

## MOMENTS DES $q$ -POLYNÔMES DE LAGUERRE ET LA BIJECTION DE FOATA-ZEILBERGER

par Anne de Médicis\*  
 et Xavier G. Viennot†

### 1. INTRODUCTION

Toute famille de polynômes orthogonaux unitaires  $P_n(x)$  peut être définie à l'aide d'une *réurrence linéaire à trois termes* de la forme

$$P_{n+1}(x) = (x - b_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x), \quad (1.1)$$

lorsque  $n \geq 1$ , avec  $P_0(x) = 1$  et  $P_1(x) = x - b_0$ , où  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  et  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  sont deux suites à valeurs dans un anneau  $K$ .

**1.1. Polynômes de Laguerre et  $q$ -analogue.** Les *polynômes de Laguerre classiques*, notés  $L_n^{(\alpha)}(x)$ , satisfont une telle récurrence pour les coefficients

$$b_k^{(\alpha+1)} = 2k + \alpha + 1 \quad \text{et} \quad \lambda_k^{(\alpha+1)} = k(k + \alpha). \quad (1.2)$$

Ils ont pour moments  $\mu_n^{(\alpha+1)}$  l'expression suivante:

$$\mu_n^{(\alpha+1)} = (\alpha + 1)_n = (\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n). \quad (1.3)$$

En particulier, lorsque  $\alpha = 0$ , on a  $\mu_n^{(1)} = n!$ .

Un  $q$ -analogue naturel des polynômes de Laguerre (pour  $\alpha = 0$ ) est de considérer la famille de polynômes orthogonaux dont les moments sont

$$\mu_{n,q}^{(1)} = [n]_q!, \quad (1.4)$$

$$\text{où } [n]_q = (q^n - 1)/(q - 1) \quad \text{et} \quad [n]_q! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ [1]_q [2]_q \dots [n]_q & \text{sinon;} \end{cases}$$

\* Partiellement soutenue par le CRSNG et le FCAR.

† Partiellement soutenu par le PRC "Mathématique et Informatique".

ou plus généralement, pour  $\beta = \alpha + 1$  variable formelle, la famille de polynômes orthogonaux dont les moments sont donnés par

$$\mu_{n,q}^{(\beta)} = [n; \beta]_q! \tag{1.5}$$

où nous notons

$$[n; \beta]_q = \beta + q + q^2 + \dots + q^{n-1}, \tag{1.6}$$

$$\text{et } [n; \beta]_q! = [1; \beta]_q [2; \beta]_q \dots [n; \beta]_q. \tag{1.7}$$

Remarquons que lorsque  $\beta = 1$ , on a  $[n; 1]_q = [n]_q$ . Dans la suite, nous identifierons toujours  $\beta$  et  $\alpha + 1$ .

L'objet principal de cet article est de démontrer de manière bijective, avec les chemins de Motzkin valués (cf Françon et Viennot [FrVi], Flajolet [Fla], Viennot [Vi1]), que la classe de polynômes cherchée, notée  $L_{n,q}^{(\beta-1)}(x)$ , satisfait la récurrence linéaire à trois termes (1.1) pour les coefficients

$$b_{k,q}^{(\beta)} = q^k ([k]_q + [k+1; \beta]_q) \quad \text{et} \quad \lambda_{k,q}^{(\beta)} = q^{2k-1} [k]_q [k; \beta]_q. \tag{1.8}$$

Remarquons que cette classe de polynômes n'est pas le  $q$ -analogue des polynômes de Laguerre que les analystes considèrent habituellement. Ils apparaissent cependant dans la littérature comme cas particulier des polynômes "little  $q$ -Jacobi"  $p_n(x, a, b; q)$  (cf Gasper et Rahman [GR]), pour les valeurs  $b = 0$  et  $\frac{1/a-q}{1-q} = \beta$ . Ces polynômes sont définis en termes de séries hypergéométriques basiques par

$$p_n(x, a, b; q) = {}_2\phi_1 \left( \begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1} \\ aq \end{matrix} \middle| q; qx \right).$$

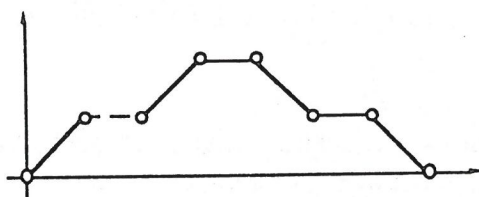


FIGURE 1: un chemin de Motzkin coloré.

