachse liegt und so, dass  $C$  und die positive zweite Koordinatenhalbachse auf derselben Seite der ersten Achse liegen, dann folgt aus Bemerkung 2.4.3

$$|CC_1| = b \sin \alpha.$$

Betrachten wir ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung  $B$ , sodass  $A$  auf der positiven ersten Koordinatenhalbachse liegt und so, dass  $C$  und die positive zweite Koordinatenhalbachse auf derselben Seite der ersten Achse liegen, dann folgt aus Bemerkung 2.4.3

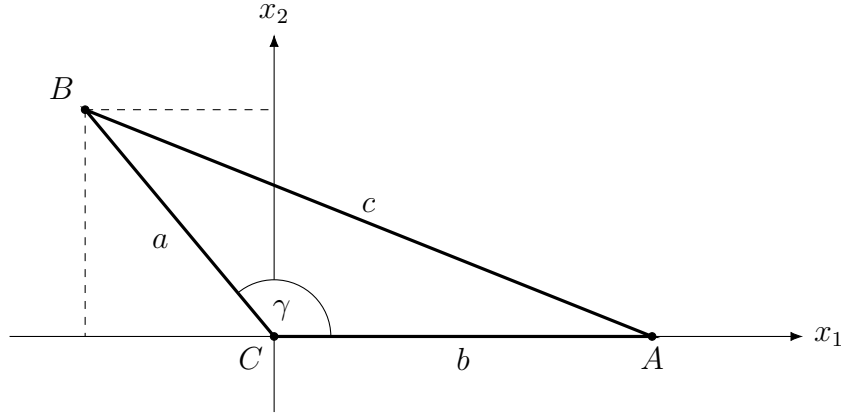
$$|CC_1| = a \sin \beta.$$

Somit gilt  $b \sin \alpha = a \sin \beta$ , und Division durch  $ab$  liefert die erste Gleichung des Satzes. Die zweite Gleichung folgt analog oder durch Umbenennen der Eckpunkte.  $\square$

SATZ 2.4.14 (Kosinussatz). Ist  $ABC$  ein Dreieck mit Seitenlängen  $a = |BC|$ ,  $b = |CA|$ ,  $c = |AB|$  und Winkel  $\gamma = \angle BCA$ , dann gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

BEWEIS. Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung  $C$  so, dass  $A$  auf der positiven ersten Koordinatenhalbachse liegt und so, dass  $B$  und die positive zweite Koordinatenhalbachse auf derselben Seite der ersten Koordinatenachse liegen. Bezeichnet



$x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die damit assoziierte Koordinatenabbildung dann gilt, siehe Bemerkung 2.4.3,

$$x(A) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(B) = \begin{pmatrix} a \cos \gamma \\ a \sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Mit Satz 2.3.46 und Bemerkung 2.4.4 erhalten wir:

$$\begin{aligned} c^2 &= |AB|^2 \\ &= \|x(B) - x(A)\|^2 \\ &= (a \cos \gamma - b)^2 + (a \sin \gamma)^2 \\ &= a^2(\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned} \quad \square$$

BEMERKUNG 2.4.15. Sind  $A, B, C$  drei Punkte in  $\mathcal{E}$  mit  $A \neq O \neq B$ , und entsteht der Halbstrahl  $\langle CB \rangle$  durch Abtragen des Winkels  $\gamma \in \tilde{\mathcal{W}}$  am Halbstrahl  $\langle CA \rangle$ , dann gilt

$$|AB|^2 = |CA|^2 + |CB|^2 - 2|CA||CB| \cos \gamma.$$

Dies lässt sich wie Satz 2.4.14 zeigen, der Beweis bleibt für beliebige Winkel  $\gamma \in \tilde{\mathcal{W}}$  gültig.

PROPOSITION 2.4.16. Sei  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems. Für jeden Winkel  $\gamma := \sphericalangle BCA$  gilt dann

$$\cos \gamma = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|},$$

wobei  $v := x(B) - x(C)$  und  $w := x(A) - x(C)$ .

BEWEIS. Für die Seitenlängen des Dreiecks  $ABC$  erhalten wir mit Proposition 2.2.9:

$$\begin{aligned} a &= |CB| = \|x(B) - x(C)\| = \|v\|, \\ b &= |CA| = \|x(A) - x(C)\| = \|w\|, \\ c &= |AB| = \|x(B) - x(A)\| = \|v - w\|. \end{aligned}$$



Aus dem Kosinussatz 2.4.14 folgt daher

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|\cos\gamma.$$

Kombinieren wir dies mit der Gleichung

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w \rangle$$

aus (53) erhalten wir den gewünschte Ausdruck für  $\cos\gamma$ .  $\square$

**BEMERKUNG 2.4.17.** Beachte, dass der Quotient  $\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|}$  in Proposition 2.4.16 wegen der Cauchy–Schwartz Ungleichung im Intervall  $[-1, 1]$  liegt, siehe Lemma 2.3.43.

**PROPOSITION 2.4.18** (Monotonie der Winkelfunktionen). *Für beliebige  $\alpha, \beta \in \tilde{\mathcal{W}}$  gilt:*

- (a) Für  $0^\circ \leq \alpha < \beta \leq 180^\circ$  gilt  $\cos\alpha > \cos\beta$ .
- (b) Für  $180^\circ \leq \alpha < \beta \leq 360^\circ$  gilt  $\cos\alpha < \cos\beta$ .
- (c) Für  $-90^\circ \leq \alpha < \beta \leq 90^\circ$  gilt  $\sin\alpha < \sin\beta$ .
- (d) Für  $90^\circ \leq \alpha < \beta \leq 270^\circ$  gilt  $\sin\alpha > \sin\beta$ .

**BEWEIS.** Wir betrachten zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  mit  $|AB| = 1 = |A'B'|$  und  $|AC| = 1 = |A'C'|$ . Nach dem Kosinussatz 2.4.14 gilt für die Winkel  $\alpha = \sphericalangle CAB$  und  $\alpha' = \sphericalangle C'A'B'$  daher  $\cos\alpha = 1 - a^2/2$  sowie  $\cos\alpha' = 1 - (a')^2/2$ . Für  $0 < \alpha < \alpha' < 180^\circ$  erhalten wir  $a < a'$  aus Satz 1.4.28 und daher  $\cos\alpha = 1 - a^2/2 > 1 - (a')^2/2 = \cos\alpha'$ . Dies zeigt die Monotonieaussage in (a). Die verbleibenden folgen unmittelbar mit Proposition 2.4.9.  $\square$

**BEMERKUNG 2.4.19** (Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen). Die Einschränkung des Kosinus,  $\cos: [0^\circ, 180^\circ] \rightarrow [-1, 1]$ , ist eine Bijektion, d.h. zu jeder reellen Zahl  $x \in [-1, 1]$  existiert genau ein Winkel  $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$ , für den  $\cos\alpha = x$  gilt. Die Injektivität folgt aus Proposition 2.4.18, die Surjektivität aus Bemerkung 2.4.8. Die Umkehrfunktion wird (*Hauptzweig des*) *Arkuskosinus* genannt und mit

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0^\circ, 180^\circ]$$

bezeichnet. Mit (68) folgt daraus, dass auch die Einschränkung  $\sin: [-90^\circ, 90^\circ] \rightarrow [-1, 1]$  bijektiv ist. Ihre Umkehrfunktion wird (*Hauptzweig des*) *Arkussinus* genannt und mit

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-90^\circ, 90^\circ]$$

bezeichnet. Aus (68) folgt sofort  $\arcsin x = 90^\circ - \arccos x$  für alle  $x \in [-1, 1]$ .

**SATZ 2.4.20** (Additionstheoreme). *Für beliebige Winkel  $\alpha, \beta \in \tilde{\mathcal{W}}$  gilt:*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta, \tag{69}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta. \tag{70}$$

**BEWEIS.** Sei  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems. Tragen wir die Winkel  $-\alpha$  und  $\beta$  wie gewohnt am Einheitskreis ab, erhalten wir zwei Punkte  $A$  und  $B$  mit Koordinaten, vgl. Bemerkung 2.4.10,

$$x(A) = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(B) = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}.$$

Nach Konstruktion entsteht der Halbstrahl  $(OB>$  durch Abtragen des Winkels  $\alpha + \beta$  vom Halbstrahl  $(OA>$ . Aus dem Kosinussatz in Bemerkung 2.4.15 folgt daher

$$|AB|^2 = 2 - 2\cos(\alpha + \beta).$$

Andererseits erhalten wir mit Proposition 2.2.9 und Bemerkung 2.4.4:

$$\begin{aligned}
 |AB|^2 &= \|x(B) - x(A)\|^2 \\
 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta + \sin \alpha)^2 \\
 &= \cos^2 \beta - 2 \cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \alpha + \sin^2 \alpha \\
 &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta).
 \end{aligned}$$

Kombinieren wir diese beiden Ausdrücke für  $|AB|^2$  folgt das Additionstheorem des Kosinus. Mit (64) lässt sich daraus sofort das Additionstheorem des Sinus herleiten:

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha + \beta) &= -\cos(\alpha + \beta + 90^\circ) \\
 &= -\cos \alpha \cos(\beta + 90^\circ) + \sin \alpha \sin(\beta + 90^\circ) \\
 &= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta.
 \end{aligned}$$

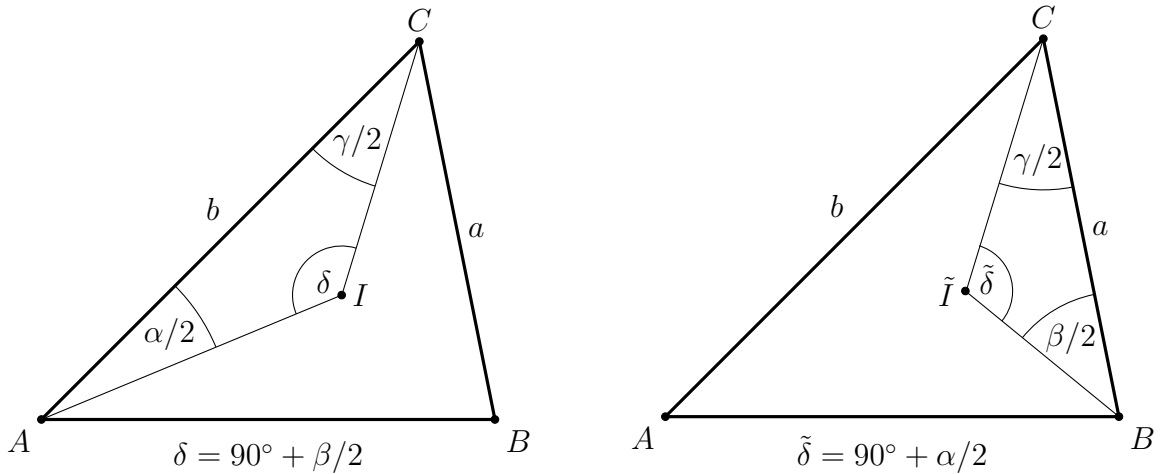
□

KOROLLAR 2.4.21 (Doppelwinkelformeln). Für beliebige Winkel  $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$  gilt

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (71)$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha \quad (72)$$

INKREISMITTELPUNKT MIT TRIGONOMETRISCHEN FORMELN. Wir wollen uns erneut davon überzeugen, dass sich die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks  $ABC$  in einem Punkt schneiden. Wie üblich bezeichnen  $a = |BC|$ ,  $b = |CA|$ ,  $c = |AB|$  die Seitenlängen und  $\alpha = \sphericalangle CAB$ ,  $\beta = \sphericalangle ABC$ ,  $\gamma = \sphericalangle BCA$  die Winkel des Dreiecks. Bezeichnen wir den Schnittpunkt



der Winkelsymmetralen bei A und C mit I so ergeben sich die Winkel  $\sphericalangle CAI = \alpha/2$ ,  $\sphericalangle ACI = \gamma/2$  und  $\sphericalangle AIC = 180^\circ - \alpha/2 - \gamma/2 = 90^\circ + \beta/2$ , denn  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  nach Satz 1.5.10. Aus dem Sinussatz 2.4.13 für das Dreieck  $ACI$  folgt

$$|CI| = \frac{b \sin(\alpha/2)}{\sin(90^\circ + \beta/2)} = \frac{b \sin(\alpha/2)}{\cos(\beta/2)} = \frac{b \sin(\alpha)}{2 \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2)},$$

wobei wir im zweiten Gleichheitszeichen die Relation (64) verwendet haben, und im letzten Gleichheitszeichen die Doppelwinkelformel  $\sin(\alpha) = 2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)$  aus Korollar 2.4.21

eingegangen ist. Bezeichnet nun  $\tilde{I}$  den Schnittpunkt der Winkelsymmetralen bei  $B$  und  $C$  erhalten wir analog, d.h. durch Vertauschen der Rollen von  $A$  und  $B$ ,

$$|C\tilde{I}| = \frac{a \sin(\beta)}{2 \cos(\beta/2) \cos(\alpha/2)}.$$

Aus dem Sinussatz für das Dreieck  $ABC$  folgt  $|CI| = |C\tilde{I}|$  und daher  $I = \tilde{I}$ . Dies zeigt, dass alle drei Winkelsymmetralen durch den Punkt  $I = \tilde{I}$  laufen.  $\square$

## 2.5. Determinante und Flächeninhalt.

DEFINITION 2.5.1 (Determinante von  $2 \times 2$ -Matrizen). Unter einer (reellen)  $2 \times 2$ -Matrix verstehen wir eine quadratische Anordnung reeller Zahlen der Form  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Die *Determinante* einer solchen Matrix wird durch

$$\det(A) := \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$$

definiert. Sind  $v, w \in \mathbb{R}^2$  dann schreiben wir  $\det(v|w)$  für die Determinante der Matrix mit Spalten  $v$  und  $w$ . Die Matrix  $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  wird als *Einheitsmatrix* bezeichnet.

BEISPIEL 2.5.2.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 5, & \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} &= 3 \cdot 8 - 2 \cdot 12 = 0, \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1, & \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1, \\ \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} &= ad, & \det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 1. \end{aligned}$$

LEMMA 2.5.3 (Eigenschaften der Determinante). Für  $v, v', w, w' \in \mathbb{R}^2$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- (a)  $\det(v + v'|w) = \det(v|w) + \det(v'|w)$  und  $\det(\lambda v|w) = \lambda \det(v|w)$ . (*Linearität in der ersten Spalte*)
- (b)  $\det(v|w + w') = \det(v|w) + \det(v|w')$  und  $\det(v|\lambda w) = \lambda \det(v|w)$ . (*Linearität in der zweiten Spalte*)
- (c)  $\det(w|v) = -\det(v|w)$ . (*Schiefsymmetrie in den Spalten*)
- (d)  $\det(I) = 1$ . (*Normierung durch Einheitsmatrix*)
- (e) Es gilt  $\det(v|w) = 0$  genau dann wenn  $v$  ein Vielfaches von  $w$  oder  $w$  ein Vielfaches von  $v$  ist.

Die Determinante ist durch die Eigenschaften (a), (c) und (d) eindeutig charakterisiert.

BEWEIS. Die Linearität der Determinante in der ersten Spalte lässt sich leicht durch eine direkte Rechnung überprüfen:

$$\begin{aligned} \det(v + v'|w) &= \det \begin{pmatrix} v_1 + v'_1 & w_1 \\ v_2 + v'_2 & w_2 \end{pmatrix} = (v_1 + v'_1)w_2 - w_1(v_2 + v'_2) \\ &= (v_1w_2 - w_1v_2) + (v'_1w_2 - w_1v'_2) = \det(v|w) + \det(v'|w) \end{aligned}$$

und

$$\det(\lambda v|w) = \det \begin{pmatrix} \lambda v_1 & w_1 \\ \lambda v_2 & w_2 \end{pmatrix} = (\lambda v_1)w_2 - w_1(\lambda v_2) = \lambda(v_1w_2 - w_1v_2) = \lambda \det(v|w).$$

Auch Eigenschaft (c) ist offensichtlich:

$$\det(w|v) = \det \begin{pmatrix} w_1 & v_1 \\ w_2 & v_2 \end{pmatrix} = w_1v_2 - v_1w_2 = -\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = -\det(v|w).$$

Linearität in der zweiten Spalte folgt durch Kombination von (a) und (c),

$$\det(v|w + w') = -\det(w + w'|v) = -\det(w|v) - \det(w'|v) = \det(v|w) + \det(v|w')$$

und analog  $\det(v|\lambda w) = -\det(\lambda w|v) = -\lambda \det(w|v) = \lambda \det(v|w)$ . Die Determinante der Einheitsmatrix haben wir bereits in Beispiel 2.5.2 berechnet.

Ist  $w = \lambda v$  dann folgt  $\det(v|w) = \lambda \det(v|v) = 0$ , denn  $\det(v|v) = -\det(v|v) = 0$  nach (c). Analog folgt aus  $v = \lambda w$  sofort  $\det(v|w) = 0$ . Dies zeigt die eine Implikation in (e), die andere folgt aus Lemma 2.3.33.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Determinantenfunktion durch die Eigenschaften (a), (c) und (d) eindeutig charakterisiert ist. Sei dazu  $\delta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung, die jeder  $2 \times 2$ -Matrix eine reelle Zahl zuordnet, linear in der ersten Spalte ist, schiefssymmetrisch ist und die Normierungsbedingung  $\delta(I) = 1$  erfüllt. Wie oben folgt aus der Linearität in der ersten Spalte und der Schiefssymmetrie sofort, dass  $\delta$  auch linear in der zweiten Spalte ist:  $\delta(v|w + w') = -\delta(w + w'|v) = -\delta(w|v) - \delta(w'|v) = \delta(v|w) + \delta(v|w')$  und  $\delta(v|\lambda w) = -\delta(\lambda w|v) = -\lambda \delta(w|v) = \lambda \delta(v|w)$ . Schreiben wir

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dann folgt aus der Bilinearität

$$\begin{aligned} \delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= a \cdot \delta \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + c \cdot \delta \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \\ &= ab \cdot \delta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + ad \cdot \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + cb \cdot \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + cd \cdot \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus der Schiefssymmetrie erhalten wir  $\delta(v|v) = -\delta(v|v) = 0$  für jedes  $v \in \mathbb{R}^2$ , sowie  $\delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Insgesamt ergibt sich

$$\delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - cb) \cdot \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei im vorletzten Gleichheitszeichen die Normierung  $\delta(I) = 1$  eingegangen ist.  $\square$

**BEMERKUNG 2.5.4.** Drei Punkte  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$  liegen genau dann auf einer Geraden, wenn  $\det(B - A|C - A) = 0$  gilt. In anderen Worten: Drei Punkte  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$  bilden genau dann ein Dreieck, wenn  $\det(B - A|C - A) \neq 0$  gilt. Dies folgt sofort aus Lemma 2.5.3(e).

**PROPOSITION 2.5.5.** Seien  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ . Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

hat genau dann eine eindeutige Lösung  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  wenn  $\delta := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ . In diesem Fall ist die Lösung durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{\delta} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{\delta}. \quad (73)$$

BEWEIS. Multiplizieren die erste Gleichung mit  $a_{22}$  und die zweite mit  $a_{12}$  erhalten wir durch Subtraktion

$$\delta x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit  $a_{21}$  und die zweite mit  $a_{11}$  erhalten wir durch Subtraktion

$$\delta x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Ist  $\delta \neq 0$ , dann kann es also höchstens eine Lösung geben, für die (73) gelten muss. Dass diese Ausdrücke tatsächlich eine Lösung liefern lässt sich sofort durch Einsetzen in die ursprünglichen Gleichungen überprüfen.

Ist  $\delta = 0$ , dann existiert o.B.d.A.  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ , siehe Lemma 2.5.3. Das Gleichungssystem lässt sich daher äquivalent in der Form

$$\begin{aligned} a_{11}(x_1 + \lambda x_2) &= b_1 \\ a_{21}(x_1 + \lambda x_2) &= b_2 \end{aligned}$$

schreiben. Ist  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  eine Lösung, dann ist also auch  $\begin{pmatrix} x_1 + t\lambda \\ x_2 - t \end{pmatrix}$  eine Lösung, für jedes  $t \in \mathbb{R}$ . Im Fall  $\delta \neq 0$  kann das Gleichungssystem daher keine eindeutige Lösung besitzen.  $\square$

BEMERKUNG 2.5.6. Ist, in der Situation von Proposition 2.5.5,  $\delta = 0$ , dann können drei Fälle eintreten: (i) Es existiert keine Lösung; (ii) die Lösungsmenge bildet eine Gerade in  $\mathbb{R}^2$ ; oder (iii) das Gleichungssystem ist für alle  $x_1$  und  $x_2$  erfüllt.

