Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1992, 498/S-28
Actes 28$^e$ Séminaire Lotharingien, p. 115-122

# Déterminants de Hankel et théorème de Sylvester

Christian Radoux, Université de Mons

1. Un déterminant de la forme

$$\text{dét}(a_{i+j})_{i,j=1,\dots,n}$$

est dit *"de Hankel"*.
Outre l'intérêt esthétique que présente souvent l'étude de tels déterminants, il convient de noter qu'ils surgissent très spontanément dans de nombreuses questions.
Par exemple [1] :
Soit la série formelle

$$f(X) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m \quad ,$$

à coefficients $a_m$ dans un champ $K$.
Pour que $f(X)$ soit une fraction rationnelle, il faut et il suffit qu'il existe $n$ tel que, pour tout $k$ assez grand,

$$\text{dét}(a_{k+i+j})_{i,j=0,1,\dots,n} = 0 \quad .$$

2. Voici un *autre exemple*.
Dans [6], on démontre que, si la suite $(B_n)$ des nombres de Bell, réduite modulo $p$ premier, est de période $k_p$ maximum, c'est-à-dire de période $k_p = \frac{p^p-1}{p-1}$, alors il existe à l'intérieur de cette période

- une et une seule $(p-1)$-séquence nulle :

$$B_{a_p} \equiv B_{a_p+1} \equiv \cdots \equiv B_{a_p+p-2} \equiv 0 \pmod p \quad , \tag{1}$$

avec

$$a_p = \frac{p+(p-2)k_p}{p-1} \tag{2}$$

- une et une seule $p$-séquence constante :

$$B_{b_p} \equiv B_{b_p+1} \equiv \cdots \equiv B_{b_p+p-1} \equiv c_p \pmod p \quad , \tag{3}$$

avec

$$b_p = a_p + \frac{k_p - 1}{p} \quad . \tag{4}$$

N.B. En fait, dans [5], J.W. Layman démontre que l'existence et l'unicité de la $(p-1)$-séquence nulle est assurée même si la période n'est pas maximale.

Se pose donc le problème de la détermination de $c_p \equiv B_{b_p}$.

Appelons $\vec{V_i}$ le vecteur colonne $\begin{pmatrix} B_i \\ B_{i+1} \\ \vdots \\ B_{i+p-1} \end{pmatrix}$ et posons

$$D_{p,i} = \text{dét}(\vec{V_i}, \vec{V}_{i+1}, \ldots, \vec{V}_{i+p-1}) \tag{5}$$

Sachant [2] que

$$B_{n+p} \equiv B_{n+1} + B_n \pmod p \quad , \tag{6}$$

on voit tout de suite que

$$D_{p,i+1} \equiv D_{p,i} \pmod p \quad . \tag{7}$$

En d'autres termes $D_{p,i}$ est indépendant de $i$ :

$$\forall i \text{ , } D_{p,i} \equiv D_p \pmod p \tag{8}$$

Sachant en outre [2] que

$$B_{np} \equiv B_{n+1} \pmod p \quad , \tag{9}$$

on peut récrire (3) comme suit :

$$B_{(b_p-1)p} \equiv B_{b_p p} \equiv \cdots \equiv B_{(b_p+p-2)p} \equiv c_p \pmod p \tag{10}$$

Soustrayons deux à deux les termes consécutifs, en utilisant à nouveau (6). Il vient

$$B_{(b_p-1)p+1} \equiv B_{b_p p+1} \equiv \cdots \equiv B_{(b_p+p-3)p+1} \equiv 0 \pmod p \tag{11}$$

En réitérant cette opération, on obtient :

$$B_{(b_p-1)p+2} \equiv B_{b_p p+2} \equiv \cdots \equiv B_{(b_p+p-4)p+2} \equiv 0 \pmod p \tag{12}$$

et ainsi de suite.
En regardant le tableau ainsi engendré, on voit que la matrice $M$, d'élément

$$M_{i,j} = B_{(b_p-1)p+i+pj} \tag{13}$$

(où $i, j = 0, 1, \ldots, p-1$) vérifie

$$M \equiv \begin{pmatrix} c_p & c_p & c_p & \cdots & c_p & c_p \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \star \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & & \vdots \\ 0 & \star & & & & \star \end{pmatrix} \pmod p \quad , \tag{14}$$

les $\star$ désignant des éléments inconnus, de sorte que

$$(B_{(b_p-1)p}, B_{(b_p-1)p+1}, \ldots, B_{(b_p-1)p+2p-2}) \equiv (c_p, \underbrace{0,\ldots,0}_{(p-1)\text{fois}}, c_p, \underbrace{0,\ldots,0}_{(p-2)\text{fois}}) \qquad (15)$$

(mod $p$).