**1.2. Chemin de Motzkin coloré.** Un *chemin de Motzkin coloré*  $w = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  de longueur  $|w| = n$  est un chemin dans le plan  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  partant du sommet  $s_0 = (0, 0)$ , se terminant au sommet  $s_n = (n, 0)$ , et dont les pas élémentaires ont l'un des quatre types suivant: Nord-Est  $(s_i, s_{i+1}) = ((i, j), (i+1, j+1))$ , Est bleu (en pointillé dans la figure 1) ou Est rouge  $(s_i, s_{i+1}) = ((i, j), (i+1, j))$ , ou Sud-Est  $(s_i, s_{i+1}) = ((i, j), (i+1, j-1))$ . On dira d'un pas élémentaire  $(s_i, s_{i+1})$  qu'il *part du niveau*  $j$  si  $s_i = (i, j)$ .

Étant données quatre suites  $\{a_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b'_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b''_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{c_k\}_{k \geq 1}$ , à valeurs dans un anneau  $K$ , on définit la *valuation d'un pas élémentaire*  $(s_i, s_{i+1}) = ((i, j), (i+1, j'))$  partant du niveau  $j$ , de la manière suivante:

$$v(s_i, s_{i+1}) = \begin{cases} a_j & \text{si } (s_i, s_{i+1}) \text{ Nord-Est,} \\ b'_j & \text{si } (s_i, s_{i+1}) \text{ Est bleu,} \\ b''_j & \text{si } (s_i, s_{i+1}) \text{ Est rouge,} \\ c_j & \text{si } (s_i, s_{i+1}) \text{ Sud-Est;} \end{cases} \quad (1.9)$$

et la *valuation (ou pondération) d'un chemin*  $w = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  par

$$v(w) = \prod_{i=0}^{n-1} v(s_i, s_{i+1}). \quad (1.10)$$

Par exemple, le chemin de Motzkin  $w$  de la figure 1 a la pondération  $v(w) = a_0 b'_1 a_1 b''_2 c_2 b'_1 c_1$ .

P. Flajolet [Fla] et X.G. Viennot [Vil] ont démontré que si l'on définissait les suites  $\{a_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b'_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b''_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{c_k\}_{k \geq 1}$  de telle sorte que pour tout  $k \geq 0$ ,

$$b_k = b'_k + b''_k, \quad (1.11)$$

et pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\lambda_k = a_{k-1} c_k, \quad (1.12)$$

alors le lien entre les suites  $\{b_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  des coefficients de la récurrence linéaire à trois termes d'une classe de polynômes orthogonaux, et leurs moments  $\mu_n$ , est donné par

$$\mu_n = \sum_{|w|=n} v(w), \quad (1.13)$$

où  $w$  parcourt l'ensemble des chemins de Motzkin colorés de longueur  $n$ .

Pour les polynômes de Laguerre classiques  $L_n^{(\beta-1)}(x)$ , on choisit habituellement

$$a_k^{(\beta)} = k + \beta, \quad b_k^{(\beta)'} = k, \quad b_k^{(\beta)''} = k + \beta \quad \text{et} \quad c_k^{(\beta)} = k, \quad (1.14)$$

comme suites associées à la valuation (1.9) des chemins de Motzkin colorés. Nous noterons la valuation (1.10) correspondante  $v^{(\beta)}(w)$ .

Le choix de ces quatre valuations, satisfaisant  $b_k^{(\beta)'} + b_k^{(\beta)''} = 2k + \beta$  et  $a_{k-1}^{(\beta)} c_k^{(\beta)} = k(k + \beta - 1)$ , provient de la notion d'histoires de Laguerre et de la construction d'une bijection entre celles-ci et les permutations.

**1.3. Histoire de Laguerre et bijection Françon-Viennot.** Plus précisément, une *histoire de Laguerre*  $h$  de longueur  $|h| = n$  est la donnée d'un couple  $(w; (p_1, \dots, p_n))$ , dans lequel  $w = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  est un chemin de Motzkin coloré de longueur  $n$ , et  $(p_1, \dots, p_n)$  est une suite d'entiers tels que si  $(s_{i-1}, s_i)$  est un pas élémentaire partant du niveau  $k$ , le  $i$ -ième choix  $p_i$  est dans l'intervalle suivant:

$$0 \leq p_i \leq \begin{cases} k & \text{si } (s_{i-1}, s_i) \text{ N-E ou E rouge,} \\ k - 1 & \text{si } (s_{i-1}, s_i) \text{ S-E ou E bleu.} \end{cases} \quad (1.15)$$

Pour  $\beta = 1$ , la valuation  $v^{(\beta)}(w)$  d'un chemin de Motzkin coloré  $w$  est égale au nombre d'histoires de Laguerre  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$ . Dans ce cas, la preuve combinatoire que les moments  $\mu_n^{(1)}$  des polynômes de Laguerre  $L_n^{(0)}(x)$  sont égaux à  $n!$ , revient à trouver une bijection entre les permutations dans  $\mathfrak{S}_n$  et les histoires de Laguerre de longueur  $n$ . Une telle bijection fut donnée par J. Françon et X.G. Viennot dans l'article [FrVi]. Elle a été utilisée dans divers problèmes combinatoires et est devenue classique (voir Goulden et Jackson [GJ]).