BEMERKUNG 2.5.7. Für  $v, w \in \mathbb{R}^2$  gilt

$$|\det(v, w)| = \sqrt{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}. \quad (74)$$

Beachte, dass der Ausdruck unter der Wurzel wegen der Cauchy–Schwartz Ungleichung nicht negativ sein kann, siehe Lemma 2.3.43. Bis auf das Vorzeichen lässt sich die Determinante daher mit dem Skalarprodukt berechnen. Um (74) zu überprüfen sei  $v = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  und  $w = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ .

Damit erhalten wir

$$\det(v, w)^2 = (ad - bc)^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$$

und daher (74).

DEFINITION 2.5.8 (Fächeninhalt von Dreiecken). Den Flächeninhalt eines Dreiecks mit Seitenlängen  $a, b, c$  und gegenüberliegenden Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  definieren wir durch

$$A := F(ABC) := \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ca \sin \beta. \quad (75)$$

BEMERKUNG 2.5.9. Diese Definition des Flächeninhalts ist durch die bekannte Formel

$$A = \frac{\text{Seitenlänge} \cdot \text{Höhenlänge}}{2}$$

motiviert. Nach dem Sinussatzes 2.4.13 stimmen die drei Ausdrücke in (75) überein, d.h. es kommt dabei nicht darauf an, welche Seite zur Berechnung des Flächeninhalts herangezogen wird. Dies lässt sich auch in der Form

$$\frac{2A}{abc} = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

schreiben. Es gilt die Heron'sche Formel

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{wobei} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

den halben Umfang bezeichnet. Dies folgt mit dem Kosinussatz 2.4.14 durch eine direkte Rechnung, in der mehrmals die binomische Formel eingeht:

$$\begin{aligned} 16A^2 &= 4a^2b^2 \sin^2 \gamma \\ &= 4a^2b^2(1 - \cos^2 \gamma) \\ &= 4a^2b^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \gamma \\ &= 4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2 \\ &= (2ab - (c^2 - a^2 - b^2))(2ab + (c^2 - a^2 - b^2)) \\ &= ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2) \\ &= ((a+b)+c)((a+b)-c)(c+(a-b))(c-(a-b)) \\ &= 16s(s-c)(s-b)(s-a) \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.5.10 (Flächeninhalt von Dreiecken in Koordinaten). *Ist  $ABC$  ein Dreieck und  $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems dann gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks*

$$F(ABC) = \frac{1}{2} |\det(v, w)|,$$

wobei  $v := x(B) - x(C)$  und  $w := x(A) - x(C)$ .

BEWEIS. Nach Satz 2.3.46 gilt

$$\begin{aligned} a &= |CB| = \|x(B) - x(C)\| = \|v\|, \\ b &= |CA| = \|x(A) - x(C)\| = \|w\| \end{aligned}$$

und mit Proposition 2.4.16 erhalten wir  $ab \cos \gamma = \langle v, w \rangle$ . Somit

$$\begin{aligned} 2F(ABC) &= ab \sin \gamma \\ &= ab \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} \\ &= \sqrt{a^2b^2 - a^2b^2 \cos^2 \gamma} \\ &= \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2} \\ &= |\det(v, w)|, \end{aligned}$$

wobei im letzten Gleichheitszeichen Gleichung (74) eingegenagen ist. □

BEISPIEL 2.5.11. Es soll der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet werden, dessen Eckpunkte bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems die Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

haben. Wir berechnen  $v = x(B) - x(C) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $w = x(A) - x(C) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  und erhalten mit Proposition 2.5.10

$$F(ABC) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{|3 \cdot 5 - 4 \cdot 6|}{2} = \frac{|-9|}{2} = \frac{9}{2}.$$

BEMERKUNG 2.5.12 (Determinante als orientierter Flächeninhalt). Seien  $v, w \in \mathbb{R}^2$ . Die Determinante  $\det(v, w)$  liefert einen *orientierten Flächeninhalt* des Parallelogramms mit Eckpunkten  $0, v, w, v+w$ . Wie immer dieser orientierte Flächeninhalt definiert wird, er sollte die Eigenschaften (a) bis (d) in Lemma 2.5.3 besitzen und muss daher mit der Determinante übereinstimmen. Ähnlich lässt sich argumentieren, dass  $\frac{1}{2} \det(v, w)$  der orientierte Flächeninhalt des Dreiecks mit Eckpunkten  $0, v, w$  ist.

### 3. Lineare Algebra

**3.1. Lineare Abbildungen und Matrizen.** Für jede natürliche Zahl  $n$  bezeichne

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} : v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller  $n$ -Tupel reeller Zahlen. Elemente von  $\mathbb{R}^n$  werde *Vektoren* oder *Spaltenvektoren* genannt. Ist  $v \in \mathbb{R}^n$  dann wird die Eintragung in der  $i$ -ten Zeile als  $i$ -te *Komponenten* von  $v$  bezeichnet. Wir schreiben weiterhin  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ .

Analog zu den Rechenoperationen auf  $\mathbb{R}^2$  definieren wir *Vektoraddition* und *Skalarmultiplikation* auf  $\mathbb{R}^n$  durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix},$$

wobei  $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n, \lambda \in \mathbb{R}$ . Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  werden also komponentenweise addiert und komponentenweise mit Skalaren multipliziert. Unter dem *Nullvektor*  $0 \in \mathbb{R}^n$  verstehen wir den Vektor, dessen Komponenten alle 0 sind. Der Nullvektor ist offensichtlich neutrales Element bezüglich der Vektoraddition, d.h. es gilt  $v + 0 = v = 0 + v$  für alle  $v \in \mathbb{R}^n$ .

BEISPIEL 3.1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Analog zu den Rechenregeln in Lemma 2.3.8 haben wir:

LEMMA 3.1.2 (Rechenregeln für Vektoraddition und Skalarmultiplikation).  $(\mathbb{R}^n, +)$  bildet eine abelsche Gruppe. Für  $v, w \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt weiters:

- (a)  $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
- (b)  $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
- (c)  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
- (d)  $1v = v$
- (e)  $(-1)v = -v$
- (f)  $\lambda v = 0$  genau dann, wenn  $\lambda = 0$  oder  $v = 0$ .

Lineare Abbildungen sind Abbildungen, die mit Vektoraddition und Skalarmultiplikation verträglich sind. Genauer haben wir:

DEFINITION 3.1.3 (Lineare Abbildung). Eine Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  wird *linear* genannt wenn  $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$  und  $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$  für alle  $v, w \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt.

BEMERKUNG 3.1.4. Jede lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  bildet den Nullvektor in  $\mathbb{R}^n$  auf den Nullvektor in  $\mathbb{R}^m$  ab, denn mit Lemma 3.1.2(f) folgt:  $\varphi(0) = \varphi(0 \cdot 0) = 0 \cdot \varphi(0) = 0$ .

BEMERKUNG 3.1.5 (Nullabbildung). Die Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\varphi(v) := 0$ , ist linear.

BEMERKUNG 3.1.6 (Identität). Die Abbildung,  $\text{id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\text{id}(v) := v$ , ist linear.

BEMERKUNG 3.1.7 (Koordinatenprojektionen). Die Abbildung  $p_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p_i(v) := v_i$ , die einem Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  seinen Eintrag in der  $i$ -ten Zeile zuordnet ist linear.

BEISPIEL 3.1.8. Für  $k \in \mathbb{R}$  ist  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = kx$ , linear. Umgekehrt ist jede lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von dieser Form, denn  $\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = x\varphi(1) = kx$  mit  $k = \varphi(1)$ .

BEISPIEL 3.1.9. Die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 2x + 3$ , ist nicht linear. Die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |x|$ , ist nicht linear. Die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ , ist nicht linear.

BEISPIEL 3.1.10. Die Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x + 8y + 9z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix}$ , ist linear.

BEISPIEL 3.1.11. Die Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ , ist linear.

BEMERKUNG 3.1.12. Für beliebige  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  ist die Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$\varphi \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

linear. Wir werden dies weiter unter nachrechnen.

BEMERKUNG 3.1.13 (Summe linearer Abbildungen). Sind  $\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  zwei lineare Abbildungen, dann ist auch ihre Summe  $\varphi + \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$ , eine lineare Abbildung. Aus den Rechenregeln in Lemma 3.1.2 folgt nämlich

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(v + w) &= \varphi(v + w) + \psi(v + w) = (\varphi(v) + \varphi(w)) + (\psi(v) + \psi(w)) \\ &= (\varphi(v) + \psi(v)) + (\varphi(w) + \psi(w)) = (\varphi + \psi)(v) + (\varphi + \psi)(w), \end{aligned}$$



und analog  $(\varphi + \psi)(\lambda v) = \varphi(\lambda v) + \psi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) + \lambda\psi(v) = \lambda(\varphi(v) + \psi(v)) = \lambda(\varphi + \psi)(v)$ , für  $v, w \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**BEMERKUNG 3.1.14** (Vielfache linearer Abbildungen). Ist  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lineare Abbildung und  $t \in \mathbb{R}$ , dann ist auch  $t\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(t\varphi)(v) := t\varphi(v)$ , eine lineare Abbildung. Aus den Rechenregeln in Lemma 3.1.2 folgt nämlich

$$(t\varphi)(v + w) = t\varphi(v + w) = t(\varphi(v) + \varphi(w)) = t\varphi(v) + t\varphi(w) = (t\varphi)(v) + (t\varphi)(w),$$

und analog  $(t\varphi)(\lambda v) = t\varphi(\lambda v) = t(\lambda\varphi(v)) = \lambda(t\varphi(v)) = \lambda(t\varphi)(v)$ , für  $v, w \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**BEMERKUNG 3.1.15** (Komposition linearer Abbildungen). Haben wir zwei lineare Abbildungen  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\psi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  dann ist auch ihre Komposition,  $\varphi \circ \psi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(\varphi \circ \psi)(v) := \varphi(\psi(v))$ , linear. Dies ist offensichtlich, denn  $(\varphi \circ \psi)(v + w) = \varphi(\psi(v + w)) = \varphi(\psi(v) + \psi(w)) = \varphi(\psi(v)) + \varphi(\psi(w)) = (\varphi \circ \psi)(v) + (\varphi \circ \psi)(w)$  und analog  $(\varphi \circ \psi)(\lambda v) = \varphi(\psi(\lambda v)) = \varphi(\lambda\psi(v)) = \lambda\varphi(\psi(v)) = \lambda(\varphi \circ \psi)(v)$  für  $v, w \in \mathbb{R}^p$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**BEMERKUNG 3.1.16** (Umkehrabbildung). Ist  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine invertierbare lineare Abbildung, dann ist auch die Umkehrabbildung,  $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , linear.<sup>19</sup> Ersetzen wir in  $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$  nämlich  $v = \varphi^{-1}(v')$  und  $w = \varphi^{-1}(w')$ , wobei  $v', w' \in \mathbb{R}^n$ , so erhalten wir  $\varphi(\varphi^{-1}(v') + \varphi^{-1}(w')) = v' + w'$  und Anwenden von  $\varphi^{-1}$  liefert  $\varphi^{-1}(v') + \varphi^{-1}(w') = \varphi^{-1}(v' + w')$ . Analog erhalten wir aus  $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$  zunächst  $\varphi(\lambda\varphi^{-1}(v')) = \lambda v'$  und dann  $\lambda\varphi^{-1}(v') = \varphi^{-1}(\lambda v')$ .

**BEMERKUNG 3.1.17** (Gruppe der invertierbaren linearen Abbildungen). Die Menge aller invertierbaren linearen Abbildungen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bildet bezüglich der Komposition von Abbildungen eine (nicht kommutative) Gruppe, die wir mit  $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$  bezeichnen. Dies folgt aus den Bemerkungen 3.1.6, 3.1.15 und 3.1.16.

**DEFINITION 3.1.18** (Matrizen). Seien  $n, m \in \mathbb{N}$ . Unter einer (reellen)  $(m \times n)$ -Matrix verstehen wir ein rechteckiges Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit Eintragungen  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ . Wir bezeichnen die Menge aller  $(m \times n)$ -Matrizen mit  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .

Die Summe zweier Matrizen mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl wird komponentenweise durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

definiert. Auch *Skalarmultiplikation* mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  wird komponentenweise definiert,

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

<sup>19</sup>Wir werden bald sehen, dass eine lineare Bijektion  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  nur dann existiert, wenn  $n = m$  gilt.

Unter der *Nullmatrix*  $0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  verstehen wir die Matrix, deren Eintragungen alle 0 sind. Die Nullmatrix ist offensichtlich neutrales Element bezüglich der Addition, d.h. es gilt  $A + 0 = A = 0 + A$  für alle  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

BEISPIEL 3.1.19.

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Wie zuvor lässt sich zeigen:

LEMMA 3.1.20 (Rechenregeln für Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen).  $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$  bildet eine abelsche Gruppe. Für  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt weiters:

- (a)  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- (b)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- (c)  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- (d)  $1A = A$
- (e)  $(-1)A = -A$
- (f)  $\lambda A = 0$  genau dann, wenn  $\lambda = 0$  oder  $A = 0$ .

DEFINITION 3.1.21 (Produkt von Matrizen). Das Produkt einer  $(m \times n)$ -Matrix mit einer  $(n \times p)$ -Matrix ist folgende  $(m \times p)$ -Matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{kp} \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass das Produkt  $AB$  nur definiert ist, wenn die Zeilenzahl von  $B$  mit der Spaltenzahl von  $A$  übereinstimmt.

BEISPIEL 3.1.22.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 22 & -2 & 10 & 12 \end{pmatrix},$$

$$(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (10), \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

BEMERKUNG 3.1.23. Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BEMERKUNG 3.1.24. Die Matrizenmultiplikation besitzt Nullteiler:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen den Eintrag in der  $i$ -ten Spalte und  $j$ -ten Zeile einer Matrix  $A$  mit  $A_{ij}$ . Damit lassen sich die Matrizenoperationen kompakter beschreiben:

$$\begin{aligned}(A + A')_{ij} &= A_{ij} + A'_{ij}, \\ (\lambda A)_{ij} &= \lambda A_{ij}, \\ (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \cdots + A_{in} B_{nj},\end{aligned}$$

wobei  $A, A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Unter der  $(n \times n)$ -*Einheitsmatrix* verstehen wir die Matrix

$$I := I_n := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

d.h. die Matrix, deren Diagonaleinträge gleich 1 und deren andere Einträge gleich 0 sind. Die Einheitsmatrix lässt sich mit dem Kronecker-Delta beschreiben,

$$I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Wir werden gleich sehen, dass die Einheitsmatrix neutrales Element bezüglich der Matrizenmultiplikation ist. Die  $i$ -te Spalte der Einheitsmatrix wird  $i$ -ter *Einheitsvektor* genannt und mit  $e_i \in \mathbb{R}^n$  bezeichnet. Beispielsweise sind

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die vier Einheitsvektoren des  $\mathbb{R}^4$ .

LEMMA 3.1.25 (Rechenregeln der Matrizenmultiplikation). Für  $A, A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B, B' \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- (a)  $(A + A')B = AB + A'B$
- (b)  $A(B + B') = AB + AB'$
- (c)  $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$
- (d)  $A(BC) = (AB)C$
- (e)  $AI_n = A = I_m A$

BEWEIS. Wir haben

$$\begin{aligned}((A + A')B)_{ij} &= \sum_{k=1}^n (A + A')_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^n (A_{ik} + A'_{ik}) B_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} + \sum_{k=1}^n A'_{ik} B_{kj} = (AB)_{ij} + (A'B)_{ij} = (AB + A'B)_{ij},\end{aligned}$$

also  $(A + A')B = AB + A'B$ . Analog lässt sich  $A(B + B') = AB + AB'$  zeigen. Ebenso

$$((\lambda A)B)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\lambda A)_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^n \lambda A_{ik} B_{kj} = \lambda \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = \lambda (AB)_{ij} = (\lambda(AB))_{ij},$$

also  $(\lambda A)B = \lambda(AB)$ . Analog lässt sich  $A(\lambda B) = \lambda(AB)$  zeigen. Weiters

$$\begin{aligned} (A(BC))_{ij} &= \sum_{k=1}^n A_{ik} (BC)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \sum_{l=1}^p B_{kl} C_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^p \left( \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kl} \right) C_{lj} = \sum_{l=1}^p (AB)_{il} C_{lj} = ((AB)C)_{ij}, \end{aligned}$$

also  $A(BC) = (AB)C$ . Schließlich

$$(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} (I_n)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \delta_{kj} = A_{ij},$$

also  $AI_n = A$ . Analog lässt sich  $I_m A = A$  zeigen.  $\square$

Wir fassen Vektoren als Matrizen mit einer Spalte auf, d.h. wir identifizieren  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$ .

Für  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  ist daher das Produkt  $Av \in \mathbb{R}^m$  definiert,

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  liefert daher eine Abbildung  $\varphi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\varphi_A(v) := Av$ . Diese, mit der Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  assoziierte Abbildung, ist linear und wir erhalten so alle linearen Abbildungen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Genauer gilt:

**PROPOSITION 3.1.26** (Lineare Abbildungen und Matrizen). *Für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist  $\varphi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\varphi_A(v) := Av$ , eine lineare Abbildung. Umgekehrt ist jede lineare Abbildung  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  von dieser Form,  $\psi = \varphi_A$ , für eine eindeutig bestimmte Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Dabei sind die Spalten von  $A$  gerade die Bilder der Einheitsvektoren, d.h.  $A = (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n))$ .*

**BEWEIS.** Mit den Rechenregeln in Lemma 3.1.25 erhalten wir  $\varphi_A(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = \varphi_A(v) + \varphi_A(w)$  und analog  $\varphi_A(\lambda v) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda\varphi_A(v)$ , wobei  $v, w \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , also ist  $\varphi_A$  linear. Sei nun  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine beliebige lineare Abbildung. Jeder Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  lässt sich in der Form

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n$$

schreiben. Mit der Linearität erhalten wir

$$\psi(v) = \psi(v_1e_1 + \dots + v_n e_n) = v_1\psi(e_1) + \dots + v_n\psi(e_n) = Av = \varphi_A(v),$$

also  $\psi = \varphi_A$ , wobei  $A = (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , siehe (76).  $\square$

BEISPIEL 3.1.27. Die mit der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  assoziierte Abbildung  $\varphi_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist durch

$$\varphi_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die der Matrix  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$  entsprechende Abbildung  $\varphi_B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist

$$\varphi_B \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s + t \\ s + 5t \\ 4s + 9t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Das folgende Resultat klärt die Bedeutung der Rechenoperationen für Matrizen.

PROPOSITION 3.1.28 (Bedeutung der Matrizenoperationen). Für  $A, A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

- (a)  $\varphi_{A+A'} = \varphi_A + \varphi_{A'}$
- (b)  $\varphi_{\lambda A} = \lambda\varphi_A$
- (c)  $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$
- (d)  $\varphi_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$

BEWEIS. Für  $v \in \mathbb{R}^n$  folgt mit den Rechenregeln in Lemma 3.1.25

$$\varphi_{A+A'}(v) = (A + A')v = Av + A'v = \varphi_A(v) + \varphi_{A'}(v) = (\varphi_A + \varphi_{A'})(v),$$

also (a). Ebenso

$$\varphi_{\lambda A}(v) = (\lambda A)v = \lambda(Av) = \lambda\varphi_A(v) = (\lambda\varphi_A)(v),$$

also (b). Weiters haben wir

$$\varphi_{AB}(v) = (AB)v = A(Bv) = \varphi_A(Bv) = \varphi_A(\varphi_B(v)) = (\varphi_A \circ \varphi_B)(v),$$

und daher (c). Schließlich gilt auch  $\varphi_{I_n}(v) = I_n v = v = \text{id}_{\mathbb{R}^n}(v)$ , also (d).  $\square$

BEMERKUNG 3.1.29 (Gruppe der invertierbaren Matrizen). Eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  wird invertierbar genannt, wenn eine Matrix  $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existiert, sodass  $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$ . In diesem Fall ist  $A^{-1}$  eindeutig bestimmt und wird als *Inverse* von  $A$  bezeichnet. Ist nämlich  $A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine weitere Matrix mit  $AA' = I_n = A'A$ , dann folgt mit den Rechenregeln in Lemma 3.1.25:  $A' = A'I_n = A'(AA^{-1}) = (A'A)A^{-1} = I_n A^{-1} = A^{-1}$ . Sind  $A$  und  $B$  invertierbare  $(n \times n)$ -Matrizen, dann ist auch  $AB$  invertierbar und es gilt  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , denn  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$  und  $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_n B = B^{-1}B = I_n$ . Die Menge aller invertierbaren  $(n \times n)$ -Matrizen bildet daher bezüglich der Matrizenmultiplikation eine (nicht kommutative) Gruppe, die als *allgemeine lineare Gruppe* bezeichnet, und mit  $\text{GL}_n$  notiert wird. Die Einheitsmatrix  $I_n$  ist das neutrale Element in  $\text{GL}_n$ .

