Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1992, 498/S–28
Actes 28^e Séminaire Lotharingien, p. 109-113

Intégrité de certains produits-quotients de factorielles

PAR

P. A. PICON

Dans ce qui suit, $[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x et $\{x\} = x - [x]$ sa partie fractionnaire. On notera $x_1 + \ldots + x_n!$ pour $(x_1 + \ldots + x_n)!$

Théorème.- ([1] et [2]). Soit une famille finie de formes linéaires u sur $\mathbf{R}^n$ à coefficients dans $\mathbf{N}$; alors $A(X) = \prod_u u(X)!^{\varepsilon_u}$, $\varepsilon_u = \pm 1$, est entier pour tout X de $\mathbf{N}^n$, si et seulement si $B(X) = \sum_u \varepsilon_u[u(X)]$ est positive ou nulle pour tout X de $[0, 1[^n \cup \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, e_k désignant le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Corollaire.-

1. Si $B(e_k) = 0$ pour tout k, $A(X)$ est entier dans $\mathbf{N}^n$ si et seulement si $B(X) \geq 0$ dans $[0, 1[^n$.

2. Si $A(X)$ est entier dans $\mathbf{N}^n$, alors $A(X) \prod_{k=1}^{n} x_k!^{-B(e_k)}$ est aussi entier dans $\mathbf{N}^n$.

Du 2. on déduit par exemple que le coefficient du binôme $\dfrac{x + y\,!}{x!\ y!}$ est entier puisque $x + y!$ l'est.

Également que $x!$ divise $\dfrac{5x + y!\ 3y!}{x + 2y!\ 2x + y!\ x!\ y!}$ et que $x_1!^{k-2} \ldots\ldots x_k!^{k-2}$ divise le nombre de Bourguet $\dfrac{kx_1! \ldots kx_k!}{x_1 + \ldots + x_k!\ x_1! \ldots x_k!}$ dont l'intégrité est montrée ou citée dans [1].

On dira dans ce cas, que l'on complète $A(X)$ et si $B(e_k) = 0$ pour tout k, que A et B sont complets, pour signifier que $A(X)$ n'est alors divisible par aucune $x_k!$

On peut facilement voir que, pour une fonction B complète, on a les équivalences $B(X) \geq 0 \Leftrightarrow B(X) \leq \delta \Leftrightarrow 0 \leq B(X) \leq \delta$ où δ désigne la différence entre le nombre de factorielles du dénominateur et du numérateur.

Dans tout ce qui suit, les quotients A et les fonctions B seront supposés complets.

I - Considérons $A(X) = \dfrac{5x + y!\ 3y!}{x + 2y!\ 2x + y!\ x!^2\ y!}$ cité ci-dessus. Dans $[0, 1[^2$,

$$\begin{aligned} B(X) &= [5x + y] + [3y] - [x + 2y] - [2x + y] \\ &= 2x + y - \{5x + y\} - \{3y\} + \{x + 2y\} + \{2x + y\}\ . \end{aligned}$$

Comme $B(X)$ est un entier, dès que $2x + y \geq 1$, $B(X)$ est positif ou nul, car $\{5x + y\} + \{3y\} < 2$. Pour $2x + y < 1$, $B(X) = 4x + 2y - \{5x + y\} - \{3y\} + \{x + 2y\}$ et de la même façon, dès que $4x + 2y \geq 1$, $B(X) \geq 0$. Il est clair d'autre part, que le minimum de $B(X)$ est atteint sur $x + 2y = 1,\ 2$ ou sur $2x + y = 1{,}2$.
(La fonction $x \longrightarrow [x]$ est continue à droite).
$B(X)$ est donc positive ou nulle dans $[0, 1[^2$ puisqu'on vient de voir qu'elle l'est pour $2x + y \geq 1$ et pour $x + 2\,y \geq 1$.