Plus généralement, la bijection Françon-Viennot, que nous noterons  $\Psi_{FV}$ , permet de démontrer combinatoirement que les moments des polynômes de Laguerre  $L_n^{(\beta-1)}(x)$  sont donnés par l'expression  $\mu_n^{(\beta)} = \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)$ , c'est-à-dire le polynôme énumérateur des permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  selon le nombre d'*éléments saillants inférieurs gauches* (i.e. éléments  $\sigma(i)$  tels que  $\sigma(i) < \sigma(j)$  pour  $1 \leq j < i$ ). Pour ce faire, il suffit de pondérer les histoires de Laguerre  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$  par la valuation

$$v_\beta(p_i) = \begin{cases} \beta & \text{si } p_i = 0 \text{ et } (s_{i-1}, s_i) \text{ N-E ou E rouge,} \\ 1 & \text{sinon;} \end{cases} \quad (1.16)$$

et

$$v_\beta(h) = \prod_{i=1}^n v_\beta(p_i), \quad (1.17)$$

et de montrer que si  $v_\beta(h) = \beta^l$ , alors  $h$  correspond à une permutation  $\Psi_{FV}(h)$  ayant  $l$  éléments saillants.

Remarquons que selon les notations introduites précédemment,

$$v^{(\beta)}(w) = \sum_{h=(w;(p_1,\dots,p_n))} v_\beta(h), \quad (1.18)$$

où  $v^{(\beta)}$  désigne la valuation des chemins de Motzkin associée aux suites (1.14), et la somme parcourt les histoires de Laguerre ayant  $w$  comme chemin de Motzkin associé.

En fait, en donnant d'autres pondérations aux histoires de Laguerre, ou en restreignant les choix possibles  $p_i$  dans la bijection Françon-Viennot, il est possible (voir Viennot [Vi1]) de retrouver combinatoirement les moments des cinq classes de polynômes orthogonaux de Sheffer (c'est-à-dire Hermite, Laguerre, Charlier, Meixner et Meixner-Pollačzek (appelés aussi Meixner de première et seconde espèce dans le livre de T.S. Chihara [Chi])).

**1.4.  $q$ -Comptage des histoires de Laguerre.** Dans cet article, nous allons introduire un  $q$ -comptage des histoires de Laguerre. Notons d'abord  $v_q^{(\beta)}(w)$  la valuation des chemins de Motzkin colorés  $w$  (telle que définie en (1.9) et (1.10)) associée aux suites

$$a_{k,q}^{(\beta)} = q^k [k+1; \beta]_q, \quad b_{k,q}^{(\beta)'} = q^k [k]_q, \quad b_{k,q}^{(\beta)''} = q^k [k+1; \beta]_q \quad \text{et} \quad c_{k,q}^{(\beta)} = q^k [k]_q. \quad (1.19)$$

Puis, pour une histoire de Laguerre  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$ , nous notons successivement:

$$\text{aire}(w) = \sum_{i=1}^n \text{niv}(w, i), \quad (1.20)$$

dans lequel  $niv(w, i)$  désigne le niveau de départ du  $i$ -ième pas élémentaire  $(s_{i-1}, s_i)$  de  $w$ ,

$$som(h) = \sum_{i=1}^n p_i, \quad (1.21)$$

$$\text{et } lag(h) = aire(w) + som(h). \quad (1.22)$$

Avec ces notations, en vertu des résultats de P. Flajolet [Fla] et X.G. Viennot [Vil], pour démontrer que la classe des polynômes orthogonaux  $L_{n,q}^{(\beta-1)}(x)$  définie par les moments (1.5) satisfait la récurrence linéaire à trois termes (1.1) avec les coefficients  $b_{k,q}^{(\beta)}$  et  $\lambda_{k,q}^{(\beta)}$  donnés en (1.8), il suffit de montrer que

$$[n; \beta]_q! = \sum_h v_\beta(h) q^{lag(h)}, \quad (1.23)$$

où  $h$  parcourt l'ensemble des histoires de Laguerre de longueur  $n$ .