**BEMERKUNG 3.1.30** (Invertierbare Matrizen vs. invertierbare lineare Abbildungen). Die mit einer invertierbaren Matrix  $A \in \text{GL}_n$  assoziierte lineare Abbildung  $\varphi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist invertierbar mit Umkehrabbildung  $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$ , denn  $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  und  $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \varphi_{A^{-1}A} = \varphi_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ , siehe Proposition 3.1.28. Ist andererseits  $\varphi_A$  invertierbar mit Umkehrabbildung  $\psi$ , dann existiert eine Matrix  $B$  mit  $\psi = \varphi_B$ , siehe Proposition 3.1.28. Es folgt  $\varphi_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{R}^n} = \varphi_A \circ \psi = \varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$ , also  $I_n = AB$  wegen der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 3.1.26. Analog erhalten wir  $I_n = BA$ , also ist  $A$  eine invertierbare Matrix. Wir schließen daraus, dass eine quadratische Matrix genau dann invertierbar ist, wenn die damit assoziierte lineare Abbildung invertierbar ist. Daher ist  $\text{GL}_n \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ ,  $A \mapsto \varphi_A$ , ein Gruppenisomorphismus, vgl. die Bemerkung 3.1.17 und 3.1.29.

**BEMERKUNG 3.1.31** (Determinante eines Produkts). Für  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  gilt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Dies lässt sich durch eine direkte Rechnung verifizieren (siehe Übungen). Wir wollen hier einen anderen Beweis geben, der auf der Charakterisierung der Determinante in Lemma 2.5.3 beruht. Wir fixieren  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und betrachten die Abbildung  $\delta$ , die jeder  $(2 \times 2)$ -Matrix  $(v, w)$  die Zahl  $\delta(v, w) := \det(A(v, w)) = \det(Av, Aw)$  zuordnet,  $v, w \in \mathbb{R}^2$ . Offensichtlich ist  $\delta$  linear und schiefsymmetrisch in  $v$  und  $w$ . Aus dem Beweis von Lemma 2.5.3 folgt daher  $\delta(v, w) = \delta(I_2) \det(v, w)$ . Schreiben wir  $B = (v, w)$ , so erhalten wir  $\det(AB) = \delta(B) = \delta(I_2) \det(B) = \det(AI_2) \det(B) = \det(A) \det(B)$ .

Insbesondere kann die Determinante einer invertierbaren Matrix  $A$  nicht verschwinden, denn  $1 = \det(I_2) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$ , also  $\det(A) \neq 0$ . Umgekehrt ist eine Matrix mit nicht-trivialer Determinante schon invertierbar, die Inverse kann explizit angegeben werden,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \text{falls } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Wir erhalten daher

$$\text{GL}_2 = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det(A) \neq 0\}.$$

Mit Bemerkung 3.1.30 entspricht dies genau der Aussage in Proposition 2.5.5.

**BEISPIEL 3.1.32.** Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  ist invertierbar mit Inverser

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Daher ist die lineare Abbildung  $\varphi_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$ , invertierbar mit

Umkehrabbildung  $\varphi_{A^{-1}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi_{A^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y \\ 3x/2 - y/2 \end{pmatrix}$ .

**3.2. Teilräume und Dimension.** Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ , die abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation sind werden als Teilräume bezeichnet. Genauer haben wir:

**DEFINITION 3.2.1** (Teilraum). Eine Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  wird (*linearer*) *Teilraum* genannt, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

(a)  $0 \in V$

- (b)  $\forall v, v' \in V : v + v' \in V$   
(c)  $\forall v \in V \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda v \in V$

Teilräume werden auch als *Teilvektorräume* oder *Untervektorräume* bezeichnet.

**BEMERKUNG 3.2.2.** Offensichtlich sind  $\{0\}$  und  $\mathbb{R}^n$  zwei Teilräume von  $\mathbb{R}^n$ .

**BEMERKUNG 3.2.3** (Durchschnitt von Teilräumen). Sind  $V$  und  $W$  zwei lineare Teilräume in  $\mathbb{R}^n$ , dann ist auch ihr Durchschnitt  $V \cap W$  ein linearer Teilraum. Dies bleibt für Durchschnitte beliebig vieler Teilräume richtig.

**BEMERKUNG 3.2.4** (Urbilder von Teilräumen). Ist  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lineare Abbildung und  $W$  ein Teilraum von  $\mathbb{R}^m$ , dann bildet  $\varphi^{-1}(W)$  einen Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ . Sind nämlich  $v, v' \in \varphi^{-1}(W)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann folgt aus der Linearität  $\varphi(0) = 0 \in W$ , also  $0 \in \varphi^{-1}(W)$ , sowie  $\varphi(v+v') = \varphi(v) + \varphi(v') \in W$ , also  $v+v' \in \varphi^{-1}(W)$ , und  $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) \in W$ , also  $\lambda v \in \varphi^{-1}(W)$ , denn  $W$  ist abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation. Insbesondere ist  $\varphi^{-1}(0) = \{v \in \mathbb{R}^n : \varphi(v) = 0\}$  ein Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ .

**DEFINITION 3.2.5** (Kern). Unter dem Kern einer linearen Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  verstehen wir den Teilraum

$$\ker(\varphi) := \varphi^{-1}(0) = \{v \in \mathbb{R}^n : \varphi(v) = 0\}.$$

Unter dem Kern einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  verstehen wir den Kern der damit assoziierten linearen Abbildungen, d.h.

$$\ker(A) := \ker(\varphi_A) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = 0\}.$$

**BEMERKUNG 3.2.6.** Für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit Eintragungen  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  ist daher

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \right\}$$

ein Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ . Beachte, dass dieser Teilraum durch ein homogenes System linearer Gleichungen beschrieben ist. Wir werden bald sehen, dass sich jeder Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  in dieser Form schreiben lässt.

**LEMMA 3.2.7** (Injektivität und Kern). *Eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann injektiv wenn  $\ker(\varphi) = \{0\}$  gilt.*

**BEWEIS.** Sei zunächst  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear und injektiv. Aufgrund der Injektivität kann  $\varphi^{-1}(0)$  höchstens ein Element enthalten. Wegen der Linearität gilt  $\varphi(0) = 0$ , d.h.  $0 \in \varphi^{-1}(\{0\})$ . Wir erhalten  $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(0) = \{0\}$ .

Für die umgekehrte Implikation sei nun  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear und  $\ker(\varphi) = \{0\}$ . Weiters seien  $v, w \in \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(v) = \varphi(w)$ . Mit der Linearität folgt  $\varphi(v - w) = \varphi(v) - \varphi(w) = 0$ , also  $v - w \in \ker(\varphi)$ . Nach Voraussetzung an den Kern folgt  $v - w = 0$  und daher  $v = w$ .  $\square$

**BEMERKUNG 3.2.8** (Bilder von Teilräumen). Ist  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine lineare Abbildung und  $V$  ein Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ , dann bildet  $\varphi(V)$  einen Teilraum von  $\mathbb{R}^m$ . Sind nämlich  $v, v' \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann folgt aus der Linearität  $0 = \varphi(0) \in \varphi(V)$ ,  $\varphi(v) + \varphi(v') = \varphi(v + v') \in \varphi(V)$  und  $\lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \varphi(V)$ , denn  $V$  ist abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation. Insbesondere ist  $\varphi(\mathbb{R}^n) = \{\varphi(v) : v \in \mathbb{R}^n\}$  ein Teilraum von  $\mathbb{R}^m$ .

DEFINITION 3.2.9 (Bild). Unter dem Bild einer linearen Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  verstehen wir den Teilraum

$$\text{img}(\varphi) := \{\varphi(v) : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Unter dem Bild einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  verstehen das Bild der damit assoziierten linearen Abbildungen, d.h.

$$\text{img}(A) := \text{img}(\varphi_A) := \{Av : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

BEMERKUNG 3.2.10 (Linearkombinationen). Sind  $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$  dann wird jeder Vektor der Form  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$  mit  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  als *Linearkombination* der Vektoren  $v_1, \dots, v_r$  bezeichnet. Für die Menge aller Linearkombinationen schreiben wir

$$\text{span}(v_1, \dots, v_r) := \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i : \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dies ist ein Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ , denn  $0 = 0v_1 + \dots + 0v_r$ ,

$$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) + (\lambda'_1 v_1 + \dots + \lambda'_r v_r) = (\lambda_1 + \lambda'_1) v_1 + \dots + (\lambda_r + \lambda'_r) v_r,$$

sowie  $\mu(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) = (\mu\lambda_1) v_1 + \dots + (\mu\lambda_r) v_r$  für  $\lambda_i, \lambda'_i, \mu \in \mathbb{R}$ . Der Teilraum  $\text{span}(v_1, \dots, v_r)$  ist offensichtlich der kleinste Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ , der die Vektoren  $v_1, \dots, v_r$  enthält, und wird als der von  $v_1, \dots, v_r$  *aufgespannte Teilraum* bezeichnet. Im Fall  $r = 0$  definieren wir  $\text{span}(\emptyset) := \{0\}$ , wobei  $\emptyset$  das leere System von Vektoren bezeichnet.

BEMERKUNG 3.2.11. Für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit Eintragungen  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  bildet daher

$$\text{img}(A) = \{As : s \in \mathbb{R}^n\} = \left\{ s_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + s_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \mid s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R} \right\}$$

einen Teilraum von  $\mathbb{R}^m$ , siehe (76). Beachte, dass dies mit dem von den Spaltenvektoren von  $A$  aufgespannten Teilraum übereinstimmt. Wir werden bald sehen, dass sich jeder Teilraum in dieser Form schreiben lässt.

DEFINITION 3.2.12 (Erzeugendensystem). Ein System von Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  wird als *Erzeugendensystem* eines Teilraums  $V$  bezeichnet, wenn  $\text{span}(v_1, \dots, v_k) = V$  gilt. In diesem Fall sagen wir auch die Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  spannen den Teilraum  $V$  auf. Auch  $k = 0$  ist zugelassen, das leere System  $\emptyset$  bildet ein Erzeugendensystem des Teilraums  $\{0\}$ , in Zeichen:  $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$ .

BEMERKUNG 3.2.13 (Erzeugendensysteme). Ist  $V$  ein Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  und  $v_1, \dots, v_k$  ein System von Vektoren in  $V$  dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Die Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  bilden ein Erzeugendensystem von  $V$ .
- (b) Jeder Vektor in  $V$  lässt sich als Linearkombination von  $v_1, \dots, v_k$  schreiben, d.h. zu jedem  $v \in V$  existieren Skalare  $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}$ , sodass  $v = s_1 v_1 + \dots + s_k v_k$ .
- (c) Die Abbildung  $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow V$ ,  $\phi \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} := s_1 v_1 + \dots + s_k v_k$ , ist surjektiv.



BEISPIEL 3.2.14. Die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  bilden ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^2$ , denn jeder Vektor in  $\mathbb{R}^2$  lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{5x - 3y}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

schreiben. Auch die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ ,  $v_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$  bilden ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^2$ , denn jeder Vektor in  $\mathbb{R}^2$  lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{5x - 3y}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

schreiben. Diesmal ist die Darstellung jedoch nicht eindeutig, es gilt auch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{7x - 6y}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{y}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

BEMERKUNG 3.2.15. Bilden die Vektoren  $v_1, \dots, v_r$  ein Erzeugendensystem eines Teilraums  $V$  in  $\mathbb{R}^n$ , und sind  $v_{r+1}, \dots, v_{r+k}$  beliebige weitere Vektoren in  $V$ , dann bildet auch  $v_1, \dots, v_{r+k}$  ein Erzeugendensystem von  $V$ .

BEISPIEL 3.2.16. Die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$  bilden kein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^2$ , etwa lässt sich der Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  nicht als Linearkombination von  $v_1$  und  $v_2$  schreiben.

BEISPIEL 3.2.17. Der Vektor  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  bildet ein Erzeugendensystem des Teilraums  $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0 \right\}$  von  $\mathbb{R}^2$ , denn jeder Vektor in  $V$  ist Vielfaches von  $v_1$ .

BEISPIEL 3.2.18. Die drei Einheitsvektoren  $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$  bilden ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^3$ , denn jeder Vektor in  $\mathbb{R}^3$  lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

schreiben.

BEMERKUNG 3.2.19. Die Einheitsvektoren  $e_1, \dots, e_n$  bilden Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^n$ .

BEISPIEL 3.2.20. Betrachte den Teilraum  $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x + 4y + 5z = 0 \right\}$  von  $\mathbb{R}^3$ . Die beiden Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4/5 \end{pmatrix}$  bilden ein Erzeugendensystem

von  $V$ , denn jeder Vektor in  $V$  lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4/5 \end{pmatrix} = xv_1 + yv_2$$

schreiben. In Zeichen:  $V = \text{span}(v_1, v_2)$ .

BEISPIEL 3.2.21. Betrachte den Teilraum  $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\}$  von

$\mathbb{R}^3$ . Der Vektor  $v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  bildet ein Erzeugendensystem von  $V$ , denn jeder Vektor in  $V$  ist Vielfaches von  $v_1$ . In Zeichen:  $V = \text{span}(v_1)$ .

BEISPIEL 3.2.22. Die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$  bilden ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^3$ , denn jeder Vektor in  $\mathbb{R}^3$  lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{15x - 20y + 3z}{30} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5y - 6z}{15} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{5} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

schreiben.

DEFINITION 3.2.23 (Lineare Abhängigkeit). Ein System von Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  wird *linear abhängig* genannt, falls Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  existieren, die nicht alle gleich 0 sind, und für die

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

gilt.

DEFINITION 3.2.24 (Lineare Unabhängigkeit). Ein System von Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  wird *linear unabhängig* genannt, wenn es nicht linear abhängig ist. Die Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  sind also genau dann linear unabhängig wenn gilt:

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

Im Fall  $k = 0$  definieren wir: Das leere System  $\emptyset$  ist linear unabhängig.

BEMERKUNG 3.2.25 (Lineare Unabhängigkeit). Für ein System von Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Die Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  sind linear unabhängig.
- (b) Ist  $s_1 v_1 + \dots + s_k v_k = s'_1 v_1 + \dots + s'_k v_k$  für gewisse  $s_i, s'_i \in \mathbb{R}$ , dann muss schon  $s_i = s'_i$  für alle  $i = 1, \dots, k$  gelten.

- (c) Die lineare Abbildung  $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\phi \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} := s_1 v_1 + \dots + s_k v_k$ , ist injektiv.

Die Implikationen (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) sind trivial. Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (c) folgt aus Lemma 3.2.7 oder direkt: aus  $s_1v_1 + \dots + s_kv_k = s'_1v_1 + \dots + s'_kv_k$  zunächst  $(s_1 - s'_1)v_1 + \dots + (s_k - s'_k)v_k = 0$ , also  $s_i - s'_i = 0$  und daher  $s_i = s'_i$  für alle  $i$  wegen der linearen Unabhängigkeit.

BEISPIEL 3.2.26. Die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  sind linear unabhängig, aus

$$0 = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{pmatrix}$$

folgt nämlich  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

BEISPIEL 3.2.27. Die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig, denn es gilt die nicht-triviale Relation  $2v_1 - 1v_2 = 0$ .

BEISPIEL 3.2.28. Die Einheitsvektoren  $e_1, e_2, e_3$  von  $\mathbb{R}^3$  sind linear unabhängig. Aus

$$0 = \lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \lambda_3e_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

folgt nämlich  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

BEMERKUNG 3.2.29. Die Einheitsvektoren  $e_1, \dots, e_n$  in  $\mathbb{R}^n$  sind linear unabhängig.

BEISPIEL 3.2.30. Die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{R}^3$ . Aus

$$0 = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ 4\lambda_1 + 7\lambda_2 \end{pmatrix}$$

folgt (durch eine einfache Rechnung) nämlich  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

BEISPIEL 3.2.31. Die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$  sind linear unabhängig in  $\mathbb{R}^3$ . Aus

$$0 = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \lambda_3v_3 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 \\ 3\lambda_2 + 6\lambda_3 \\ 5\lambda_3 \end{pmatrix}$$

folgt nämlich  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

BEISPIEL 3.2.32. Die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig, denn es gilt die nicht-triviale Relation  $3v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$ .

BEMERKUNG 3.2.33. Ein System, das nur aus einem Vektor  $v_1 \in \mathbb{R}^n$  besteht ist genau dann linear unabhängig, wenn  $v_1 \neq 0$  gilt.

BEMERKUNG 3.2.34. Lassen wir in einem linear unabhängigen System einige (oder alle) Vektoren weg, erhalten wir stets ein linear unabhängiges System.

DEFINITION 3.2.35 (Basis). Unter einer (geordneten) Basis eines Teilraums  $V$  von  $\mathbb{R}^n$  verstehen wir ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von  $V$ .

PROPOSITION 3.2.36 (Basis und Parameterdarstellung). Ist  $V$  ein Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  und  $b_1, \dots, b_k$  ein System von Vektoren in  $V$  dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Die Vektoren  $b_1, \dots, b_k$  bilden eine Basis von  $V$ .
- (b) Zu jedem  $v \in V$  existieren eindeutige Skalare  $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}$ , sodass  $v = s_1 b_1 + \dots + s_k b_k$ .
- (c) Die Abbildung  $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow V$ ,  $\phi \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} := s_1 b_1 + \dots + s_k b_k$ , ist eine (lineare) Bijektion.

BEWEIS. Dies folgt durch Kombination der Bemerkungen 3.2.13 und 3.2.25. □

BEISPIEL 3.2.37. Die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  bilden eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ . In Beispiel 3.2.14 haben wir nämlich gesehen, dass diese Vektoren ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^2$  bilden, und in Beispiel 3.2.26 haben wir die lineare Unabhängigkeit überprüft.

BEISPIEL 3.2.38. Die Vektoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$  bilden eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ . In Beispiel 3.2.22 haben wir nämlich gesehen, dass diese Vektoren ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^3$  bilden, und in Beispiel 3.2.31 haben wir die lineare Unabhängigkeit überprüft.

BEMERKUNG 3.2.39 (Standardbasis). Die Einheitsvektoren  $e_1, \dots, e_n$  bilden eine Basis von  $\mathbb{R}^n$ , die als *Standardbasis* bezeichnet wird. Dies folgt aus den Bemerkungen 3.2.19 und 3.2.29.

BEISPIEL 3.2.40. In Beispiel 3.2.17 bildet der Vektor  $v_1$  eine Basis des Teilraums  $V$ .

BEISPIEL 3.2.41. In Beispiel 3.2.20 bilden die Vektoren  $v_1, v_2$  eine Basis von  $V$ .

BEISPIEL 3.2.42. In Beispiel 3.2.21 bildet der Vektor  $v_1$  eine Basis des Teilraums  $V$ .

Der Schlüssel zum Dimensionsbegriff ist folgendes Resultat.

SATZ 3.2.43 (Austauschsatz von Steinitz). Sei  $v_1, \dots, v_r$  ein Erzeugendensystem eines Teilraums  $V$  von  $\mathbb{R}^n$  und  $w_1, \dots, w_k$  linear unabhängig in  $V$ . Dann gilt

$$k \leq r$$

und nach geeignetem Umm Nummerieren der Vektoren  $v_1, \dots, v_r$  bildet auch

$$w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_r$$

ein Erzeugendensystem von  $V$ .

BEWEIS. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach  $k$ . Für  $k = 0$  ist die Aussage trivial. Für den Induktionsschritt sei nun  $k \geq 1$  und die Aussage für  $k - 1$  bereits gezeigt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher  $k - 1 \leq r$  und, nach geeignetem Umm Nummerieren der Vektoren  $v_1, \dots, v_r$  bildet

$$w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_r \tag{77}$$

ein Erzeugendensystem von  $V$ . Daher existieren Skalare  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , sodass

$$w_k = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{k-1} w_{k-1} + \lambda_k v_k + \cdots + \lambda_r v_r. \quad (78)$$

Da das System  $w_1, \dots, w_k$  linear unabhängig ist folgt  $k \leq r$  und mindestens einer der Skalare  $\lambda_k, \dots, \lambda_r$  muss verschieden von 0 sein. Andernfalls erhielten wir die Relation  $w_k = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{k-1} w_{k-1}$ , was der linearen Unabhängigkeit des Systems  $w_1, \dots, w_k$  widerspräche. Durch Umm nummerieren der Vektoren  $v_i$  können wir also  $\lambda_k \neq 0$  erreichen. Aus (78) erhalten wir daher

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} w_1 - \cdots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} w_{k-1} + \frac{1}{\lambda_k} w_k - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} v_{k+1} - \cdots - \frac{\lambda_r}{\lambda_k} v_r.$$

Dies zeigt, dass der Vektor  $v_k$  im Erzeugniss des Systems

$$w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_r \quad (79)$$

liegt. Mit (77) ist daher auch (79) ein Erzeugendensystem für  $V$ .  $\square$

**KOROLLAR 3.2.44.** *Jeder Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine Basis. Je zwei Basen eines Teilraums bestehen aus gleichvielen Vektoren.*

**BEWEIS.** Sei  $V$  ein Teilraum in  $\mathbb{R}^n$ . Wir erinnern uns daran, dass die Einheitsvektoren  $e_1, \dots, e_n$  ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^n$  bilden, siehe Bemerkung 3.2.39. Für jedes linear unabhängige System  $b_1, \dots, b_k$  in  $\mathbb{R}^n$  haben wir nach Satz 3.2.43 daher die Schranke  $k \leq n$ . Es gibt also eine maximale Zahl  $k$  mit folgender Eigenschaft: Es existiert ein linear unabhängiges System von Vektoren  $b_1, \dots, b_k$  in  $V$ . Jedes solche System muss ein Erzeugendensystem von  $V$  sein. Um dies einzusehen, sei  $v \in V$  beliebig. Aus der Maximalität von  $k$  folgt, dass das System  $v, b_1, \dots, b_k$  linear abhängig ist. Es existieren daher Skalare  $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ , die nicht alle verschwinden und für die  $\lambda_0 v + \lambda_1 b_1 + \lambda_k b_k = 0$  gilt. Es muss  $\lambda_0 \neq 0$  sein, denn andernfalls erhielten wir die nicht-triviale Relation  $\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_k b_k = 0$ , was der linearen Unabhängigkeit des Systems  $b_1, \dots, b_k$  widerspräche. Somit  $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} b_1 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} b_k$ , also  $v \in \text{span}(b_1, \dots, b_k)$ . Dies zeigt, dass  $b_1, \dots, b_k$  ein Erzeugendensystem von  $V$  bildet. Da diese Vektoren auch linear unabhängig sind, bilden sie also eine Basis von  $V$ . Sind  $b_1, \dots, b_k$  und  $c_1, \dots, c_l$  zwei Basen von  $V$ , dann folgt aus Satz 3.2.43  $k \leq l$  und  $l \leq k$ , also  $k = l$ .  $\square$

**DEFINITION 3.2.45 (Dimension).** Unter der Dimension eines Teilraums  $V$  von  $\mathbb{R}^n$  verstehen wir die Anzahl der Vektoren in einer (und dann jeder) Basis von  $V$ . Wir notieren die Dimension von  $V$  mit  $\dim(V)$ .