Ainsi

$$D_p = D_{p,(b_p-1)p} \equiv \begin{vmatrix} c_p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & c_p & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_p & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} c_p^p \pmod p \qquad (16)$$

et le théorème de Fermat donne finalement

$$B_{b_p} \equiv c_p \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} D_p \pmod p \qquad (17)$$

Par ailleurs, grâce à la remarque (8), nous pouvons écrire :

$$D_p \equiv D_{p,0} = \text{dét}(B_{i+j})_{i,j=0,1,\ldots,p-1} \qquad (18)$$

En résumé, l'évaluation de la $p$-séquence constante de nombres de Bell réduits modulo $p$ mène "naturellement" au calcul du déterminant de Hankel construit sur la séquence initiale de ces nombres.

3. Deux techniques de calcul

Plusieurs auteurs ont évalué ce déterminant.

(a) Méthode de Philippe Delsarte [3]

Les nombres de Stirling de première espèce $s(k,i)$ sont définis, pour rappel, par

$$k!\binom{x}{k} = \sum_{i=0}^{k} s(k,i)x^i \qquad (19)$$

(Leur matrice est inverse de celle des nombres de Stirling de seconde espèce $S(k,i)$ : nombres d'équivalences à $i$ classes sur un ensemble de $k$ éléments. On a bien sûr $B_k = \sum_{i=1}^{k} S(k,i)$.)

Delsarte introduit les coefficients

$$c_{n,i} = (-1)^n \sum_{k=i}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} s(k,i) \qquad (20)$$

En particulier

$$c_{n,n} = 1 \qquad \text{et} \qquad c_{n,i} = 0 \quad \text{si} \quad i > n$$

Il montre, au moyen de relations d'orthogonalité entre polynômes de Charlier, que

$$\forall i,j \leqslant n \ , \ \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} c_{i,k}c_{j,\ell}B_{k+i} = i\delta_{i,j} \quad , \tag{21}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker : $\begin{cases} 1, & \text{si } i=j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Ceci peut encore s'écrire sous forme matricielle

$$\mathcal{C}_n\mathcal{D}_n\tilde{\mathcal{C}}_n = \mathrm{diag}(0! \ 1! \ \cdots \ (n-1)!) \quad , \tag{22}$$

où $\mathcal{C}_n$ est la matrice (triangulaire) des $c_{i,j}$ (avec $i,j = 0,1,\ldots,n-1$), $\tilde{\mathcal{C}}_n$ est sa transposée et $\mathcal{D}_n$ est la matrice définie par $(\mathcal{D}_n)_{i,j} = B_{i+j}$ (avec $i,j = 0,1,\ldots,n-1$).

Ainsi

$$(\text{dét } \mathcal{C}_n)^2(\text{dét } \mathcal{D}_n) = \prod_{k=0}^{n} k! \tag{23}$$

Comme évidemment dét $\mathcal{C}_n = 1$, (23) se réduit à

$$\text{dét } \mathcal{D}_n = \prod_{k=0}^{n} k! \tag{24}$$

Remarques :

- Les $c_{n,i}$ sont très lourds à évaluer par leur seule définition. Il vaut mieux [8] les calculer par la récurrence

$$c_{n+1,i} = c_{n,i-1} - nc_{n-1,i} - (n+1)c_{n,i} \quad , \tag{25}$$

  amorcée par $c_{1,1} = 1$, $c_{2,1} = -1$, $c_{2,2} = 1$.
- Pour les spécialistes de l'analyse $p$-adique (revenir au paragraphe 1 de ce texte, avec $K = \mathbb{C}_p$, complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$), la formule (24) se traduit mentalement tout de suite par une valeur absolue $p$-adique de $\mathcal{D}_n$ très petite...
- Pour $p$ premier, (24) donne [7]

$$(\text{dét}(B_{i+j})_{i,j=0,1,\ldots,p-1})^2 \equiv \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \pmod p \text{ selon que } p \equiv \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \pmod 4$$

(b) Méthode de Philippe Flajolet [4]

Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série (formelle) à coefficients $a_n$ entiers.

