UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
Département de Mathématique
INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Unité associée au C.N.R.S., n° 1
STRASBOURG

SÉMINAIRE LOTHARINGIEN DE COMBINATOIRE

(Bayreuth, Erlangen, Strasbourg)

28e Session : 15–18 mars 1992, Saint-Nabor, Ottrott

Actes du séminaire édités par

Jiang ZENG

A.M.S. Subject Classification (1991) 05A15 05A30 05A19 05C05 05C05 05C30 05E35 33C20 33D15

Mots clefs : Partitions, permutations, fonctions de Schur, fonctions symétriques, déterminants de Hankel, q-analogues, moments, polynômes de Witt, tableaux semi-standard, sommations hypergéométriques, identités de caractères, evolutionary trees, chemins de Motzkin

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

La 28ième session du Séminaire Lotharingien a eu lieu du 15 mars 1992 au 18 mars 1992 au Domaine Saint-Jaques, Saint-Nabore, Ottrott. Il y avait soixantaine de participants.

Parmis les sujets classiques du Séminaire Lotharingien, cette session a été notamment marquée par les deux sujets principaux : les fonctions symétriques et q-analoques des polynômes classiques.

Sur le premier sujet, nous avons eu les conférences principales de LASSALLE sur "Formules de Pieri et formule du binôme généralisées " ainsi que celle de MACDONALD intitulée "Schur functions : theme and variations " et celle de SCHÜTZENBERGER sur le tableaux de Young. Nous devons à MACDONALD d'avoir accepté de rédiger sa note de conférence pour les actes du séminaire.

Sur le second sujet, on a eu les conférences données respectivement par DE MÉDICIS et STANTON sur les q-analogues de polynômes de Laguerre et celle de DULUCQ sur un q-analogue de polynômes de Bessel.

Pour terminer, je tient à remercier tous les participants qui ont rendu cette rencontre agréable et fructueuse. En particulier, je voudrais remercier DOMINIQUE FOATA qui m'a aidé tout au long de ce séminaire ainsi que dans l'édition de ce recueil.

Jiang ZENG,
Département de mathématique,
Université Louis Pasteur,
7, rue René-Descartes,
F-67084 Strasbourg.
email : a18643@frccsc21.bitnet

Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1992, 498/S–28
Actes 28^e Séminaire Lotharingien, p. 5-39

SCHUR FUNCTIONS : THEME AND VARIATIONS

BY

I. G. MACDONALD

Introduction and theme

In this article we shall survey various generalizations, analogues and deformations of Schur functions — some old, some new — that have been proposed at various times. We shall present these as a sequence of variations on a theme and (unlike e.g. Bourbaki) we shall proceed from the particular to the general. Thus Variations 1 and 2 are included in Variation 3; Variations 4 and 5 are particular cases of Variation 6; and in their turn Variations 6, 7 and 8 (in part) are included in Variation 9.

To introduce our theme, we recall [M_1, Ch. I, § 3] that the *Schur function* $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ (where $x_1, \ldots, x_n$ are independent indeterminates and $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ is a partition of length $\leq n$) may be defined as the quotient of two alternants :

$$(0.1) \qquad s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\det\left(x_i^{\lambda_j+n-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}}{\det\left(x_i^{n-j}\right)_{1\leq i,j\leq n}}.$$

The denominator on the right-hand side is the Vandermonde determinant, equal to the product $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$.

When $\lambda = (r)$, s_λ is the *complete symmetric function* h_r, and when $\lambda = (1^r)$, s_λ is the *elementary symmetric function* e_r. In terms of the h's, the Schur function s_λ (in any number of variables) is given by the Jacobi-Trudi formula

$$(0.2) \qquad s_\lambda = \det\left(h_{\lambda_i - i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Dually, in terms of the elementary symmetric functions, s_λ is given by the Nägelsbach-Kostka formula

$$(0.3) \qquad s_\lambda = \det\left(e_{\lambda'_i - i+j}\right)_{1\leq i,j\leq m}$$