**BEMERKUNG 3.2.46.** Da die Standardbasis  $e_1, \dots, e_n$  von  $\mathbb{R}^n$  aus genau  $n$  Vektoren besteht gilt  $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ , siehe Bemerkung 3.2.39.

**BEMERKUNG 3.2.47.** Ein Teilraum  $V$  von  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann 0-dimensional wenn das leere System  $\emptyset$  ein Erzeugendensystem bildet, d.h. wenn  $V = \{0\}$  gilt. Der Nullvektor bildet *keine* Basis von  $V = \{0\}$ .

**BEMERKUNG 3.2.48.** Ist  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ , dann bildet  $\text{span}(v)$  einen 1-dimensionalen Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ . Umgekehrt ist jeder 1-dimensionale Teilraum in  $\mathbb{R}^n$  von dieser Form.

**BEMERKUNG 3.2.49.** Sind  $v_1, v_2$  linear unabhängig in  $\mathbb{R}^n$ , dann bildet  $\text{span}(v_1, v_2)$  einen 2-dimensionalen Teilraum von  $\mathbb{R}^n$ . Umgekehrt ist jeder 2-dimensionale Teilraum in  $\mathbb{R}^n$  von dieser Form.

**KOROLLAR 3.2.50.** *Für jeden  $k$ -dimensionalen Teilraum  $V$  von  $\mathbb{R}^n$  gilt:*

- (a) Jedes linear unabhängige System in  $V$  besteht aus höchstens  $k$  Vektoren. Sind  $v_1, \dots, v_k$  linear unabhängig in  $V$ , dann bilden diese Vektoren schon eine Basis von  $V$ .
- (b) Jedes Erzeugendensystem von  $V$  besteht aus mindestens  $k$  Vektoren. Ist  $v_1, \dots, v_k$  ein Erzeugendensystem von  $V$ , dann bilden diese Vektoren schon eine Basis von  $V$ .

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert eine Basis  $b_1, \dots, b_k$  von  $V$ . Insbesondere bilden diese Vektoren ein Erzeugendensystem von  $V$ . Sind  $v_1, \dots, v_l$  linear unabhängig in  $V$ , dann folgt aus Satz 3.2.43 daher  $l \leq k$ . Ist  $l = k$ , dann folgt aus Satz 3.2.43 auch, dass  $v_1, \dots, v_k$  ein Erzeugendensystem, und daher eine Basis, von  $V$  bilden. Dies zeigt (a).

Um (b) einzusehen, verwende wir die lineare Unabhängigkeit von  $b_1, \dots, b_k$ . Bilden die Vektoren  $v_1, \dots, v_l$  ein Erzeugendensystem von  $V$ , dann folgt aus Satz 3.2.43  $k \leq l$ . Sei nun  $k = l$  und  $v_1, \dots, v_k$  ein Erzeugendensystem von  $V$ . Es genügt zu zeigen, dass diese Vektoren auch linear unabhängig sind. Um dies einzusehen, nehmen wir indirekt an, das System  $v_1, \dots, v_k$  wäre linear abhängig. Es gilt daher  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$  für gewisse Skalare  $\lambda_i$ , die nicht alle verschwinden. O.B.d.A. sei  $\lambda_k \neq 0$ . Somit  $v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} v_{k-1}$ , also liegt  $v_k$  im Erzeugnis der Vektoren  $v_1, \dots, v_{k-1}$ . Wir sehen daher, dass auch  $v_1, \dots, v_{k-1}$  ein Erzeugendensystem von  $V$  bildet. Da jedes Erzeugendensystem von  $V$  aus mindestens  $k$  Vektoren bestehen muss, erhalten wir einen Widerspruch. Somit müssen  $v_1, \dots, v_k$  linear unabhängig sein.  $\square$

KOROLLAR 3.2.51. Sind  $W$  und  $V$  zwei Teilräume in  $\mathbb{R}^n$  und  $W \subseteq V$  dann gilt

$$\dim(W) \leq \dim(V).$$

Ist darüber hinaus  $\dim(W) = \dim(V)$ , dann folgt schon  $W = V$ .

BEWEIS. Sei  $l = \dim(W)$  und  $b_1, \dots, b_l$  eine Basis von  $W$ . Da diese Vektoren auch in  $V$  linear unabhängig sind, erhalten wir  $l \leq \dim(V)$  aus Korollar 3.2.50(a). Gilt  $l = \dim(V)$  dann folgt aus Korollar 3.2.50(a), dass  $b_1, \dots, b_l$  eine Basis von  $V$  bilden. Insbesondere spannen diese Vektoren ganz  $V$  auf und wir erhalten  $V = \text{span}(b_1, \dots, b_l) = W$ .  $\square$

BEISPIEL 3.2.52 (Teilräume von  $\mathbb{R}^2$ ). Da  $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$  kann die Dimension eines Teilraums von  $\mathbb{R}^2$  nur die Werte 0, 1 oder 2 annehmen, siehe Korollar 3.2.51. Nach Bemerkung 3.2.47 ist  $\{0\}$  der einzige 0-dimensionale Teilraum von  $\mathbb{R}^2$ . Nach Korollar 3.2.51 ist  $\mathbb{R}^2$  der einzige 2-dimensionale Teilraum von  $\mathbb{R}^2$ . Nach Bemerkung 3.2.48 sind die 1-dimensionalen Teilräume von  $\mathbb{R}^2$  genau die Teilräume der Form  $\text{span}(v)$  mit  $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ . Wir sehen daher, dass jeder Teilraum  $V$  in  $\mathbb{R}^2$  von der Form

$$V = \{0\}, \quad V = \text{span}(v) \quad \text{oder} \quad V = \mathbb{R}^2$$

ist, wobei  $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ .

BEISPIEL 3.2.53 (Teilräume von  $\mathbb{R}^3$ ). Da  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$  kann die Dimension eines Teilraums von  $\mathbb{R}^3$  nur die Werte 0, 1, 2 oder 3 annehmen, siehe Korollar 3.2.51. Wie zuvor, siehe auch Bemerkung 3.2.49, folgt, dass jeder Teilraum  $V$  in  $\mathbb{R}^3$  von der Form

$$V = \{0\}, \quad V = \text{span}(v), \quad V = \text{span}(v_1, v_2), \quad \text{oder} \quad V = \mathbb{R}^3$$

ist, wobei  $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$  und  $v_1, v_2$  linear unabhängig in  $\mathbb{R}^3$  sind. Die nicht-trivialen Fälle entsprechen also genau den Geraden bzw. Ebenen durch den Koordinatenursprung.

SATZ 3.2.54 (Dimensionsformel). Für jede lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gilt

$$\dim \ker(\varphi) + \dim \text{img}(\varphi) = n.$$

BEWEIS. Sei  $b_1, \dots, b_k$  eine Basis von  $\ker(\varphi)$ . Da diese Vektoren linear unabhängig in  $\mathbb{R}^n$  sind, lassen sie sich nach Satz 3.2.43 (etwa durch geeignete Einheitsvektoren) zu einer Basis von  $\mathbb{R}^n$  ergänzen, d.h. es existieren Vektoren  $b_{k+1}, \dots, b_n$  in  $\mathbb{R}^n$ , sodass  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis von  $\mathbb{R}^n$  bildet. Es genügt zu zeigen, dass  $\varphi(b_{k+1}), \dots, \varphi(b_n)$  eine Basis von  $\text{img}(\varphi)$  bildet, denn dann folgt  $\dim \text{img}(\varphi) = n - k = n - \dim \ker(\varphi)$ .

Da die Vektoren  $b_1, \dots, b_n$  ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^n$  bilden, kann jeder Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  in der Form  $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$  geschrieben werden. Mit der Linearität von  $\varphi$  folgt

$$\varphi(v) = \lambda_1 \varphi(b_1) + \dots + \lambda_n \varphi(b_n) = \lambda_{k+1} \varphi(b_{k+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(b_n),$$

denn  $\varphi(b_1) = \dots = \varphi(b_k) = 0$ , da die Vektoren  $b_1, \dots, b_k$  in  $\ker(\varphi)$  liegen. Dies zeigt, dass  $\varphi(b_{k+1}), \dots, \varphi(b_n)$  ein Erzeugendensystem von  $\text{img}(\varphi)$  bilden.

Um auch die lineare Unabhängigkeit von  $\varphi(b_{k+1}), \dots, \varphi(b_n)$  zu zeigen, seien  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  so, dass  $\lambda_{k+1} \varphi(b_{k+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(b_n) = 0$ . Mit der Linearität von  $\varphi$  erhalten wir

$$\varphi(\lambda_{k+1} b_{k+1} + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_{k+1} \varphi(b_{k+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(b_n) = 0,$$

also liegt  $\lambda_{k+1} b_{k+1} + \dots + \lambda_n b_n$  im Kern von  $\varphi$ . Da  $b_1, \dots, b_k$  ein Erzeugendensystem des Kerns bildet, existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  mit

$$\lambda_{k+1} b_{k+1} + \dots + \lambda_n b_n = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k.$$

Da die Vektoren  $b_1, \dots, b_n$  linear unabhängig sind, muss  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  gelten. Dies zeigt, dass  $\varphi(b_{k+1}), \dots, \varphi(b_n)$  linear unabhängig sind.  $\square$

KOROLLAR 3.2.55. Für jede lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gilt

$$n - m \leq \dim \ker(\varphi) \leq n \quad \text{und} \quad \dim \text{img}(\varphi) \leq \min\{n, m\}.$$

BEWEIS. Da  $\text{img}(\varphi)$  einen Teilraum von  $\mathbb{R}^m$  bildet, ist  $\dim \text{img}(\varphi) \leq m$ , siehe Korollar 3.2.51. Mit Satz 3.2.54 erhalten wir daraus auch  $\dim \ker(\varphi) = n - \dim \text{img}(\varphi) \geq n - m$ . Da  $\ker(\varphi)$  einen Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  ist, gilt auch  $\dim \ker(\varphi) \leq n$ . Da  $\dim \ker(\varphi) \geq 0$ , erhalten wir aus Satz 3.2.54 auch  $\dim \text{img}(\varphi) = n - \dim \ker(\varphi) \leq n - 0 = n$ .  $\square$

KOROLLAR 3.2.56. Ist  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine invertierbare (d.h. bijektive) lineare Abbildung, dann muss  $n = m$  gelten.

BEWEIS. Da  $\varphi$  surjektiv ist, gilt  $\text{img}(\varphi) = \mathbb{R}^m$ , also  $\dim \text{img}(\varphi) = m$ . Da  $\varphi$  injektiv ist, gilt  $\ker(\varphi) = \{0\}$ , also  $\dim \ker(\varphi) = 0$ , siehe Lemma 3.2.7. Mit der Dimensionsformel in Satz 3.2.54 erhalten wir  $n = \dim \ker(\varphi) + \dim \text{img}(\varphi) = 0 + m = m$ .<sup>20</sup>  $\square$

KOROLLAR 3.2.57. Für eine lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind äquivalent:

- (a)  $\varphi$  ist invertierbar (bijektiv).
- (b)  $\varphi$  ist surjektiv.
- (c)  $\varphi$  ist injektiv.

BEWEIS. Die Implikationen (a) $\Rightarrow$ (b) und (a) $\Rightarrow$ (c) sind trivial.

Um die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) zu zeigen, sei  $\varphi$  surjektiv. Dann gilt  $\text{img}(\varphi) = \mathbb{R}^n$ , also  $\dim \text{img}(\varphi) = n$  und daher  $\dim \ker(\varphi) = n - n = 0$  nach der Dimensionsformel in Satz 3.2.54. Mit Bemerkung 3.2.47 folgt  $\ker(\varphi) = \{0\}$ , also ist  $\varphi$  nach Lemma 3.2.7 injektiv.

<sup>20</sup>Alternativ kann dieses Korollar durch Spezialisierung des Beweises von Satz 3.2.54 gezeigt werden: Jede invertierbare lineare Abbildung bildet Basen auf Basen ab.

Um die Implikation (c) $\Rightarrow$ (a) zu zeigen, sei  $\varphi$  injektiv. Dann gilt  $\ker(\varphi) = \{0\}$  nach Lemma 3.2.7, also  $\dim \ker(\varphi) = 0$  und daher  $\dim \operatorname{img}(\varphi) = n - 0 = n$  nach der Dimensionsformel in Satz 3.2.54. Mit Korollar 3.2.51 folgt  $\operatorname{img}(\varphi) = \mathbb{R}^n$ , also ist  $\varphi$  surjektiv.  $\square$

DEFINITION 3.2.58 (Rang einer Matrix). Unter dem Rang einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  verstehen wir die Zahl

$$\operatorname{rank}(A) := \dim \operatorname{img}(A) = \dim \operatorname{img}(\varphi_A),$$

d.h. die Dimension des von den Spalten aufgespannten Teilraums in  $\mathbb{R}^m$ .

BEMERKUNG 3.2.59. Nach Satz 3.2.54 gilt  $\dim \ker(A) = n - \operatorname{rank}(A)$ .

BEMERKUNG 3.2.60. Für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gilt

$$n - m \leq \dim \ker(A) \leq n \quad \text{und} \quad \operatorname{rank}(A) \leq \min\{n, m\}.$$

Dies folgt aus Korollar 3.2.55.

BEISPIEL 3.2.61. Ein homogenes System aus 5 linearen Gleichungen in sieben Variablen besitzt stets einen Lösungsraum, der mindestens 2-dimensional ist. Dies folgt aus der vorangehenden Bemerkung 3.2.60, denn  $7 - 5 = 2$ , siehe auch Bemerkung 3.2.6.

KOROLLAR 3.2.62. Für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gilt:

- (a) Die Spalten von  $A$  sind genau dann linear unabhängig in  $\mathbb{R}^m$  wenn  $\operatorname{rank}(A) = n$ .
- (b) Die Spalten von  $A$  bilden genau dann ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^m$  wenn  $\operatorname{rank}(A) = m$ .
- (c) Die Spalten von  $A$  bilden genau dann eine Basis von  $\mathbb{R}^m$  wenn  $\operatorname{rank}(A) = n = m$  gilt.

BEWEIS. Die Spalten von  $A$  sind genau dann linear unabhängig, wenn  $\ker(A) = \{0\}$  gilt, siehe Bemerkung 3.2.25. Nach Bemerkung 3.2.47 ist dies genau dann der Fall, wenn  $\dim \ker(A) = 0$  gilt. Wegen der Dimensionsformel in Satz 3.2.54 ist dies zu  $\dim \operatorname{img}(A) = n$  äquivalent. Da  $\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{img}(A)$  folgt (a).

Die Spalten von  $A$  bilden genau dann ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^m$ , wenn  $\operatorname{img}(A) = \mathbb{R}^m$  gilt. Nach Korollar 3.2.51 ist dies genau dann der Fall, wenn  $\dim \operatorname{img}(A) = m$  gilt. Da  $\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{img}(A)$  folgt (b).

Die Aussage in (c) folgt sofort aus (a) und (b).  $\square$

BEMERKUNG 3.2.63 (Invertierbare Matrizen). Nach Korollar 3.2.56 kann eine Matrix nur dann invertierbar sein, wenn sie quadratisch ist, vgl. Bemerkung 3.1.30. Für eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a)  $A$  ist invertierbar.
- (b)  $\operatorname{rank}(A) = n$ .
- (c) Die Spalten von  $A$  bilden eine Basis von  $\mathbb{R}^n$ .
- (d) Die Spalten von  $A$  bilden ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^n$ .
- (e) Die Spalten von  $A$  sind linear unabhängig.

Die Äquivalenz (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e) folgt aus Korollar 3.2.62. Die Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow$ (c) aus Bemerkung 3.1.30 und Proposition 3.2.36.

BEMERKUNG 3.2.64. Zwei Vektoren  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  bilden genau dann eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ , wenn  $ad - bc \neq 0$ , vgl. Bemerkung 3.1.31.



**BEMERKUNG 3.2.65** (Hyperebenen). Ist  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine nicht-triviale lineare Abbildung, dann muss  $\dim \operatorname{img}(\varphi) = 1$  gelten und die Dimensionsformel in Satz 3.2.54 liefert  $\dim \ker(\varphi) = n - 1$ . Eine nicht-triviale lineare homogene Gleichung in  $n$  Variablen besitzt daher stets einen  $(n - 1)$ -dimensionalen Lösungsraum. Solche Teilräume werden als *Hyper-ebenen* bezeichnet.

**BEISPIEL 3.2.66.** Da der Teilraum  $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 4z = 0 \right\}$  durch eine nicht-triviale lineare Gleichung in drei Variablen beschrieben wird, gilt  $\dim(V) = 3 - 1 = 2$ . Offensichtlich sind  $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  zwei linear unabhängige Vektoren in  $V$ . Nach Korollar 3.2.50(a) bilden sie daher eine Basis von  $V$ . Es ist daher  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ ,  $\phi \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ , eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung von  $V$ .

**BEISPIEL 3.2.67.** Da die Spalten der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$  ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^2$  bilden gilt  $\operatorname{rank}(A) = 2$ . Für die Dimension des Lösungsraums

$$L = \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

erhalten wir  $\dim(L) = 5 - \operatorname{rank}(A) = 5 - 2 = 3$ , siehe Bemerkung 3.2.59.

**3.3. Elimination.** Wir betrachten ein homogenes System von  $m$  linearen Gleichungen in  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mit Koeffizienten  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Aus Bemerkung 3.2.6 wissen wir, dass der Lösungsraum,

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \right\},$$

einen Teilraum von  $\mathbb{R}^n$  bildet. Wir wollen nun einen Algorithmus beschreiben, der es erlaubt die Dimension und eine Basis von  $L$  zu bestimmen, und so eine Beschreibung von  $L$  durch eine Parameterdarstellung zu erhalten.

Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer  $(m \times n)$ -Matrix zusammen,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{80}$$

Damit lässt sich das Gleichungssystem kompakter in der Form

$$Ax = 0$$

schreiben,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Für den Lösungsraum erhalten wir

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} = \ker(A).$$

DEFINITION 3.3.1 (Elementare Zeilenumformungen). Unter einer elementaren Zeilenumformung verstehen wir jede der folgenden Operationen mit Matrizen:

- (a) Vertauschen zweier Zeilen.
- (b) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar ungleich Null.
- (c) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

LEMMA 3.3.2. *Kern und Rang einer Matrix bleiben bei elementaren Zeilenumformungen unverändert.*

BEWEIS. Der Kern einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  besteht aus allen Vektoren  $x \in \mathbb{R}^n$ , deren Komponenten das homogene lineare System

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

lösen, wobei wir die Eintragungen von  $A$ , wie zuvor, mit  $a_{ij}$  bezeichnen, siehe (80). Elementare Zeilenumformungen von  $A$  entsprechen Äquivalenzumformungen des Gleichungssystems und lassen den Lösungsraum daher unverändert. Aus der Dimensionsformel in Bemerkung 3.2.59 folgt, dass auch der Rang gleich bleibt.  $\square$

Durch geschicktes Anwenden elementarer Zeilenumformungen kann die Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems so weit vereinfacht werden, dass eine Basis ihres Kerns abgelesen werden kann. Wir wollen dies zunächst an einem Beispiel erläutern und anschließend den allgemeinen Algorithmus formulieren.