Si $f(z)$ admet le développement (formel lui aussi) en fraction continue de Jacobi-Stieltjes

$$f(z) = \cfrac{1}{1 - \alpha_0 z - \cfrac{\beta_1 z^2}{1 - \alpha_1 z - \cfrac{\beta_2 z^2}{1 - \alpha_2 z - \cfrac{\beta_3 z^2}{\cdots}}}} \tag{26}$$

à coefficients $\alpha_i, \beta_i$ entiers, alors

$$\text{dét}(a_{i+j})_{i,j=0,1,\ldots,n} = M_1 \ldots M_n \quad , \tag{27}$$

où l'on a posé

$$M_n = \beta_1 \ldots \beta_n \tag{28}$$

Flajolet montre ensuite (entre autres cas particuliers remarquables) que

$$\text{si l'on prend } a_n = B_n \text{ , alors } \alpha_k = k+1 \text{ et } \beta_k = k \quad . \tag{29}$$

Dans ce cas particulier, (28) coïncide avec (24).

4. Le théorème de Sylvester [1]
Une façon de formuler son énoncé est la suivante.
Soit $f$ une fonction $(2n-2)$ fois dérivable.
Soit l'opérateur $\mathcal{D}_n$ défini par

$$\mathcal{D}_n f = \text{dét}\left(\frac{d^{i+j}}{dx^{i+j}} f\right)_{i,j=0,1,\ldots,n-1} \tag{30}$$

Alors

$$(\mathcal{D}_{n+1} f)(\mathcal{D}_{n-1} f) = \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_n f) \tag{31}$$

Rappelons par ailleurs la fonction génératrice "exponentielle" des nombres de Bell :

$$e^{(e^z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k z^k}{k!} \tag{32}$$

Appliquons donc (31) à $f(z) = e^{(e^z-1)}$.
Par une récurrence un peu lourde, mais sans problème, on montre [7] que

$$\mathcal{D}_n e^{(e^z-1)} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} k!\right) e^{\frac{n(n-1)}{2} z + ne^z - n} \quad . \tag{33}$$

Or, par la définition-même de $\mathcal{D}_n$, et en se rappelant [2] que

$$\forall n \geqslant 1, \frac{d^n}{dz^n} e^{(e^z)} = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) e^{(kz+e^z)} \quad , \tag{34}$$

on trouve d'autre part

$$\mathcal{D}_n e^{(e^z-1)} = e^{(e^z-1)} \text{dét}(S_{i+j}(z))_{i,j=0,1,\ldots,n-1} \quad , \tag{35}$$

moyennant

$$S_0(z) = 1 \quad \text{et} \quad \forall m \geqslant 1 \text{ , } S_m(z) = \sum_{k=1}^{m} S(m,k) e^{kz} \quad . \tag{36}$$

En comparant (35) et (33), puis en remplaçant $e^z$ par $z$, on trouve

$$\text{dét}(B_{i+j}(z))_{i,j=0,1,\ldots,n} = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right) z^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad , \tag{37}$$

où

$$B_0(z) = 1 \quad \text{et} \quad B_n(z) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) z^k \quad . \tag{38}$$

Comme on l'a rappelé au paragraphe 3.a), le cas particulier $z = 1$ restitue à nouveau (24).

5. Autres applications du théorème de Sylvester [7], [9], [10]
Le théorème de Sylvester présente l'avantage de permettre l'utilisation de l'arsenal analytique, via l'usage des fonctions génératrices.
C'est ainsi qu'il produit des résultats comme ceux qui suivent :

- Soit $E_0 = 1, E_2 = 1, E_4 = 5, E_6 = 61, E_8 = 1385, \ldots$ la suite des nombres d'Euler, engendrée par

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k} z^{2k}}{(2k)!} \qquad (|z| < \frac{\pi}{2})$$

Alors

$$\text{dét}(E_{2i+2j})_{i,j=0,1,\ldots,n} = \left(\prod_{k=0}^{n} (2k)!\right)^2 \quad . \tag{39}$$

- Pour les nombres de Catalan $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ on trouve

$$\text{dét}(C_{i+j})_{i,j=0,1,\ldots,n} = 1 \quad . \tag{40}$$

- Pour les coefficients binomiaux centraux $b_i = \binom{2i}{i}$, on obtient

$$\text{dét}(b_{i+j})_{i,j=0,1,\ldots,n} = 2^n \quad . \tag{41}$$

- Pour le nombre $I_n$ d'involutions sur un ensemble à $n$ éléments, il vient

$$\text{dét}(I_{i+j})_{i,j=0,1,\ldots,n} = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right) \quad . \tag{42}$$

- Pour les polynômes $d_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} z^{n-k}$, on aboutit à

$$\text{dét}(d_{i+j}(z))_{i,j=0,1,\ldots,n} = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2 z^{n(n+1)} \quad . \tag{43}$$

Notons que $d_n = d_n(1)$ n'est autre que le nombre de dérangements de $n$ objets.