Le même procédé peut-être appliqué pour montrer "sans calcul" l'intégrité de, par exemple, $\dfrac{2x!\ 4y!\ 4x + 2y!}{x!^2\ y!^2\ x{+}y!^2\ 2(x{+}y)!}$.

De plus, on utilise seulement, hors le fait que $A(X)$ soit complet, le nombre de factorielles du numérateur et non pas leur expression même ; c'est-à-dire que l'on montre en même temps l'intégrité des quotients correspondant aux partages en deux de $5x{+}4y$: $3x + 2y!\ 2y!$, $4x + y!\ x{+}3y!$ etc.
De façon plus générale on montre facilement par récurrence le résultat suivant :

Proposition.- $u \leq v$ signifie $u(e_k) \leq v(e_k)$ pour tout k.

Si, pour $k = 1, \ldots, q$, $rv_k \leq v_0 + v_1 + \ldots + v_{k-1}$ où $v_0(X) = a_1\, x_1 + \ldots + a_n\, x_n$ alors $\dfrac{u_1(X)! \ldots u_{r+1}(X)!}{x_1!^{\,a_1} \ldots x_n!^{\,a_n}\ v_1(X)! \ldots v_q(X)!}$ est entier.

Corollaire.- $\dfrac{u_1(X)! \ldots u_{r+1}(X)!}{x_1!^{\,r} \ldots x_n!^{\,r}\ \Sigma\, x!^{\,a_1}\ 2\,\Sigma\, x!^{\,a_2} \ldots q\Sigma\, x!^{\,a_q}}$

où $\Sigma\, x = x_1 + \ldots + x_n$, est entier si $rk \leq r + a_1 + 2a_2 + \ldots + (k-1)\, a_{k-1}$, $k = 2, \ldots, q$.
En particulier, $\dfrac{u_1(X)! \ldots u_n(X)!}{x_1!^{\,n-1} \ldots x_n!^{\,n-1}\ \Sigma\, x!^{\,k-n+1}}$ est entier et on retrouve le résultat de Bourguet pour $u_i(X) = k\, x_i$ et $k = n$.

Par exemple, les quotients suivants sont entiers :

$$\frac{6x!\ 13y!\ 19z!}{x!^2\ y!^4\ z!^6\ x + 2y + 3z!\ x + 3y + 4z!\ 2x + 4y + 6z!}$$

$$\frac{9x!\ 10y!\ 10z!}{x!^2\ y!^4\ z!^6\ x + 2y + 3z!\ x + 3y + z! + 2x + y!\ 3x!}$$

$$\frac{15x!\ 15y!\ 15z!}{x!^2\ y!^2\ z!^2\ \sum x!^3\ 2\sum x!\ 3\sum x!\ 5\sum x!}$$

$$\frac{15x!\ 15y!\ 15z!}{x!^2\ y!^2\ z!^2\ 2\sum x!^2\ 3\sum x!\ 4\sum x!}$$

Ils restent entiers si on change les numérateurs sans augmenter le nombre des factorielles et de manière à ce que la somme des fonctions soit la même.

II - On connaît la formule $\sum_{k=0}^{m-1} \left[x + \frac{k}{m}\right] = [mx]$, pour x réel et m entier positif.

On en déduit facilement une généralisation

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left[x + k\,\frac{n}{m}\right] = [mx] + \frac{(m-1)(n-1)}{2} \qquad (1)$$

pour m, n entiers positifs premiers entre eux.

Cette formule va nous permettre de faire des sommes de translatées de fonctions B.

Dans ce qui suit, P désigne un ensemble fini d'entiers ≥ 2 et premiers deux à deux et $P - 1$ l'ensemble formé des nombres de P diminués chacun de 1. On note $\pi(E)$ le produit des nombres de l'ensemble E en convenant que $\pi(\phi) = 1$.