BEISPIEL 3.3.3. Wir betrachten folgendes homogenes System von vier linearen Gleichungen in vier Variablen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 14x_4 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{81}$$

und bezeichnen den Lösungsraum aller Vektoren  $x \in \mathbb{R}^4$ , deren Komponenten diesem Gleichungssystem genügen, mit  $L$ . Wir wollen die Dimension und eine Basis von  $L$  bestimmen und damit  $L$  durch eine Parameterdarstellung beschreiben. Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 15 & 14 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

und erhalten  $L = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$ . Durch Anwenden elementarer Zeilenumformungen auf  $A$  erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 15 & 14 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 8 \\ 0 & 4 & 15 & 14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Lemma 3.3.2 hat das Gleichungssystem (81) denselben Lösungsraum wie:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +6x_4 & = 0 \\ x_2 & -4x_4 & = 0 \\ x_3 & +2x_4 & = 0 \end{array}$$

Damit lässt sich sofort die allgemeine Lösung angeben. Wir können  $x_4$  beliebig wählen, aus der dritten Gleichung erhalten wir dann  $x_3 = -2x_4$ , und mit der zweiten Gleichung  $x_2 = 4x_4$  und mit der ersten Gleichung  $x_1 = -6x_4$ . Die allgemeine Lösung von (81) hat daher die Form

$$\begin{pmatrix} -6x_4 \\ 4x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei  $x_4 \in \mathbb{R}$  beliebig ist. Der Lösungsraum  $L$  des Systems (81) ist daher 1-dimensional und

der Vektor  $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  bildet eine Basis. Somit ist  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow L$ ,  $\phi(t) := t \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , eine Bijektion,

d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums.

DEFINITION 3.3.4 (Zeilenumstufenform). Eine Matrix hat *Zeilenumstufenform* wenn sie die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a_{1,j_1} & * \cdots * & * & * \cdots * & * & \cdots & * & * \cdots * & * & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & a_{2,j_2} & * \cdots * & * & \cdots & * & * \cdots * & * & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & a_{3,j_3} & \cdots & 0 & * \cdots * & * & * \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & a_{k-1,j_{k-1}} & * \cdots * & * & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 & a_{k,j_k} & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

hat, wobei  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ ,  $a_{i,j_i} \neq 0$  für  $i = 1, \dots, k$ , und  $*$  beliebige Eintragungen bezeichnen. Eine Matrix hat *reduzierte Zeilenstufenform*, wenn sie folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} 0 \dots 0 & 1 & * \dots * & 0 & * \dots * & 0 & \dots & 0 & * \dots * & 0 & * \dots * \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & * \dots * & 0 & \dots & 0 & * \dots * & 0 & * \dots * \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & \dots & 0 & * \dots * & 0 & * \dots * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \dots & 1 & * \dots * & 0 & * \dots * \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 & 1 & * \dots * \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

BEISPIEL 3.3.5. Folgende Matrizen haben reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnen  $*$  wieder beliebige Eintragungen.

SATZ 3.3.6 (Elimination). *Jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen auf (reduzierte) Zeilenstufenform  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gebracht werden. Sind dabei  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$  wie in Definition 3.3.4 dann gilt:*

- (a)  $\text{rank}(A) = \dim \text{img}(A) = k$  und  $\dim \ker(A) = n - k$ .
- (b) Die ersten  $k$  Zeilen der Zeilenstufenform  $\tilde{A}$  liefern ein minimales Gleichungssystem für  $\ker(A)$ .
- (c) Die Spalten von  $A$  mit den Nummern  $j_1, \dots, j_k$  bilden eine Basis von  $\text{img}(A)$ .
- (d) Ist die Zeilenstufenform  $\tilde{A}$  reduziert, so bilden die Vektoren

$$e_j - \sum_{l=1}^m \tilde{A}_{lj} e_{j_l}, \quad j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\},$$

eine Basis von  $\ker(A)$ .

BEWEIS. Wir bringen die Matrix  $A$  spaltenweise von links nach rechts auf reduzierte Zeilenstufenform. Induktiv nehmen wir an, die ersten  $q - 1$  Spalten von  $A$  haben bereits reduzierte Zeilenstufenform, wobei  $q - 1 < n$ . Bezeichne  $p - 1$  die Anzahl der nicht-trivialen Zeilen der ersten  $q - 1$  Spalten von  $A$ . Ist  $p - 1 = m$ , dann hat  $A$  reduzierte Zeilenstufenform. O.B.d.A. sei daher  $p - 1 < m$ . Somit  $A_{p,1} = \dots = A_{p,q-1} = 0$ . Sind die Elemente  $A_{p,q}, \dots, A_{m,q}$  alle Null, dann sind auch die ersten  $q$  Spalten von  $A$  in reduzierter Zeilenstufenform, und der Induktionsschritt erledigt. O.B.d.A. sei also einer der Einträge  $A_{p,q}, \dots, A_{m,q}$  verschieden

von Null. Durch Vertauschen zweier Zeilen können wir weiters  $A_{p,q} \neq 0$  erreichen. Durch Multiplikation der  $p$ -ten Zeile mit  $1/A_{p,q}$ , dürfen wir weiters annehmen, dass  $A_{p,q} = 1$ . Durch Addition geeigneter Vielfacher der  $p$ -ten Zeile zu den restlichen Zeilen können wir schließlich auch  $A_{i,q} = 0$ , für alle  $i \neq p$  erreichen. Beachte, dass die verwendeten Zeilenumformungen die ersten  $q - 1$  Spalten von  $A$  unverändert lassen. Wir erhalten also eine Matrix, deren ersten  $q$  Spalten in reduzierter Zeilenstufenform vorliegen. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt, also lässt sich  $A$  durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform  $\tilde{A}$  bringen.

Im Fall  $\tilde{A} = A$  lassen sich die Aussagen (a), (b) und (d) aufgrund der einfachen Zeilenstufenform sofort ablesen. Nach Lemma 3.3.2 gilt  $\ker(\tilde{A}) = \ker(A)$  und  $\text{rank}(\tilde{A}) = \text{rank}(A)$ , also bleiben diese Aussagen auch für  $A$  richtig. Um (c) einzusehen, betrachten wir die Matrix  $B$ , die wir aus  $A$  erhalten, indem wir alle Spalten bis auf die mit Nummern  $j_1, \dots, j_k$  streichen. Wenden wir die selben Zeilenumformungen, die uns von  $A$  zu  $\tilde{A}$  geführt haben, auf  $B$  an, so erhalten wir eine Matrix  $\tilde{B}$ , deren Spalten gerade die Spalten von  $\tilde{A}$  mit Nummern  $j_1, \dots, j_k$  sind. Die Matrix  $\tilde{B}$  hat daher Zeilenstufenform mit  $k$  nicht-trivialen Zeilen, es gilt somit  $\ker(\tilde{B}) = \{0\}$ . Mit Lemma 3.3.2 folgt  $\ker(B) = \{0\}$ , also sind die Spalten von  $B$  linear unabhängig. Folglich sind auch die Spalten von  $A$  mit Nummern  $j_1, \dots, j_k$  linear unabhängig in  $\text{img}(A)$ . Da  $\dim \text{img}(A) = k$ , bilden diese Spalten eine Basis von  $\text{img}(A)$ , siehe Korollar 3.2.50(a).  $\square$

BEISPIEL 3.3.7. Es bezeichne  $L \subseteq \mathbb{R}^5$  den Lösungsraum des Systems:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 12x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_4 + 10x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 7x_5 &= 0 \end{aligned} \tag{82}$$

Wir wollen nun:

- (1)  $\dim(L)$  und eine Basis von  $L$  bestimmen.
- (2) Ein minimales Gleichungssystem für  $L$  angeben.

Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 12 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 10 \\ 3 & 2 & 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher  $L = \ker(A)$ . Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir  $A$  auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 12 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 10 \\ 3 & 2 & 4 & 9 & 7 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt  $\dim(L) = 5 - 2 = 3$ . Nach Satz 3.3.6(d) bilden die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von  $L$ . Insbesondere ist

$$\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow L, \quad \phi \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s_1 - 3s_2 - s_3 \\ s_1 - 2s_3 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix},$$

eine (lineare) Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung für  $L$ . Nach Satz 3.3.6(b) erhalten wir aus den nicht-trivialen Zeilen der reduzierten Zeilstufenform folgendes minimale Gleichungssystem für  $L$ :

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & +2x_3 & +3x_4 & +x_5 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & & +2x_5 & = 0 \end{array}$$

BEISPIEL 3.3.8. Es bezeichne  $L \subseteq \mathbb{R}^3$  den Lösungsraum des Systems:

$$\begin{array}{cccc} 4x_1 & +8x_2 & +8x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = 0 \end{array} \quad (83)$$

Wir wollen eine Basis des Lösungsraums bestimmen. Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher  $L = \ker(A)$ . Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir  $A$  auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt  $\dim(L) = 3 - 2 = 1$ . Nach Satz 3.3.6(d) bildet der Vektor

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von  $L$ . Insbesondere ist

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow L, \quad \phi(s) = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ 0 \end{pmatrix},$$

eine (lineare) Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung für  $L$ .

BEISPIEL 3.3.9. Es bezeichne  $L \subseteq \mathbb{R}^3$  den Lösungsraum des Systems:

$$\begin{array}{rcl} & +2x_2 & +7x_3 = 0 \\ 3x_1 & +6x_2 & +11x_3 = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +4x_3 = 0 \end{array} \quad (84)$$

Wir wollen eine Basis von  $L$  bestimmen. Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 11 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher  $L = \ker(A)$ . Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir  $A$  auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 11 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 11 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt  $\dim(L) = 3 - 3 = 0$ , d.h.  $L = \{0\}$  und  $\emptyset$  ist eine Basis von  $L$ .

BEISPIEL 3.3.10. Es bezeichne  $L \subseteq \mathbb{R}^5$  den Lösungsraum des Systems:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +4x_4 & +11x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +14x_4 & +30x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +12x_4 & +34x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +20x_4 & +41x_5 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & +7x_5 & = & 0 \end{array} \quad (85)$$

Wir wollen nun:

- (1)  $\dim(L)$  und eine Basis von  $L$  bestimmen.
- (2) Ein minimales Gleichungssystem für  $L$  angeben.

Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher  $L = \ker(A)$ . Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir  $A$  auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 19 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \\
 & \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt  $\dim(L) = 5 - 3 = 2$ . Nach Satz 3.3.6(d) bilden die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von  $L$ . Insbesondere ist

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow L, \quad \phi \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s - t \\ s \\ -3t \\ t \\ 0 \end{pmatrix},$$

eine (lineare) Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung für  $L$ . Nach Satz 3.3.6(b) erhalten wir aus den nicht-trivialen Zeilen der reduzierten Zeilenstufenform folgendes minimale Gleichungssystem für  $L$ :

$$\begin{aligned}
 x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\
 x_3 + 3x_4 &= 0 \\
 x_5 &= 0
 \end{aligned}$$

BEISPIEL 3.3.11. Wir wollen den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 13 & 21 & 32 \end{pmatrix}$$



bestimmen. Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 13 & 21 & 32 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 13 & 21 & 32 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher  $\text{rank}(A) = 4$ . Die Matrix  $A$  ist daher invertierbar, ihre Spalten bilden eine Basis von  $\mathbb{R}^4$ , siehe Bemerkung 3.2.63.

BEISPIEL 3.3.12. Wir wollen verifizieren, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 21 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 19 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^3$  sind, und drei dieser Vektoren bestimmen, die eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  bilden. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -1 & 3 & 3 & -6 \\ 4 & 11 & 18 & 21 & 19 \end{pmatrix}.$$

Mittels Zeilenumformungen bringen wir  $A$  auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -1 & 3 & 3 & -6 \\ 4 & 11 & 18 & 21 & 19 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher  $\text{rank}(A) = 3$ . Nach Satz 3.3.6(c) bilden die Vektoren  $v_1, v_2, v_5$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ , siehe Korollar 3.2.62(b). Insbesondere bilden die Vektoren  $v_1, \dots, v_5$  ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^3$ . Beachte, dass etwa  $v_1, v_2, v_3$  keine Basis von  $\mathbb{R}^3$  bilden.

BEISPIEL 3.3.13. Betrachte den Teilraum  $W = \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \subseteq \mathbb{R}^5$ , der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 12 \\ 20 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 34 \\ 41 \\ 7 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Wir wollen eine Basis von  $W$  bestimmen, die aus gewissen der Vektoren  $v_i$  besteht. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher  $W = \text{img}(A)$ . Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir  $A$  auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 19 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher  $\dim(W) = 3$ . Nach Satz 3.3.6(c) bilden die Vektoren  $v_1, v_3, v_5$  eine Basis von  $W$ . Beachte, dass etwa  $v_1, v_2, v_5$  keine Basis von  $W$  bildet.

BEISPIEL 3.3.14. Wir wollen entscheiden, ob die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 3 & 8 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir  $A$  auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 3 & 8 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher  $\text{rank}(A) = 3$ . Somit sind  $v_1, v_2, v_3$  linear unabhängig, siehe Korollar 3.2.62(a)

BEISPIEL 3.3.15. Wir wollen entscheiden, ob die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 12 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir  $A$  auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 12 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 10 & 14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher  $\text{rank}(A) = 2$ . Somit sind  $v_1, v_2, v_3$  nicht linear unabhängig, siehe Korollar 3.2.62(a).

BEISPIEL 3.3.16. Wir wollen entscheiden, ob die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  bilden. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 14 & 7 & 5 \\ -7 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir  $A$  auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 14 & 7 & 5 \\ -7 & 9 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher  $\text{rank}(A) = 3$ . Somit bilden  $v_1, v_2, v_3$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ , siehe Korollar 3.2.62(c).

BEISPIEL 3.3.17. Wir wollen entscheiden, ob die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

eine Basis von  $\mathbb{R}^4$  bilden. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & 13 & 2 \\ -10 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir  $A$  auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & 13 & 2 \\ -10 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 7 & -1 \\ 0 & 9 & 13 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher  $\text{rank}(A) = 3$ . Somit bilden  $v_1, v_2, v_3, v_4$  keine Basis von  $\mathbb{R}^4$ , siehe Korollar 3.2.62(c).

BEISPIEL 3.3.18. Wir wollen zunächst den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 & 14 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 12 & 9 & 17 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Durch Vertauschen der ersten und dritten Zeile erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 & 14 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 12 & 9 & 17 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Zeile zu den anderen Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vertauschen der zweiten und dritten Zeile liefert:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der zweiten Zeile zu den letzten beiden Zeilen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der dritten Zeile zur vierten und sechsten Zeile erhalten wir schließlich eine Matrix in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher  $\text{rank}(A) = 3$ . Aus dieser Rechnung lässt sich noch viel mehr über  $A$  sagen. Nach Satz 3.3.6(b) bildet

$$\begin{aligned} 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + x_6 + 3x_7 + 4x_8 &= 0 \\ 3x_6 + 4x_7 + x_8 &= 0 \\ 4x_7 + 5x_8 &= 0 \end{aligned} \tag{86}$$

ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum  $L = \{x \in \mathbb{R}^8 \mid Ax = 0\}$ , und es gilt  $\dim(L) = 5$ . Nach Satz 3.3.6(c) bilden die folgenden Spalten von  $A$  eine Basis von  $\text{img}(A)$ :

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad a_7 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 14 \\ 17 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bringen wir  $A$  durch weitere Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 & 1/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 & 1/2 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 & 0 & 0 & 19/24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dann folgt aus Satz 3.3.6(d), dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -19/24 \\ 0 \\ 0 \\ 4/3 \\ -5/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraums  $L = \{x \in \mathbb{R}^8 \mid Ax = 0\}$  bilden. Somit ist  $\phi: \mathbb{R}^5 \rightarrow L$ ,

$$\phi \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -19/24 \\ 0 \\ 0 \\ 4/3 \\ -5/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung von  $L$ . Schließlich erhalten wir aus der reduzierten Zeilenstufenform folgendes minimale Gleichungssystem für  $L$ , vgl. (86):

$$\begin{aligned} x_3 + \frac{3}{2}x_4 + 2x_5 + \frac{19}{24}x_8 &= 0 \\ x_6 - \frac{4}{3}x_8 &= 0 \\ x_7 + \frac{5}{4}x_8 &= 0 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun ein inhomogenes System von  $m$  linearen Gleichungen in  $n$  Variablen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned} \tag{87}$$

Wir wollen, für fixe Koeffizienten  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  und fixe Konstanten  $y_i \in \mathbb{R}$ , den Lösungsraum

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{array} \right\},$$

beschreiben. Wir fassen die Koeffizienten und Konstanten des Gleichungssystems zu einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und einem Vektor  $y \in \mathbb{R}^m$  zusammen,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \tag{88}$$

Damit lässt sich das Gleichungssystem kompakter in der Form

$$Ax = y$$

schreiben,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Für den Lösungsraum erhalten wir

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = y\}.$$

Ein inhomogenes Gleichungssystem wird i.A. keine Lösung besitzen. Ist  $\xi$  eine (spezielle) Lösung, d.h.  $A\xi = y$ , dann haben wir

$$x \in L \Leftrightarrow Ax = y \Leftrightarrow A(x - \xi) = 0 \Leftrightarrow x - \xi \in \ker(A) \Leftrightarrow x \in \xi + \ker(A),$$

und daher

$$L = \xi + \ker(A) = \{\xi + v : v \in \ker(A)\}.$$

In diesem Fall erhalten wir den Lösungsraum des inhomogenen Systems  $Ax = y$  daher durch Verschieben des Lösungsraums  $\ker(A)$  des assoziierten homogenen Systems  $Ax = 0$ . Ist  $b_1, \dots, b_k$  eine Basis von  $\ker(A)$ , dann ist also

$$\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow L, \quad \phi \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} := \xi + s_1 b_1 + \dots + s_k b_k,$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung von  $L$ . Insbesondere gilt

$$L = \{\xi + s_1 b_1 + \dots + s_k b_k : s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}\}.$$

Um den Lösungsraum eines inhomogenen Systems zu beschreiben, genügt es daher eine spezielle Lösung zu finden und eine Basis des Lösungsraums des entsprechenden homogenen Systems zu bestimmen.

**SATZ 3.3.19** (Inhomogene lineare Gleichungssysteme). *Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $y \in \mathbb{R}^m$ . Das inhomogene System*

$$Ax = y \tag{89}$$

*ist genau dann lösbar, wenn*

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|y)$$

*gilt. Durch Zeilenumformungen lässt sich die erweiterte Matrix  $(A|y)$  auf die Form  $(\tilde{A}|\tilde{y})$  bringen, wobei  $\tilde{A}$  (reduzierte) Zeilenstufenform hat. Sind  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$  wie in Definition 3.3.4, so ist (89) also genau dann lösbar, wenn  $\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_{k+2} = \dots = \tilde{y}_m = 0$  gilt. In diesem Fall liefern die ersten  $k$  Zeilen von  $(\tilde{A}|\tilde{y})$  ein minimales inhomogenes Gleichungssystem, das dieselbe Lösungsmenge wie (89) besitzt. Ist darüber hinaus die Zeilenstufenform  $\tilde{A}$  reduziert, dann bildet*

$$\xi = \tilde{y}_1 e_{j_1} + \dots + \tilde{y}_k e_{j_k}$$

*eine spezielle Lösung von (89), d.h. es gilt  $A\xi = y$ . Mit Satz 3.3.6(d) erhalten wir aus  $\tilde{A}$  eine Basis  $b_1, \dots, b_{n-k}$  für den Lösungsraum des homogenen Systems  $Ax = 0$ . Die allgemeine Lösung von (89) ist dann von der Form*

$$x = \xi + s_1 b_1 + \dots + s_{n-k} b_{n-k}, \quad s_1, \dots, s_{n-k} \in \mathbb{R}.$$

**BEWEIS.** Bezeichnen  $A = (a_1, \dots, a_n)$  die Spalten von  $A$ , dann gilt

$$\text{rank}(A) = \dim \text{span}(a_1, \dots, a_n) \quad \text{und} \quad \text{rank}(A|y) = \dim \text{span}(a_1, \dots, a_n, y).$$

Die Bedingung  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|y)$  ist daher zu

$$\text{span}(a_1, \dots, a_n) = \text{span}(a_1, \dots, a_n, y)$$

äquivalent, siehe Korollar 3.2.51. Dies ist wiederum zu  $y \in \text{span}(a_1, \dots, a_n)$  äquivalent. Da  $\text{span}(a_1, \dots, a_n) = \text{img}(A)$ , ist dies genau dann der Fall, wenn das System  $Ax = y$  eine Lösung  $x \in \mathbb{R}^n$  besitzt.