- Pour les polynômes de Hermite $H_n(x)$, on a

$$\text{dét}(H_{i+j}(z))_{i,j=0,1,\ldots,n} = (-2)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=0}^{n} k!$$

Le cas particulier $z = 0$ est particulièrement intéressant :

$$H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{n!} \quad \text{et} \quad H_{2n+1}(0) = 0 \quad .$$

6. Un dernier (pour l'instant) point de vue

Dans une communication personnelle à l'auteur [11], en date du 29 décembre 1991, Volker Strehl développe, à propos de la formule (43), différentes remarques dont il montre qu'elles s'appliquent de façon très générale et permettent d'éviter le recours aux diverses techniques décrites ci-dessus.

En fait, en posant

$$e_k(z) = (-z)^k d_k\left(-\frac{1}{z}\right) \quad ,$$

il commence par récrire (43) sous la forme

$$\text{dét}(e_{i+j})_{i,j=0,1,\ldots,n} = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2 \quad . \tag{44}$$

Pour prouver (44), il utilise des calculs de différences finies pour d'abord montrer que, effectivement le premier membre est *constant*. Un cas numérique particulier bien connu lui permet ensuite de conclure.

En outre, Strehl met en évidence une propriété commune aux polynômes $p_n(z)$ "se comportant bien". Cette propriété, qui s'avère essentielle dans sa démonstration, est de vérifier une équation du type $\frac{d}{dz}p_n(z) = np_{n-1}(z)$.

Pour terminer, Strehl donne une généralisation de (43) :

$$\text{dét}\left((x)_{k+i+j}\right)_{i,j=0,1,\ldots,n} = \prod_{j=0}^{n} j!(x)_{k+j} \quad , \tag{45}$$

où

$$(x)_j = x(x+1)(x+2)\ldots(x+j+1) \quad . \tag{46}$$

Ce type de généralisation, qui pourrait aussi s'obtenir à partir du théorème de Sylvester (partir de $\frac{d^n}{dz^n}f(z)$ au lieu de $f(z)$) est fort utile dans des questions comme celles évoquées très sommairement au paragraphe 1.

# Références

[1] Yvette AMICE, Les nombres $p$-adiques, Presses Universitaires de France, Collection SUP, "Le mathématicien", n° 14, 1975.

[2] Louis COMTET, Analyse combinatoire, Presses Universitaires de France, Collection SUP, "Le mathématicien", n° 4 (2 tomes), 1970.

[3] Philippe DELSARTE, Nombres de Bell et polynômes de Charlier, C.R.A.S. de Paris, t. 287, série A, 1978, 271-273.

[4] Philippe FLAJOLET, On congruences and continued fractions for some combinatorial quantities, Discrete Mathematics, 41, 1982, 141-153.

[5] J.W. LAYMAN, Maximum zero strings of Bell numbers modulo primes, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 40, 1985, 161-168.

[6] Christian RADOUX, Nombres de Bell, modulo $p$ premier, et extensions de degré $p$ de $\mathbb{F}_p$, C.R.A.S. de Paris, t. 281, 1975, 879-882.

[7] Christian RADOUX, Calcul effectif de certains déterminants de Hankel, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, vol. XXXI, fasc. 1, série B, 1979, 49-54.

[8] Christian RADOUX, Quelques conséquences d'une formule de P. Delsarte, Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, vol. XXXIV, fasc. 1, série B, 1982, 137-141.

[9] Christian RADOUX, Déterminant de Hankel construit sur des polynômes liés aux nombres de dérangements, European Journal of Combinatorics, 12, 1991, 327-329.

[10] Christian RADOUX, Déterminant de Hankel construit sur les polynômes de Hermite, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, t. 104, fasc. 2, 1990, 59-61.

[11] Volker STREHL, A note on polynomial Hankel determinants (à paraître).