On a alors la :

Proposition.- Les trois expressions suivantes sont entières pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $\varepsilon_E = (-1)^{\text{Card } P - \text{Card } E}$

1. $$\prod_{E \subset P} \pi(E)\ x!^{\varepsilon_E}\ \pi(E)\ y!^{\varepsilon_E}\ \ x+y!^{-\pi(P-1)}$$

2. $$\prod_{E \subset P} \pi(E)\ (x+y)!^{\varepsilon_E}\ \pi(E)\ x!^{-\varepsilon_E}\ y!^{-\pi(P-1)}$$

3. $$\prod_{E \subset P} \pi(E)\, x!^{\varepsilon_E}\, 2x!^{-\frac{\pi(P-1)}{2}}$$

(sauf si P est réduit à un seul nombre pair).

Preuve.-

1. On pose $b(x, y) = [x + y] - [x] - [y]$. Utilisant (1), on voit que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} b\left(x + \frac{k}{n}, y + \frac{n-k}{n}\right) = (n-1)[x + y + 1] - [nx] - [ny] + [x] + [y]$$

qui est comprise entre 0 et $n-1$, ce qui entraîne que :

$$b_n(x, y) = [nx] + [ny] - (n-1)[x + y] - [x] - [y]$$

est comprise entre 0 et $n - 1$ aussi. Cela montre 1. pour $P = \{n\}$.

Prenons $P = \{n, m\}$ avec $(n, m) = 1$ et faisons

$$\sum_{k=1}^{m-1} b_n\left(x + \frac{k}{m}, y + \frac{m - k}{m}\right)$$ qui vaut, d'après (1),

$$[mnx] + [mny] - [mx] - [my] - [nx] - [ny] + [x] + [y] - (m-1)(n-1)[x + y]$$

et qui est évidemment positive. La récurrence sur le nombre d'éléments de P est immédiate.

2. On commence par faire

$$\sum_{k=1}^{n-1} b\left(x + \frac{k}{n}, y\right) = [n(x + y)] - [x + y] - [nx] + [x] - (n-1)[y] = c_n(x, y) \geq 0$$

On fait ensuite $\sum_{k=1}^{m-1} c_n\left(x + \frac{k}{m}, y\right)$ et de façon analogue à 1., on obtient le résultat annoncé.

3. On fait $y = x$ dans 1. et le carré d'un rationnel étant entier, ce rationnel est entier. Par exemple, pour $P = \{2\}$, on obtient $\frac{2x!\, 2y!}{x + y!\, x!\, y!}$ (Catalan) qui correspond à $1 - b\left(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}\right)$ et que l'on connaît déjà ; puis $\frac{2(x + y)!\, x!}{x + y!\, 2x!\, y!}$ correspondant à $b\left(x + \frac{1}{2}, y\right)$ qui semble-t-il n'était pas connu.

Pour tous les deux, comme pour le binôme, $\delta = 1$.

Pour P = {3, 4}, on a :

$$\frac{12x!\ x!\ 12y!\ y!}{3x!\ 4x!\ 3y!\ 4y!\ x + y!^{6}}\ ,$$

$$\frac{12x!\ x!\ 12y!\ y!\ 12z!\ z!}{3x!\ 4x!\ 3y!\ 4y!\ 3y!\ 4z!\ x + y!^{3}\ y + z!^{3}\ z + x!^{3}}$$

et
$$\frac{12(x + y)!\ x + y!\ 2x!\ 4x!}{3(x + y)!\ 4(x + y)!\ 12x! + x!\ y!^{6}}$$

entiers.

Pour P = {3, 4, 5} ,

$$\frac{60x!\ 3x!\ 4x!\ 5x!}{20x!\ 15x!\ 12x!\ x!\ 2x!^{12}} \quad \text{entier.}$$

Bibliographie

1. Landau (E), Nouvelles Annales de Mathématiques, t.3 (19), 1900, p. 344-362.
2. Picon (P.A.), Séminaire Lotharingien de combinatoire. mai 1983.

Laboratoire d'Informatique théorique et Programmation, Université Paris-VII,
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.