Elementare Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix  $(A|y)$  entsprechen Äquivalenzumformungen des Gleichungssystems (87). Es gilt daher

$$Ax = y \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}x = \tilde{y},$$

d.h. die Lösungsmenge von  $Ax = y$  stimmt mit der von  $\tilde{A}x = \tilde{y}$  überein. Daraus lassen sich nun sofort die restlichen Behauptungen ablesen.  $\square$

BEISPIEL 3.3.20. Wir wollen alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= -1 \end{aligned} \tag{90}$$

bestimmen. Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & -1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & -4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem (90) besitzt daher die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

BEISPIEL 3.3.21. Wir wollen alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= -4 \end{aligned} \tag{91}$$

bestimmen. Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 7 & -4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Daraus lesen wir eine spezielle Lösung  $\xi$  sowie eine Basis  $b_1$  für den Lösungsraum des homogenen Systems ab, vgl. Satz 3.3.19:

$$\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (91) ist daher

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Bezeichnet  $L$  den Lösungsraum des Systems (91), dann ist also

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow L, \quad \phi(s) := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums. Auch ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum lässt sich ablesen:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & -2x_3 & = -1 \\ x_2 & +3x_3 & = -1 \end{array}$$

BEISPIEL 3.3.22. Wir wollen alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +3x_4 & = & -1 \\ x_1 & +7x_2 & +17x_3 & +20x_4 & = & 9 \\ 2x_1 & -x_2 & -16x_3 & -17x_4 & = & 2 \end{array} \quad (92)$$

bestimmen. Durch Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 17 & 20 & 9 \\ 2 & -1 & -16 & -17 & 2 \end{array} \right) & \rightsquigarrow & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 14 & 16 & 5 \\ 0 & -5 & -22 & -25 & -6 \end{array} \right) \\ & & \rightsquigarrow & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & -18 & -3 \end{array} \right) & \rightsquigarrow & \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem (92) besitzt daher keine Lösung, vgl. Satz 3.3.19.

BEISPIEL 3.3.23. Wir wollen alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rclcl} 5x_1 & -5x_2 & +10x_3 & +10x_4 & = & -5 \\ 2x_1 & & +8x_3 & +10x_4 & = & 12 \\ 2x_1 & +x_2 & +10x_3 & +13x_4 & = & 19 \\ 3x_1 & -5x_2 & +2x_3 & & = & -17 \end{array} \quad (93)$$

bestimmen. Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccc|c} 5 & -5 & 10 & 10 & -5 \\ 2 & 0 & 8 & 10 & 12 \\ 2 & 1 & 10 & 13 & 19 \\ 3 & -5 & 2 & 0 & -17 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 14 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 21 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -14 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Daraus lesen wir eine spezielle Lösung  $\xi$  sowie eine Basis  $b_1, b_2$  für den Lösungsraum des homogenen Systems ab, vgl. Satz 3.3.19:

$$\xi = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (93) ist daher

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Bezeichnet  $L$  den Lösungsraum des Systems (93), dann ist also

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow L, \quad \phi \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums. Auch ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum lässt sich ablesen:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +4x_3 & +5x_4 = 6 \\ x_2 & +2x_3 & +3x_4 = 7 \end{array}$$

BEISPIEL 3.3.24. Wir wollen alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & +x_2 & +6x_3 & +4x_4 & & +3x_6 & = & 5 \\ x_1 & +5x_2 & +10x_3 & -4x_4 & -4x_5 & -x_6 & = & 9 \\ 2x_1 & +2x_2 & +12x_3 & +8x_4 & +2x_5 & +12x_6 & = & 12 \\ -3x_1 & -3x_2 & -18x_3 & -12x_4 & +3x_5 & & = & -12 \end{array} \tag{94}$$

bestimmen. Mittels Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & -4 & -4 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 8 & 2 & 12 & 12 \\ -3 & -3 & -18 & -12 & 3 & 0 & -12 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 3 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 3 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Wir sehen daher bereits, dass das Gleichungssystem lösbar ist. Durch weitere Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Daraus lesen wir eine spezielle Lösung  $\xi$  sowie eine Basis  $b_1, b_2, b_3$  für den Lösungsraum des homogenen Systems ab, vgl. Satz 3.3.19:

$$\xi = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (94) ist daher

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}.$$

Bezeichnet  $L$  den Lösungsraum des Systems (94), dann ist also

$$\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow L, \quad \phi \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums. Auch ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum lässt sich ablesen:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +5x_3 & +6x_4 & & +x_6 & = & 3 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & & +2x_6 & = & 2 \\ & & 3 & & x_5 & +3x_6 & = & 1 \end{array}$$

Wollen wir die Inverse einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  berechnen, dann müssen wir also jene Matrix  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  bestimmen, für die  $AX = I_n$  gilt. Dies kann als lineares Gleichungssystem mit  $n^2$  vielen Gleichungen in den  $n^2$  vielen Eintragungen von  $X$  verstanden werden. Allerdings zerfällt dieses Gleichungssystem in  $n$  unabhängige Systeme, eines für jede Spalte von  $X$ , mit je  $n$  Gleichungen in  $n$  Unbekannten,

$$A \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = e_1, \quad A \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = e_2, \quad \dots \quad A \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = e_n. \quad (95)$$

Diese Systeme lassen sich bequem gleichzeitig mit folgendem Algorithmus lösen:

**SATZ 3.3.25** (Algorithmus zur Bestimmung der Inversen). *Ist  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine invertierbare  $(n \times n)$ -Matrix, dann kann die  $n \times (2n)$ -Matrix  $(A|I_n)$  durch elementare Zeilenumformungen auf die Gestalt  $(I_n|X)$  gebracht werden und es gilt  $A^{-1} = X$ .*

**BEWEIS.** Die Matrix  $A$  kann durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden, siehe Satz 3.3.6. Wegen der Invertierbarkeit von  $A$  ist  $\text{rank}(A) = n$ , also muss die reduzierte Zeilenstufenform mit der Einheitsmatrix  $I_n$  übereinstimmen. Wenn wir die selben Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix  $(A|I_n)$  an, erhalten wir also  $(A|I_n) \rightsquigarrow (I_n|X)$  für eine  $(n \times n)$ -Matrix  $X$ . Nach Satz 3.3.19 lösen die Spalten von  $X$  die Gleichungssysteme (95). Es gilt daher  $AX = I_n$ , also  $X = A^{-1}$ .  $\square$

**BEISPIEL 3.3.26.** Wir wollen die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Die Inverse von  $A$  ist daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

BEISPIEL 3.3.27. Wir wollen untersuchen, ob die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 \\ -x_3 + 2x_4 \end{pmatrix},$$

invertierbar ist und gegebenenfalls ihre Umkehrabbildung bestimmen. Wir versuchen daher, die Inverse der entsprechenden Matrix,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

zu bestimmen, siehe Proposition 3.1.26 und Bemerkung 3.1.30. Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1/5 & -2/5 & -8/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -2/5 & -9/5 & -6/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/5 & 6/5 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/5 & 6/5 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Somit ist  $A$  invertierbar mit inverser

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 3/5 & 6/5 & 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 & 6/5 & 3/5 \\ 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Umkehrabbildung von  $\varphi$  ist daher

$$\varphi^{-1}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \varphi^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

### 3.4. Determinante und Eigenwerte.

DEFINITION 3.4.1. Unter der *Determinante* einer  $(3 \times 3)$ -Matrix verstehen wir die Zahl

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Diese Formel wird als *Regel von Sarrus* bezeichnet.

BEISPIEL 3.4.2.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 9 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 7 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

BEMERKUNG 3.4.3 (Entwicklung nach erster Zeile und Spalte). Die Regel von Sarrus lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

BEMERKUNG 3.4.4 (Determinante von Dreiecksmatrizen). Für Dreiecksmatrizen gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt für die Determinante der Einheitsmatrix:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

LEMMA 3.4.5 (Eigenschaften der Determinante).

(a) Die Determinante ist linear in jeder Spalte, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \det(u + u', v, w) &= \det(u, v, w) + \det(u', v, w), & \det(\lambda u, v, w) &= \lambda \det(u, v, w), \\ \det(u, v + v', w) &= \det(u, v, w) + \det(u, v', w), & \det(u, \lambda v, w) &= \lambda \det(u, v, w), \\ \det(u, v, w + w') &= \det(u, v, w) + \det(u, v, w'), & \det(u, v, \lambda w) &= \lambda \det(u, v, w). \end{aligned}$$

für alle  $u, u', v, v', w, w' \in \mathbb{R}^3$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (Multilinearität)

(b) Bei Vertauschung zweier Spalten ändert die Determinante das Vorzeichen, d.h.

$$-\det(u, v, w) = \det(v, u, w) = \det(w, v, u) = \det(u, w, v)$$

für alle  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ . (Schiefsymmetrie)

(c) Stimmen zwei Spalten einer Matrix überein, dann verschwindet ihre Determinante.

(d) Bei Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte bleibt die Determinante unverändert.

(e) Die Determinante ist linear in jeder Zeile.

(f) Bei Vertauschung zweier Zeilen ändert die Determinante ihr Vorzeichen.

(g) Stimmen zwei Zeilen einer Matrix überein dann verschwindet ihre Determinante.

(h) Bei Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile bleibt die Determinante unverändert.

(i)  $\det(I_3) = 1$ . (Normierung durch Einheitsmatrix)

(j) Ist  $\delta$  eine Abbildung, die jeder  $(3 \times 3)$ -Matrix  $A$  eine Zahl  $\delta(A)$  so zuordnet, dass (a) und (b) erfüllt sind, dann gilt  $\delta(A) = \det(A)\delta(I_3)$  für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

(k) Die Determinante ist durch die Eigenschaften (a), (b) und (i) eindeutig charakterisiert.

BEWEIS. Die Eigenschaften in (a) und (b) folgen unmittelbar aus der Definition bzw. der Formel in Bemerkung 3.4.3. Die Aussage in (c) folgt sofort aus (b). Die Eigenschaft (d) ist eine Konsequenz von (a) und (c), denn

$$\det(u, v + \lambda u, w) = \det(u, v, w) + \lambda \det(u, u, w) = \det(u, v, w),$$

und analog für andere Spalten. Die Eigenschaften (e) bis (h) lassen sich analog verifizieren. Die Determinante der Einheitsmatrix haben wir bereits in Bemerkung 3.4.4 berechnet.

Sei nun  $\delta$  wie in (j). Wie zuvor folgt aus (b), dass  $\delta$  auch die Eigenschaft (c) besitzt. Wir schreiben die Spalten einer Matrix mit Hilfe der Einheitsvektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 a_{i1} e_i, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 a_{j2} e_j, \quad \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^3 a_{k3} e_k,$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\delta \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \delta \left( \sum_{i=1}^3 a_{i1} e_i, \sum_{j=1}^3 a_{j2} e_j, \sum_{k=1}^3 a_{k3} e_k \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{i1} a_{j2} a_{k3} \cdot \delta(e_i, e_j, e_k) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i, j, k \leq 3 \\ \text{alle verschieden}}} a_{i1} a_{j2} a_{k3} \cdot \delta(e_i, e_j, e_k) \\
&= a_{11} a_{22} a_{33} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) + a_{21} a_{32} a_{13} \cdot \delta(e_2, e_3, e_1) + a_{31} a_{12} a_{23} \cdot \delta(e_3, e_1, e_2) \\
&\quad + a_{11} a_{32} a_{23} \cdot \delta(e_1, e_3, e_2) + a_{21} a_{12} a_{33} \cdot \delta(e_2, e_1, e_3) + a_{31} a_{22} a_{13} \cdot \delta(e_3, e_2, e_1) \\
&= a_{11} a_{22} a_{33} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) + a_{21} a_{32} a_{13} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) + a_{31} a_{12} a_{23} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) \\
&\quad - a_{11} a_{32} a_{23} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) - a_{21} a_{12} a_{33} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) - a_{31} a_{22} a_{13} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) \\
&= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \delta(I_3)
\end{aligned}$$

Dies zeigt (j). Die Aussage (k) folgt unmittelbar aus (j).  $\square$

**BEMERKUNG 3.4.6** (Determinante und Volumen). Analog zum 2-dimensionalen Fall in Bemerkung 2.5.12 ist das orientierte Volumen eines von drei Vektoren  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  aufgespannten Parallelepipeds durch die Determinante  $\det(u, v, w)$  gegeben. Um dies einzusehen, bezeichne  $\delta(u, v, w)$  das orientierte Volumen dieses Parallelepipeds, d.h. des Parallelepipeds mit den Eckpunkten  $0, u, v, w, u + v, u + w, v + w, u + v + w$ . Offensichtlich gilt  $\delta(I_3) = 1$ , denn der Einheitswürfel hat Volumen 1. Eine einfache elementargeometrische Überlegung zeigt, dass  $\delta(u, v, w)$  linear in den Spalten ist. Da wir das orientierte Volumen betrachten, ändert  $\delta(u, v, w)$  das Vorzeichen, wenn zwei der drei Vektoren vertauscht werden. Nach Lemma 2.5.3(g) muss daher  $\delta(u, v, w) = \det(u, v, w)$  gelten, die Determinante  $\det(u, v, w)$  berechnet also das orientierte Volumen des von  $u, v, w$  aufgespannten Parallelepipeds.

**BEMERKUNG 3.4.7** (Berechnung mittels Zeilenumformungen). Nach Lemma 2.5.3 kann die Determinante durch Zeilenumformungen bestimmt werden. Beispielsweise gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$

wobei wir im letzten Schritt Bemerkung 3.4.4 verwendet haben. Beim Vertauschen zweier Zeilen und bei Multiplikation einzelner Zeilen müssen wir den Faktor verbuchen. Etwa gilt:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 14 \end{pmatrix} &= -\det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \\ 3 & -1 & 14 \end{pmatrix} = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 3 & -1 & 14 \end{pmatrix} = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \\
&= -2 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = -6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -6 \cdot 2 = -12.
\end{aligned}$$



SATZ 3.4.8. Für je zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gilt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B). \quad (96)$$

Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(A) \neq 0$ . In diesem Fall gilt

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

BEWEIS. Wir fixieren  $A$  und betrachten die Abbildung  $\delta$ , die jeder  $(3 \times 3)$ -Matrix  $B$  die Zahl  $\delta(B) := \det(AB)$  zuordnet. Bezeichnen wir die Spalten von  $B$  mit  $B = (u, v, w)$ , dann ist  $AB = (Au, Av, Aw)$  und daher  $\delta(B) = \det(AB) = \det(Au, Av, Aw)$ . Da die Determinante linear und schiefsymmetrisch in den Spalten ist, ist daher auch  $\delta(B)$  linear und schiefsymmetrisch in den Spalten von  $B$ . Mit Lemma 3.4.5(j) folgt  $\delta(B) = \det(B)\delta(I_3)$  und daher  $\det(AB) = \det(B)\det(A)$ . Damit ist (96) gezeigt. Ist  $A$  invertierbar, dann folgt daraus  $1 = \det(I_3) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ , also  $\det(A) \neq 0$  und  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ .

Sei nun  $A$  nicht invertierbar. Nach Bemerkung 3.2.63 sind die Spalten von  $A$  linear abhängig. Es existiert daher eine Spalte, die sich als Linearkombination der anderen beiden schreiben lässt. O.B.d.A. sei  $A$  von der Form  $A = (u, v, \lambda u + \mu v)$  für  $u, v \in \mathbb{R}^3$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Es folgt  $\det(A) = \lambda \det(u, v, u) + \mu \det(u, v, v) = 0$ . Dies zeigt, dass  $A$  genau dann invertierbar ist, wenn  $\det(A) \neq 0$  gilt.  $\square$

BEMERKUNG 3.4.9. Analog zu der Beschreibung von  $GL_2$  in Bemerkung 3.1.31 erhalten wir aus Satz 3.4.8 folgende Beschreibung der allgemeinen linearen Gruppe durch eine (nicht lineare) Ungleichung, siehe Bemerkung 3.1.29,

$$GL_3 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \det(A) \neq 0\}.$$

Die Determinante schränkt sich zu einem surjektiven Gruppenhomomorphismus,

$$\det: GL_3 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

ein, wobei  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit der Multiplikation des Körpers als (abelsche) Gruppe aufgefasst wird.

BEMERKUNG 3.4.10. Drei Vektoren  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  bilden genau dann eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  wenn  $\det(u, v, w) \neq 0$ . Dies folgt aus Satz 3.4.8 und Bemerkung 3.2.63.

BEISPIEL 3.4.11. Die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$  bilden eine Basis von  $\mathbb{R}^3$ , denn  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$ . Die Vektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$  bilden keine Basis von  $\mathbb{R}^3$ , denn  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 0$ . Die beiden Determinanten haben wir in Beispiel 3.4.2 berechnet.

Mit Hilfe von Determinanten lassen sich die Lösungen eines eindeutig lösbar Gleichungssystems explizit angeben:

SATZ 3.4.12 (Cramer'sche Regel). Sei  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  eine invertierbare Matrix und  $y \in \mathbb{R}^3$ . Dann besitzt das Gleichungssystem

$$Ax = y$$

eine eindeutige Lösung  $x \in \mathbb{R}^3$ , und für die Komponenten von  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  gilt

$$x_1 = \frac{\det(y, a_2, a_3)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(a_1, y, a_3)}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\det(a_1, a_2, y)}{\det(A)},$$

wobei  $A = (a_1, a_2, a_3)$  die Spalten von  $A$  bezeichnen.

BEWEIS. Da  $A$  invertierbar ist, existiert ein eindeutiges  $x \in \mathbb{R}^3$  mit  $Ax = y$ . Für die  $(3 \times 3)$ -Matrix  $X' = (x, e_2, e_3)$  gilt  $\det(X') = x_1$  und  $AX' = (Ax, Ae_2, Ae_3) = (y, a_2, a_3)$ . Mit (96) erhalten wir

$$\det(A)x_1 = \det(A) \det(X') = \det(AX') = \det(y, a_2, a_3).$$

Division durch  $\det(A)$  liefert die gewünschte Formel für die erste Komponente  $x_1$  der Lösung.

Betrachten wir die  $(3 \times 3)$ -Matrix  $X'' = (e_1, x, e_3)$ , erhalten wir analog  $\det(X'') = x_2$ ,  $AX'' = (Ae_1, x, Ae_3) = (a_1, y, a_3)$ ,

$$\det(A)x_2 = \det(A) \det(X'') = \det(AX'') = \det(a_1, y, a_3),$$

und daher die Formel für  $x_2$ . Für  $X''' = (e_1, e_2, x)$  schließlich gilt  $\det(X''') = x_3$ ,  $AX''' = (Ae_1, Ae_2, Ax) = (a_1, a_2, y)$ ,

$$\det(A)x_3 = \det(A) \det(X''') = \det(AX''') = \det(a_1, a_2, y),$$

und daher die Formel für  $x_3$ . □

BEISPIEL 3.4.13. Wir wollen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Cramer'schen Regel lösen. Dazu berechnen wir folgende Determinanten:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 - 10 - 45 + 1 + 4 = -53$$

$$\det(y|a_2|a_3) = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24 - 18 + 25 - 135 + 8 - 10 = -106$$

$$\det(a_1|y|a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 24 - 90 - 75 + 9 + 16 = -159$$

$$\det(a_1|a_2|y) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 27 + 30 - 16 - 72 - 5 + 36 = 0$$

Nach Satz 3.4.12 gilt daher

$$x = \frac{1}{-53} \begin{pmatrix} -106 \\ -159 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{97}$$

Zum Vergleich wollen wir dasselbe Gleichungssystem nochmals mit dem Eliminationsverfahren lösen:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 7 & 9 & 21 \\ 0 & -5 & -14 & -15 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 9/7 & 3 \\ 0 & -5 & -14 & -15 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 9/7 & 3 \\ 0 & 0 & -53/7 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 9/7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Wir erhalten so die selbe Lösung (97).

**BEMERKUNG 3.4.14.** Für die Inverse einer invertierbaren  $(3 \times 3)$ -Matrix erhalten wir (Übungen) aus der Cramer'schen Regel in Satz 3.4.12 folgende explizite Formel analog zu der Formel für invertierbare  $(2 \times 2)$ -Matrizen in Bemerkung 3.1.31:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir etwa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**BEMERKUNG 3.4.15.** Determinanten können für beliebig große quadratische Matrizen definiert werden. Etwa kann eine zur Formel in Bemerkung 3.4.3 analoge Beziehung verwendet werden, um die Determinante einer  $(n \times n)$ -Matrix rekursiv mit Hilfe der Determinanten von  $(n-1) \times (n-1)$ -Teilmatrizen zu definieren. Für  $(4 \times 4)$ -Matrizen liefert dies:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Induktiv lässt sich zeigen, dass die Determinante einer  $(n \times n)$ -Matrix linear und schiefsymmetrisch in den Spalten ist und für die Einheitsmatrix den Wert 1 liefert. Alle weiteren, oben besprochenen Eigenschaften der Determinante bleiben für beliebig große Matrizen richtig. Die Beweise waren so gewählt, dass sie sich in naheliegender Weise auf größere Matrizen verallgemeinern lassen. Insbesondere ist eine  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  genau dann invertierbar, wenn  $\det(A) \neq 0$  gilt. Große Determinanten lassen sich mit Zeilenumformungen effizient berechnen, vgl. Bemerkung 3.4.7.

**DEFINITION 3.4.16** (Eigenwerte und Eigenvektoren). Sei  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung. Ein Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  wird *Eigenwert* von  $\varphi$  genannt, falls ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  existiert, sodass  $v \neq 0$  und

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

In diesem Fall wird  $v$  als *Eigenvektor* zum Eigenwert  $\lambda$  bezeichnet, und

$$E_\lambda := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(v) = \lambda v\} = \ker(\varphi - \lambda \text{id})$$

wird der *Eigenraum* zum Eigenwert  $\lambda$  genannt.

Unter den Eigenwerten, Eigenvektoren und Eigenräumen einer quadratischen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  verstehen wir die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume der damit assoziierten linearen Abbildung  $\varphi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_A(v) = Av$ . Ein Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist also genau dann Eigenwert von  $A$ , wenn  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$  mit  $Av = \lambda v$  existiert. Der entsprechende Eigenraum von  $A$  ist  $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\} = \ker(A - \lambda I_n)$ .

**BEMERKUNG 3.4.17.** Beachte, dass Eigenräume lineare Teilräume von  $\mathbb{R}^n$  bilden. Auf diesen Teilräumen wirkt die lineare Abbildung (Matrix) einfach durch Multiplikation (Streckung) mit dem entsprechenden Eigenwert.

**PROPOSITION 3.4.18.** *Ein Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist genau dann Eigenwert einer quadratischen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , wenn  $\text{rank}(A - \lambda I_n) < n$  gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

**BEWEIS.** Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ ist Eigenwert von } A &\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v, v \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow \dim \ker(A - \lambda I_n) > 0 \\ &\Leftrightarrow \text{rank}(A - \lambda I_n) < n \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ ist nicht invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Bemerkungen 3.2.59 und 3.2.63 sowie Satz 3.4.8 bzw. Bemerkung 3.1.31 verwendet, siehe Bemerkung 3.4.15.  $\square$

**DEFINITION 3.4.19** (Charakteristisches Polynom). Unter dem charakteristischen Polynom einer quadratischen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  verstehen wir das Polynom  $\det(A - \lambda I_n)$ .

**BEMERKUNG 3.4.20.** Nach Proposition 3.4.18 sind die Eigenwerte einer Matrix gerade die (reellen) Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms. Da das charakteristische Polynom einer  $(n \times n)$ -Matrix Grad  $n$  hat, kann diese Matrix höchstens  $n$  verschiedene Eigenwerte

besitzen. In Lemma 3.4.26 unten werden wir einen anderen Beweis dieser Tatsache geben, der ohne Determinante auskommt.

BEISPIEL 3.4.21. Wir wollen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Aus Proposition 3.4.18 erhalten wir folgende Gleichung für die Eigenwerte:

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = (\lambda - 2)(\lambda - 4).$$

Die Matrix  $A$  hat daher genau zwei Eigenwerte,  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 4$ . Für die zugehörigen Eigenräume erhalten wir

$$E_{\lambda_1} = \ker(A - 2I_2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2} = \ker(A - 4I_2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  eine Basis aus Eigenvektoren bildet.

BEISPIEL 3.4.22. Wir wollen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Da

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 & -2 \\ 2 & 6 - \lambda & 4 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(6 - \lambda)(-\lambda) + 8 + 8 - 2(6 - \lambda) + 8(1 - \lambda) - 4\lambda \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \\ &= (2 - \lambda)^2(3 - \lambda) \end{aligned}$$

hat  $A$  genau zwei Eigenwerte,  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 3$ , siehe Proposition 3.4.18. Für die zugehörigen Eigenräume erhalten wir:

$$E_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1 I_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{\lambda_2} = \ker(A - \lambda_2 I_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  eine Basis aus Eigenvektoren bildet.

BEISPIEL 3.4.23. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

hat genau drei Eigenwerte, nämlich  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 5$  und  $\lambda_3 = 7$ . Für die Eigenräume gilt

$$E_3 = \text{span}(e_1), \quad E_5 = \text{span}(e_2), \quad E_7 = \text{span}(e_3).$$

Allgemeiner sind die Eigenwerte einer Diagonalmatrix gerade die (verschiedenen) Eintragungen entlang der Diagonale. Die Eigenräume werden von den entsprechenden Einheitsvektoren aufgespannt.

BEISPIEL 3.4.24. Wir wollen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Aus Proposition 3.4.18 erhalten wir folgende Gleichung für die Eigenwerte:

$$0 = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 5 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)^3.$$

Die Matrix  $A$  hat also nur einen Eigenwerte,  $\lambda_1 = 5$ . Der zugehörige Eigenraum ist

$$E_{\lambda_1} = \ker(A - 5I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diesmal erhalten wir keine Basis aus Eigenvektoren.

BEISPIEL 3.4.25. Wir wollen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Aus Proposition 3.4.18 erhalten wir folgende Gleichung für die Eigenwerte:

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Die Matrix  $A$  hat also keinen einzigen (reellen) Eigenwert.

LEMMA 3.4.26. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische Matrix,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  paarweise verschiedene Eigenwerte von  $A$  und  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  entsprechende Eigenvektoren, d.h.  $v_i \neq 0$  und  $Av_i = \lambda_i v_i$ , für  $i = 1, \dots, k$ . Dann sind die Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  linear unabhängig in  $\mathbb{R}^n$ . Insbesondere kann  $A$  höchstens  $n$  verschiedene Eigenwerte besitzen.

BEWEIS. Wir führen den Beweis durch Induktion nach  $k$ . Der Fall  $k = 1$  ist trivial, denn nach Voraussetzung gilt  $v_i \neq 0$ . Für den Induktionsschritt dürfen wir daher  $v_1, \dots, v_{k-1}$  als linear unabhängig voraussetzen. Seien nun  $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$  so, dass

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1} + \mu_k v_k = 0. \quad (98)$$

Wenden wir auf diese Gleichung  $A$  an, erhalten wir wegen  $Av_i = \lambda_i v_i$ ,

$$\mu_1 \lambda_1 v_1 + \mu_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \mu_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + \mu_k \lambda_k v_k = 0.$$

Subtrahieren wir davon  $\lambda_k$ -mal die Gleichung (98) folgt

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_k)v_2 + \cdots + \mu_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0.$$

Da  $v_1, \dots, v_{k-1}$  linear unabhängig sind, muss also

$$\mu_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0, \quad i = 1, \dots, k-1,$$

gelten. Nach Voraussetzung sind die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  paarweise verschieden, also  $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ , für  $i = 1, \dots, k-1$ . Wir erhalten somit

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{k-1} = 0.$$

Mit (98) folgt auch  $\mu_k v_k = 0$  und da  $v_k \neq 0$  schließlich  $\mu_k = 0$ . Dies zeigt, dass die Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  linear unabhängig sind. Mit Korollar 3.2.50 erhalten wir nun  $k \leq n$ .  $\square$

### 3.5. Isometrien der Ebene.

DEFINITION 3.5.1 (Isometrie). Unter einer Isometrie der Ebene verstehen wir eine abstandserhaltende Bijektion, d.h. eine Bijektion  $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , sodass

$$|\varphi(A)\varphi(B)| = |AB|$$

für je zwei Punkte  $A, B \in \mathcal{E}$  gilt. Isometrien werden auch als Bewegungen bezeichnet.

BEMERKUNG 3.5.2 (Gruppe der Isometrien). Die identische Abbildung ist eine Isometrie. Die Komposition zweier Isometrien ist eine Isometrie. Die Umkehrabbildung einer Isometrie ist eine Isometrie. Die Menge aller Isometrien bildet daher eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen.

BEMERKUNG 3.5.3 (Isometrien bewahren Winkel). Isometrien bilden Dreiecke auf kongruente Dreiecke ab, d.h. für jede Isometrie  $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  und jedes Dreieck  $ABC$  in  $\mathcal{E}$  sind die Dreiecke  $ABC$  und  $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)$  kongruent. Dies folgt aus Satz 1.4.17 (SSS). Insbesondere sind die Winkel  $\angle ABC$  und  $\angle \varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)$  kongruent. Isometrien sind daher winkelerhaltende Abbildungen.

Wir fixieren ein kartesisches Koordinatensystem und verwenden die damit assoziierte Koordinatenabbildung, um die Ebene  $\mathcal{E}$  mit  $\mathbb{R}^2$  zu identifizieren. Nach Satz 2.3.46 entsprechen die Isometrien genau den Abbildungen  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die

$$\|\varphi(w) - \varphi(v)\| = \|w - v\|$$

für alle  $v, w \in \mathbb{R}^2$  erfüllen. Wir werden diese Abbildungen als Isometrien von  $\mathbb{R}^2$  bezeichnen.

LEMMA 3.5.4. Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und  $b \in \mathbb{R}^2$ . Die Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(x) = Ax + b$ , ist genau dann eine Isometrie, wenn  $\|Av\| = \|v\|$  für alle  $v \in \mathbb{R}^2$  gilt.

BEWEIS. Da  $\varphi(y) - \varphi(x) = (Ay + b) - (Ax + b) = Ay - Ax = A(y - x)$  haben wir

$$\|\varphi(y) - \varphi(x)\| = \|A(y - x)\|$$

für beliebige  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Wir sehen daher, dass die Abbildung  $\varphi$  genau dann eine Isometrie ist, wenn  $\|A(y - x)\| = \|y - x\|$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^2$  gilt.  $\square$

LEMMA 3.5.5 (Orthogonale Matrizen). Für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  sind äquivalent:

- (a)  $\|Av\| = \|v\|$ , für alle  $v \in \mathbb{R}^2$ .
- (b)  $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$ , für alle  $v, w \in \mathbb{R}^2$ .

- (c) Die Spalten von  $A = (a_1, a_2)$  bilden eine Orthonormalbasis<sup>21</sup> von  $\mathbb{R}^2$ , d.h. es gilt  $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$  für alle  $1 \leq i, j \leq 2$ . In anderen Worten:  $\|a_1\| = 1 = \|a_2\|$  und  $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$ .
- (d) Die Matrix  $A$  ist von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

für einen Winkel  $\alpha$ .

In diesem Fall gilt  $\det(A) = \pm 1$  und  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  ist invertierbar mit orthogonaler

$$\text{Inverser } A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

BEWEIS. Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) folgt aus der Polarisierungsidentität

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2),$$

siehe Bemerkung 2.3.42, denn

$$\begin{aligned} \langle Av, Aw \rangle &= \frac{1}{2} (\|Av + Aw\|^2 - \|Av\|^2 - \|Aw\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|A(v + w)\|^2 - \|Av\|^2 - \|Aw\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2) \\ &= \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (a) ist trivial, denn aus (b) erhalten wir  $\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$  und dann (a) durch Wurzelziehen. Die Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) folgt durch Spezialisierung auf Einheitsvektoren,  $v = e_i$  und  $w = e_j$ , denn  $Ae_i = a_i$  und  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ . Die Implikation (c) $\Rightarrow$ (b) folgt aus der Linearität. Schreiben wir  $v = v_1e_1 + v_2e_2$  sowie  $w = w_1e_1 + w_2e_2$  mit  $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ , so folgt:

$$\begin{aligned} \langle Av, Aw \rangle &= \langle A(v_1e_1 + v_2e_2), A(w_1e_1 + w_2e_2) \rangle \\ &= v_1w_1 \langle Ae_1, Ae_1 \rangle + v_1w_2 \langle Ae_1, Ae_2 \rangle + v_2w_1 \langle Ae_2, Ae_1 \rangle + v_2w_2 \langle Ae_2, Ae_2 \rangle \\ &= v_1w_1 \underbrace{\langle a_1, a_1 \rangle}_{=1} + v_1w_2 \underbrace{\langle a_1, a_2 \rangle}_{=0} + v_2w_1 \underbrace{\langle a_2, a_1 \rangle}_{=0} + v_2w_2 \underbrace{\langle a_2, a_2 \rangle}_{=1} \\ &= v_1w_1 + v_2w_2 \\ &= \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

Nun zur Implikation (c) $\Rightarrow$ (d): Da  $\|a_1\| = 1$ , existiert ein Winkel  $\alpha$  mit  $a_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ . Aus

$\langle a_1, a_2 \rangle = 0$  und  $\|a_2\| = 1$  folgt dann  $a_2 = \pm \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$ . Die Implikation (d) $\Rightarrow$ (c) folgt aus der Formel  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , siehe Bemerkung 2.4.4. Die verbleibenden Behauptungen sind nun offensichtlich.  $\square$

DEFINITION 3.5.6 (Orthogonale Matrizen). Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  wird orthogonal genannt, falls  $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$  für alle  $v, w \in \mathbb{R}^2$  gilt.

<sup>21</sup>Siehe Bemerkung 3.5.8 unten.



**BEMERKUNG 3.5.7** (Gruppe der orthogonalen Matrizen). Die Einheitsmatrix  $I_2$  ist orthogonal, denn  $\langle I_2 v, I_2 w \rangle = \langle v, w \rangle$ . Sind  $A$  und  $B$  zwei orthogonale  $(2 \times 2)$ -Matrizen, dann ist auch ihr Produkt  $AB$  orthogonal, denn  $\langle ABv, ABw \rangle = \langle Bv, Bw \rangle = \langle v, w \rangle$ . Nach Lemma 3.5.5 sind orthogonale Matrizen invertierbar mit orthogonaler Inverser. Die Menge aller orthogonalen  $(2 \times 2)$ -Matrizen bildet daher ein Untergruppe von  $GL_2$ , die als orthogonale Gruppe bezeichnet und mit  $O_2$  notiert wird.

**BEMERKUNG 3.5.8** (Orthonormalbasen). Unter einer Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$  verstehen wir ein System von zwei Vektoren  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2$ , sodass  $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$ , für  $1 \leq i, j \leq 2$ . In anderen Worten, es soll  $\|b_1\| = 1 = \|b_2\|$  und  $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$  gelten. So ein System ist stets linear unabhängig und bildet daher eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ . Aus  $0 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$  folgt nämlich

$$0 = \langle b_1, 0 \rangle = \langle b_1, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle b_1, b_1 \rangle}_{=1} + \lambda_2 \underbrace{\langle b_1, b_2 \rangle}_{=0} = \lambda_1,$$

und durch Paaren mit  $b_2$  erhalten wir analog  $\lambda_2 = 0$ . Jeder Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  lässt sich daher in der Form  $v = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2$  schreiben, wobei  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ . Für die Koeffizienten erhalten wir

$$\langle b_1, v \rangle = \langle b_1, \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 \rangle = \mu_1 \underbrace{\langle b_1, b_1 \rangle}_{=1} + \mu_2 \underbrace{\langle b_1, b_2 \rangle}_{=0} = \mu_1$$

und analog

$$\langle b_2, v \rangle = \langle b_2, \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 \rangle = \mu_1 \underbrace{\langle b_2, b_1 \rangle}_{=0} + \mu_2 \underbrace{\langle b_2, b_2 \rangle}_{=1} = \mu_2.$$

Die Darstellung eines Vektors  $v \in \mathbb{R}^2$  in einer Orthonormalbasis  $b_1, b_2$  hat daher die Form:

$$v = \langle b_1, v \rangle b_1 + \langle b_2, v \rangle b_2. \quad (99)$$

**SATZ 3.5.9.** *Jede Isometrie  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist von der Form  $f(v) = Av + b$  für eine orthogonale  $(2 \times 2)$ -Matrix  $A$  und einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^2$ . Umgekehrt ist jede Abbildung dieser Form eine Isometrie.*

**BEWEIS.** Wir haben bereits gezeigt, dass jede Abbildung der Form  $v \mapsto Av + b$ , mit  $A$  orthogonal, eine Isometrie bildet, siehe Lemma 3.5.4 und 3.5.5.

Sei nun  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine beliebige Isometrie. Wir setzen  $b := f(0)$  und  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(v) := f(v) - b$ . Nach Voraussetzung an  $f$  gilt

$$\|\varphi(w) - \varphi(v)\| = \|w - v\|, \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^2, \quad (100)$$

denn  $\|\varphi(w) - \varphi(v)\| = \|f(w) - f(v)\| = \|w - v\|$ . Da  $\varphi(0) = 0$ , gilt daher auch

$$\|\varphi(v)\| = \|v\|, \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^2. \quad (101)$$

Die Polarisierungsidentität in Bemerkung 2.3.42 lässt sich in der Form

$$-2\langle v, w \rangle = \|w - v\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2,$$

schreiben, aus (100) und (101) erhalten wir daher

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle, \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^2, \quad (102)$$

denn  $-2\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \|\varphi(w) - \varphi(v)\|^2 - \|\varphi(v)\|^2 - \|\varphi(w)\|^2 = \|w - v\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 = -2\langle v, w \rangle$  nach (102). Die beiden Vektoren  $a_1 := \varphi(e_1)$  und  $a_2 := \varphi(e_2)$  bilden eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$ , denn mit (102) erhalten wir  $\langle a_i, a_j \rangle = \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ . Nach

Lemma 3.5.5 ist  $A := (a_1, a_2)$  eine orthogonale  $(2 \times 2)$ -Matrix. Mit (99) und (102) folgt:

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= \langle a_1, \varphi(v) \rangle a_1 + \langle a_2, \varphi(v) \rangle a_2 \\ &= \langle \varphi(e_1), \varphi(v) \rangle a_1 + \langle \varphi(e_2), \varphi(v) \rangle a_2 \\ &= \langle e_1, v \rangle a_1 + \langle e_2, v \rangle a_2 \\ &= Av.\end{aligned}$$

Somit hat  $f(v) = \varphi(v) + b = Av + b$  die gewünschte Form.  $\square$

**KOROLLAR 3.5.10.** *Isometrien bilden Geraden auf Geraden ab und bewahren das Teilverhältnis.*

**BEWEIS.** Nach Satz 3.5.9 ist jede Isometrie von der Form  $f(v) = Av + b$  für eine (orthogonale) Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und  $b \in \mathbb{R}^2$ . Seien nun  $P, Q, R$  drei verschiedene Punkte auf einer Geraden mit Teilverhältnis  $\frac{PQ}{QR} = \lambda$ . Nach Proposition 2.3.27 gilt  $Q - P = \lambda(R - Q)$ , also:

$$\begin{aligned}\varphi(Q) - \varphi(P) &= (AQ + b) - (AP + b) = A(Q - P) \\ &= \lambda A(R - Q) = \lambda((AR + b) - (AQ + b)) = \lambda(\varphi(R) - \varphi(Q)).\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass auch  $\varphi(P), \varphi(Q), \varphi(R)$  auf einer Geraden liegen und  $\frac{\varphi(P)\varphi(Q)}{\varphi(Q)\varphi(R)} = \lambda$ .  $\square$

**BEMERKUNG 3.5.11 (Translationen).** Für jedes  $b \in \mathbb{R}^2$  ist die Abbildung  $\tau_b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\tau_b(x) := x + b$ , eine Isometrie, siehe Satz 3.5.9. Diese Isometrien werden Translationen genannt. Beachte,  $\tau_b \circ \tau_{b'} = \tau_{b+b'}$ ,  $\tau_0 = \text{id}$  und  $\tau_b^{-1} = \tau_{-b}$  für je zwei  $b, b' \in \mathbb{R}^2$ . Sind  $P, Q \in \mathbb{R}^2$  dann existiert genau eine Translation, die  $P$  auf  $Q$  abbildet, nämlich  $\tau_b$  mit  $b = Q - P$ .

**BEMERKUNG 3.5.12 (Rotationen).** Für jeden Winkel  $\alpha$  betrachten wir die Matrix

$$R_\alpha := \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende lineare Abbildung  $\rho_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\rho_\alpha(v) := R_\alpha v$ , beschreibt eine Rotation um den Winkel  $\alpha$  mit Zentrum 0. Wegen der Linearität ist nämlich  $\rho_\alpha(0) = 0$ , nach Lemma 3.5.5 gilt weiters  $\|R_\alpha v\| = \|v\|$  und eine einfache Rechnung zeigt  $\langle v, R_\alpha v \rangle = \|v\|^2 \cos \alpha$ . Für  $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$  haben wir daher

$$\frac{\langle v, R_\alpha v \rangle}{\|v\| \|R_\alpha v\|} = \cos \alpha,$$

also schließen die Geraden  $g(0, v)$  und  $g(\rho_\alpha(0), \rho_\alpha(v)) = g(0, \rho_\alpha(v))$  den Winkel  $\alpha$  ein, vgl. Proposition 2.4.16. Aus den Additionstheoremen der Winkelfunktionen erhalten wir

$$R_\alpha R_\beta = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = R_{\alpha + \beta}$$

und daher auch, siehe Proposition 3.1.28(c),

$$\rho_{\alpha + \beta} = \rho_\alpha \circ \rho_\beta = \rho_\beta \circ \rho_\alpha, \quad \rho_0 = \text{id}, \quad \rho_\alpha^{-1} = \rho_{-\alpha}.$$

Für  $b \in \mathbb{R}^2$  ist  $\rho_{\alpha, b} := \tau_b \circ \rho_\alpha \circ \tau_b^{-1}$  eine Drehung um den Winkel  $\alpha$  mit Zentrum  $b$ .

BEMERKUNG 3.5.13 (Spiegelungen). Für jeden Winkel  $\alpha$  betrachten wir die Matrix

$$S_\alpha := R_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende lineare Abbildung  $\sigma_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\sigma_\alpha(v) := S_\alpha v$ , beschreibt eine orthogonale Spiegelung an der Geraden mit Richtungsvektor  $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$  durch den Ursprung. Für  $\alpha = 0$  ist dies offensichtlich, der allgemeine Fall folgt sofort aus der Relation  $\sigma_\alpha = \rho_\alpha \sigma_0 \rho_\alpha^{-1}$ , die wir aus dem ersten Ausdruck für  $S_\alpha$  erhalten. Die Vektoren  $b_1 := \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$  und  $b_2 := \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$  bilden eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren der Matrix  $S_\alpha$  mit entsprechenden Eigenwerten 1 und  $-1$ . Der Eigenraum zum Eigenwert 1, d.h.  $\text{span}(b_1)$ , bildet die Spiegelungssachse, ihre Punkte bleiben unter  $\sigma_\alpha$  unverändert. Der Eigenraum zum Eigenwert  $-1$ , d.h.  $\text{span}(b_2)$ , steht normal auf die Spiegelungssachse und ist invariant unter  $\sigma_\alpha$ , für seine Punkte  $v \in \text{span}(b_2)$  gilt  $\sigma_\alpha(v) = -v$ .

Aus  $S_0^2 = I_2$  und  $S_\alpha = R_\alpha S_0 R_\alpha^{-1}$  erhalten wir  $S_\alpha^2 = R_\alpha S_0 R_\alpha^{-1} R_\alpha S_0 R_\alpha^{-1} = R_\alpha S_0 S_0 R_\alpha^{-1} = R_\alpha R_\alpha^{-1} = I_2$  und daher

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha = \text{id} \quad \text{sowie} \quad \sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha.$$

Wegen  $S_0 R_\alpha^{-1} = R_\alpha S_0$  haben wir auch  $S_\beta S_\alpha = R_\beta S_0 R_\beta^{-1} R_\alpha S_0 R_\alpha^{-1} = R_{2\beta} S_0 S_0 R_{-2\alpha} = R_{2\beta} R_{-2\alpha} = R_{2(\beta-\alpha)}$  und daher

$$\sigma_\beta \circ \sigma_\alpha = \rho_{2(\beta-\alpha)}.$$

Jede Rotation mit Zentrum 0 lässt sich daher (auf vielfältige Weise) als Komposition von zwei Spiegelungen schreiben, etwa

$$\rho_\alpha = \sigma_{\alpha/2} \circ \sigma_0 = \sigma_\alpha \circ \sigma_{\alpha/2} = \sigma_{\alpha/4} \circ \sigma_{-\alpha/4}.$$

Für  $b \in \mathbb{R}^2$  ist  $\sigma_{\alpha,b} := \tau_b \circ \sigma_\alpha \circ \tau_b^{-1}$  eine orthogonale Spiegelung an der Geraden durch  $b$  mit Richtungsvektor  $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ .

BEMERKUNG 3.5.14. Auch Translationen lassen sich als Komposition von Spiegelungen schreiben. Sei dazu  $b \in \mathbb{R}^2$  und  $\alpha$  ein Winkel, sodass  $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$  normal auf  $b$  steht. Dann gilt  $S_\alpha b = -b$ , also  $S_\alpha(x - \lambda b) = S_\alpha x + \lambda b$  und daher  $\sigma_\alpha \circ \tau_{\lambda b}^{-1} = \tau_{\lambda b} \circ \sigma_\alpha$  für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Damit erhalten wir  $\sigma_{\alpha,\lambda b} \circ \sigma_{\alpha,\mu b} = \tau_{\lambda b} \circ \sigma_\alpha \circ \tau_{\lambda b}^{-1} \circ \tau_{\mu b} \circ \sigma_\alpha \circ \tau_{\mu b}^{-1} = \tau_{\lambda b} \circ \tau_{\lambda b} \circ \sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha \circ \tau_{\mu b}^{-1} \circ \tau_{\mu b}^{-1} = \tau_{2(\lambda-\mu)b}$ . Insbesondere lässt sich  $\tau_b$  wie folgt als Komposition zweier Spiegelungen schreiben:

$$\tau_b = \sigma_{\alpha,b/2} \circ \sigma_{\alpha,0} = \sigma_{\alpha,b} \circ \sigma_{\alpha,b/2} = \sigma_{\alpha,b/4} \circ \sigma_{\alpha,-b/4}.$$

BEMERKUNG 3.5.15. Jede Isometrie der Ebene lässt sich als Komposition von Spiegelungen schreiben. Dies folgt aus Satz 3.5.9 und den vorangehenden Bemerkungen.

SATZ 3.5.16. Sind  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei kongruente Dreiecke dann existiert genau einen Isometrie  $\varphi$  mit  $\varphi(A) = A'$ ,  $\varphi(B) = B'$  und  $\varphi(C) = C'$ .

BEWEIS. Es existiert eine Translation  $\tau$  mit  $\tau(A) = A'$ . Weiters existiert eine Rotation  $\rho$  mit Zentrum  $\rho(A') = A'$ , die den Halbstrahl  $(A'\tau(B))>$  auf den Halbstrahl  $(A'B')>$  abbildet. Da  $\|\tau(B) - A'\| = \|\tau(B) - \tau(A)\| = \|B - A\| = \|B' - A'\|$  folgt  $\rho(\tau(B)) = B'$ . Somit ist

$\varphi := \rho \circ \tau$  eine Isometrie mit  $\varphi(A) = A'$  und  $\varphi(B) = B'$ . Gegebenenfalls können wir durch Komposition mit der Spiegelung an der Achse  $g(A', B')$  darüber hinaus erreichen, dass  $\varphi(C)$  und  $C'$  auf derselben Seite der Geraden  $g(A', B')$  liegen. Da die Dreiecke  $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)$  und  $A'B'C'$  kongruent sind, folgt schließlich auch  $\varphi(C) = C'$ .

Seien nun  $\varphi$  und  $\psi$  zwei Isometrien mit  $\varphi(A) = A' = \psi(A)$ ,  $\varphi(B) = B' = \psi(B)$  und  $\varphi(C) = C' = \psi(C)$ . Dann ist  $f := \psi^{-1} \circ \varphi$  eine Isometrie, mit  $f(A) = A$ ,  $f(B) = B$  und  $f(C) = C$ . Nach Satz 3.5.9 existieren  $R \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und  $b \in \mathbb{R}^2$ , sodass  $f(v) = Rv + b$ . Somit  $f(w) - f(v) = (Rw + b) - (Rv + b) = R(w - v)$  und insbesondere  $R(B - A) = B - A$  sowie  $R(C - A) = C - A$ . Da die Punkte  $A, B, C$  nicht auf einer Geraden liegen, sind  $B - A$  und  $C - A$  linear unabhängig, bilden also eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ . Da sich jeder Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  als Linearkombination von  $B - A$  und  $C - A$  schreiben lässt, folgt  $Rv = v$  für alle  $v \in \mathbb{R}^2$ . Wir erhalten  $R = I_2$ , also  $f(v) = v + b$ . Aus  $A = f(A) = A + b$  folgt schließlich auch  $b = 0$ . Dies zeigt  $f = \text{id}$ , und daher  $\varphi = \psi$ .  $\square$

LEMMA 3.5.17. *Eine symmetrische Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  besitzt stets eine Orthonormalbasis  $b_1, b_2$  aus Eigenvektoren. Es ist daher  $R := (b_1, b_2)$  eine orthogonale Matrix, für die*

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (103)$$

gilt, wobei  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Eigenwerte zu  $b_1$  und  $b_2$  bezeichnen.<sup>22</sup>

BEWEIS. Nach Proposition 3.4.18 gilt für die Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2,$$

also

$$\lambda = \frac{a + c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a - c)^2}{4} + b^2}.$$

Beachte, dass der Radikand nicht negativ ist. Der Radikand kann nur Null sein, wenn  $a = c$  und  $b = 0$  gilt, d.h. wenn  $A$  ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist. In diesem Fall ist jeder Vektor Eigenvektor und daher jede Orthonormalbasis eine Basis aus Eigenvektoren.

O.B.d.A. sei der Radikand daher größer als Null. Dann existieren zwei verschiedene reelle Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Seien  $b_1$  und  $b_2$  normierte Eigenvektoren, d.h.  $Ab_1 = \lambda_1 b_1$ ,  $Ab_2 = \lambda_2 b_2$  und  $\|b_1\| = 1 = \|b_2\|$ . Aus der Symmetrie von  $A$  folgt durch eine einfache Rechnung  $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ , für alle  $v, w \in \mathbb{R}^2$ . Wir erhalten

$$\lambda_1 \langle b_1, b_2 \rangle = \langle \lambda_1 b_1, b_2 \rangle = \langle Ab_1, b_2 \rangle = \langle b_1, Ab_2 \rangle = \langle b_1, \lambda_2 b_2 \rangle = \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle,$$

also  $(\lambda_2 - \lambda_1)\langle b_1, b_2 \rangle = 0$  und daher  $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$ . Somit ist  $b_1, b_2$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von  $A$ . Nach Lemma 3.5.5 ist die Matrix  $R := (b_1, b_2)$  daher orthogonal. Nach Konstruktion gilt also

$$AR = A(b_1, b_2) = (Ab_1, Ab_2) = (\lambda_1 b_1, \lambda_2 b_2) = (b_1, b_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

also (103).  $\square$

<sup>22</sup>Ersetzen wir gegebenenfalls  $b_2$  durch  $-b_2$ , so können wir darüber hinaus  $\det(R) = 1$  erreichen, dann ist  $R$  also eine Rotationsmatrix, siehe Lemma 3.5.5.

DEFINITION 3.5.18 (Quadratische Funktionen). Unter einem quadratischen Polynom auf  $\mathbb{R}^2$  verstehen wir eine Abbildung  $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  der Form

$$q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

mit Koeffizienten  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ . Unter einer (degenerierten) Quadrik in  $\mathbb{R}^2$  verstehen wir die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms.

BEISPIEL 3.5.19. Kegelschnitte sind Quadriken:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 &= 1 && \text{Ellipse in Hauptlage, } a, b > 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 &= 1 && \text{Hyperbel in Hauptlage, } a, b > 0 \\ x^2 &= 2py && \text{Parabel in Hauptlage, } p > 0 \end{aligned}$$

Auch degeneriertere Kurven treten als Quadriken auf:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= -1 && \text{keine Lösung} \\ x^2 + y^2 &= 0 && \text{nur ein Punkt} \\ x^2 - y^2 &= 0 && \text{zwei sich schneidene Geraden} \\ x^2 &= 1 && \text{zwei parallele Geraden} \\ x^2 &= 0 && \text{eine Gerade} \\ 0 &= 0 && \text{ganze Ebene} \end{aligned}$$

Bei der Quadrik

$$29x^2 + 24xy + 36y^2 + 10x - 120y = 55$$

ist zunächst völlig unklar, um welchen Typ es sich handelt. Wir werden sie in Beispiel 3.5.21 unten diskutieren.

LEMMA 3.5.20. Zu jedem quadratischen Polynom

$$q = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

existiert eine Rotationsmatrix  $R$ , sodass die Substitution  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  das Polynom auf folgende Form ohne gemischte Terme bringt

$$q = a'(x')^2 + c'(y')^2 + d'x' + e'y' + f',$$

wobei  $a', b', c', d', e' \in \mathbb{R}$  und  $f' = f$ .

BEWEIS. Nach Lemma 3.5.17 existiert eine Rotationsmatrix  $R$  mit

$$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} R = R \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}.$$

Für den quadratischen Teil erhalten wir:

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = a'(x')^2 + c'(y')^2. \end{aligned}$$

Da die Substitution den linearen Teil von  $q$  wieder auf einen linearen Ausdruck transformiert, folgt das Lemma.  $\square$

BEISPIEL 3.5.21. Wir wollen folgende Quadrik untersuchen:

$$29x^2 + 24xy + 36y^2 + 10x - 120y = 55. \quad (104)$$

Um die gemischten Terme zu eliminieren, gehen wir wie in Lemma 3.5.20 vor und bestimmen die Eigenwerte der Matrix  $\begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 36 \end{pmatrix}$ , die den quadratischen Termen entspricht. Nach Proposition 3.4.18 sind die Eigenwerte Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 29 - \lambda & 12 \\ 12 & 36 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 65\lambda + 900.$$

Durch Lösen der quadratischen Gleichung erhalten wir die beiden Eigenwerte

$$\lambda_1 = 45 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 20.$$

Wir bestimmen den Eigenraum zu  $\lambda_1 = 45$ :

$$\ker \begin{pmatrix} 29 - \lambda_1 & 12 \\ 12 & 36 - \lambda_1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die diagonalisierende Rotationsmatrix ist daher  $R = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ . Substituieren wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad x = \frac{3x' - 4y'}{5}, \quad y = \frac{4x' + 3y'}{5}, \quad (105)$$

in (104), erhalten wir nach einer Rechnung:

$$45(x')^2 + 20(y')^2 - 90x' - 80y' = 55$$

oder äquivalent, nach Division durch 5:

$$9(x')^2 + 4(y')^2 - 18x' - 16y' = 11.$$

Durch ergänzen der Quadrate können wir auch den linearen Teil eliminieren:

$$9(x' - 1)^2 + 4(y' - 2)^2 = 36.$$

Die Substitution (Translation)

$$x'' = x' - 1, \quad y'' = y' - 2 \quad (106)$$

bringt die Quadrik daher in die Form

$$9(x'')^2 + 4(y'')^2 = 36$$

oder äquivalent, nach Division durch 36:

$$\left(\frac{x''}{2}\right)^2 + \left(\frac{y''}{3}\right)^2 = 1. \quad (107)$$

Dies ist eine Ellipse in Hauptlage mit Halbachsen 2 und 3. Durch eine Bewegung, nämlich die Komposition der Rotation (105) mit der Translation (106), kann die ursprüngliche Quadrik auf diese Ellipse in Hauptlage abgebildet werden. Diese Transformation wird als *Hauptachsentransformation* bezeichnet. Bei der ursprünglichen Quadrik (104) handelt es sich daher ebenfalls um eine Ellipse mit Halbachsen 2 und 3. Der Mittelpunkt von (107) ist  $M'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Mit den Substitutionen (105) und (110) erhalten wir den Mittelpunkt der ursprünglichen Ellipse in (104),  $M = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Die beiden Achsen der Ellipse (107) sind durch  $x'' = 0$  bzw.  $y'' = 0$  gegeben. Die Achsen der ursprünglichen Ellipse sind daher durch  $3x + 4y = 5$  bzw.  $-4x + 3y = 10$  beschrieben. Dabei haben wir die inverse Substitution zu (105) verwendet, sie ist durch die inverse Rotationsmatrix gegeben und lautet:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad x' = \frac{3x + 4y}{5}, \quad y' = \frac{-4x + 3y}{5}.$$

Die Scheitel der Ellipse (107) lauten

$$S_1'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad S_2'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad S_3'' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_4'' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Scheitel der ursprünglichen Ellipse erhalten wir

$$S_1 = \begin{pmatrix} -17/5 \\ 19/5 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 18/5 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} -11/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}.$$

BEISPIEL 3.5.22. Wir wollen folgende Quadrik untersuchen:

$$-119x^2 + 240xy + 119y^2 - 572x - 494y = -338. \quad (108)$$

Um die gemischten Terme zu eliminieren, gehen wir wie in Lemma 3.5.20 vor und bestimmen die Eigenwerte der Matrix  $\begin{pmatrix} -119 & 120 \\ 120 & 119 \end{pmatrix}$ , die den quadratischen Termen entspricht. Nach Proposition 3.4.18 sind die Eigenwerte Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 = \det \begin{pmatrix} -119 - \lambda & 120 \\ 120 & 119 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 28561.$$

Durch Lösen der quadratischen Gleichung erhalten wir die beiden Eigenwerte

$$\lambda_1 = 169 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -169.$$

Wir bestimmen den Eigenraum zu  $\lambda_1 = 169$ :

$$\ker \begin{pmatrix} -119 - \lambda_1 & 120 \\ 120 & 119 - \lambda_1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -288 & 120 \\ 120 & -50 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Die diagonalisierende Rotationsmatrix ist daher  $R = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ . Substituieren wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad x = \frac{5x' - 12y'}{13}, \quad y = \frac{12x' + 5y'}{13}, \quad (109)$$

in (108), erhalten wir nach einer Rechnung:

$$169(x')^2 - 169(y')^2 - 676x' + 338y' = -338$$

oder äquivalent, nach Division durch 169:

$$(x')^2 - (y')^2 - 4x' + 2y' = -2.$$

Durch Ergänzen der Quadrate können wir auch den linearen Teil eliminieren:

$$(x' - 2)^2 - (y' - 1)^2 = 1.$$

Die Substitution (Translation)

$$x'' = x' - 2, \quad y'' = y' - 1 \quad (110)$$

bringt die Quadrik daher in die Form

$$(x'')^2 - (y'')^2 = 1. \quad (111)$$

Dies ist eine Hyperbel in Hauptlage. Durch eine Bewegung, nämlich die Komposition der Rotation (109) mit der Translation (110), kann die ursprüngliche Quadrik auf diese Hyperbel in Hauptlage abgebildet werden. Bei der ursprüngliche Quadrik (108) handelt es sich daher ebenfalls um eine Hyperbel. Die Hyperbel (111) hat Mittelpunkt  $M'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Mit den Substitutionen (109) und (110) erhalten wir den Mittelpunkt  $M = \begin{pmatrix} -2/13 \\ 29/13 \end{pmatrix}$  der ursprünglichen Quadrik in (108). Die beiden Achsen von (111) sind durch  $x'' = 0$  bzw.  $y'' = 0$  gegeben. Mit den Substitutionen (109) und (110) erhalten wir die Achsen der Hyperbel in (108), sie sind durch  $5x + 12y = 26$  bzw.  $-12x + 5y = 13$  gegeben. Dabei haben wir die inverse Substitution von (109) verwendet, sie ist durch die inverse Rotationsmatrix gegeben und lautet:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad x' = \frac{5x + 12y}{13}, \quad y' = \frac{-12x + 5y}{13}.$$

Die beiden Scheitel der Hyperbel (111) sind  $S_1'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $S_1'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Für die beiden Scheitel von (108) erhalten wir  $S_1 = \begin{pmatrix} 3/13 \\ 41/13 \end{pmatrix}$  und  $S_1 = \begin{pmatrix} -7/13 \\ 17/13 \end{pmatrix}$ . Ebenso lassen sich die Asymptoten und Brennpunkte der Hyperbel in (108) bestimmen.

BEISPIEL 3.5.23. Wir wollen folgende Quadrik untersuchen:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 5\sqrt{2}x - 7\sqrt{2}y = -22. \quad (112)$$

Um die gemischten Terme zu eliminieren, gehen wir wie in Lemma 3.5.20 vor und bestimmen die Eigenwerte der Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , die den quadratischen Termen entspricht. Nach



Proposition 3.4.18 sind die Eigenwerte Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda.$$

Lösen der quadratischen Gleichung liefert die beiden Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 0.$$

Wir bestimmen den Eigenraum zu  $\lambda_1 = 1$ :

$$\ker \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die diagonalisierende Rotationsmatrix ist daher  $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Substituieren wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \quad (113)$$

in (112), erhalten wir nach einer Rechnung:

$$2(x')^2 - 12x' - 2y' = -22$$

oder äquivalent

$$(x')^2 - 6x' - y' = -11.$$

Durch Ergänzen der Quadrate können wir einen linearen Term und die Konstante eliminieren:

$$(x' - 3)^2 = y' - 2.$$

Die Substitution (Translation)

$$x'' = x' - 3, \quad y'' = y' - 2 \quad (114)$$

bringt die Quadrik daher in die Form

$$(x'')^2 = y''. \quad (115)$$

Dies ist eine Parabel in Hauptlage. Durch eine Bewegung, nämlich die Komposition der Rotation (113) mit der Translation (114), kann die ursprüngliche Quadrik auf diese Parabel in Hauptlage abgebildet werden. Bei der ursprüngliche Quadrik (108) handelt es sich daher ebenfalls um eine Parabel. Wie zuvor, können der Scheitel, die Achse, die Leitlinie und der Brennpunkt der ursprünglichen Parabel (112) sofort aus den entsprechenden Elementen der Parabel in (115) mit Hilfe der Transformationen in (113) und (114) bestimmt werden.