Pour  $\beta = 1$ , cette égalité revient à dire que la distribution  $lag(h)$  est une distribution Mahonienne, c'est-à-dire qu'elle a même distribution que le paramètre nombre d'inversions des permutations. En utilisant la bijection Françon-Viennot, la statistique  $lag(h)$  conduit à une nouvelle statistique (Mahonienne) sur les permutations, qui ne semble pas directement pouvoir être reliée aux statistiques classiques nombre d'inversions ou indice majeur (cf Foata [Fo]).

**1.5. La bijection Foata-Zeilberger.** En fait, nous utilisons une autre bijection entre les permutations et les histoires de Laguerre, introduite par D. Foata et D. Zeilberger [FoZe]. Nous apportons quelques modifications et compléments par rapport à l'article original de D. Foata et D. Zeilberger. Nous rappelons d'abord la très ingénieuse construction bijective, que nous noterons  $\Psi_{FZ}$ , définie directement par D. Foata et D. Zeilberger, en la décomposant en quatre étapes. Un premier avantage de ce découpage est d'ordre pédagogique pour ce que nous voulons démontrer ici. Un second avantage est de souligner que les deuxième et quatrième étapes de la construction reposent en fait sur des bijections ou constructions déjà connues, intervenant dans d'autres théories relatives aux polynômes orthogonaux, ce qui permet d'inscrire la bijection Foata-Zeilberger comme le chaînon manquant d'une véritable théorie combinatoire unifiée des polynômes orthogonaux.

À la section 3, nous exposons la première étape de la construction de D. Foata et D. Zeilberger, à savoir la décomposition d'une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  en deux involutions sans points fixes  $\sigma \rightarrow (\sigma_{exc}, \sigma_{nex})$ , obtenues essentiellement en "séparant" les excédances ( $i < \sigma(i)$ ) et les non-excédances ( $i \geq \sigma(i)$ ) de la permutation  $\sigma$ .

La deuxième étape de la bijection Foata-Zeilberger consiste à coder chacune de ces involutions sans points fixes par une *histoire d'Hermite*, c'est-à-dire une histoire de Laguerre  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$ , soumise aux restrictions que le chemin  $w$  est un chemin de Dyck (il ne contient pas de pas élémentaires Est), et que pour tout pas Nord-Est  $(s_{i-1}, s_i)$ , on ait  $p_i = 0$ . Ce codage est bien connu (Françon, Viennot [FrVi], Flajolet [Fla], Viennot [Vil]) et peut être vu comme un cas particulier de la bijection Françon-Viennot. Il permet d'interpréter combinatoirement les moments des polynômes d'Hermite en termes d'involutions sans points fixes. Il existe en fait deux formes différentes de la bijection

(selon que l'on numérote les "positions" libres de droite à gauche ou de gauche à droite). Il est classique que les histoires d'Hermite "passent" aisément aux  $q$ -analogues (voir par exemple Flajolet [Fla], Viennot [Vi1], Penaud [Pe], Ismail, Stanton et Viennot [ISV]). En fait, certaines  $q$ -pondérations de ces histoires conduisent aux moments de deux  $q$ -analogues différents des polynômes d'Hermite ( $q$ -Hermite "continus" et  $q$ -Hermite "discrets"). Tous ces rappels forment la section 2.

La troisième étape de la construction de la bijection Foata-Zeilberger consiste à "fusionner" les deux histoires d'Hermite associées aux involutions  $\sigma_{exc}$  et  $\sigma_{nex}$  en une seule histoire, que nous appelons *histoire de Laguerre subdivisée*. Nous l'exposons à la section 5.

Et finalement, la quatrième étape consiste à appliquer un opérateur de "tassement" (cf Viennot [Vi1, Vi2]) des chemins valués pour retrouver les histoires de Laguerre usuelles. Les histoires de Laguerre subdivisées et les opérateurs de tassement sont exposés en section 4.

Pour résumer, disons ici que les histoires de Laguerre sont l'objet combinatoire associé au développement en fractions continues de type Jacobi (J-fractions) de la série des moments:

$$\sum_{n \geq 0} n!t^n = \frac{1}{1 - b_0^{(1)}t - \frac{\lambda_1^{(1)}t^2}{1 - b_1^{(1)}t - \frac{\lambda_2^{(1)}t^2}{\ddots \frac{\lambda_{k+1}^{(1)}t^2}{1 - b_k^{(1)}t - \ddots}}}}, \quad (1.24)$$

tandis que les histoires de Laguerre subdivisées forment l'objet combinatoire associé au développement en fractions continues de type Stieltjes (S-fractions) de cette même série de moments:

$$\sum_{n \geq 0} n!t^n = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1 t}{1 - \frac{\gamma_2 t}{\ddots \frac{\gamma_k t}{\ddots}}}}, \quad (1.25)$$

dans laquelle on sait que  $\gamma_k = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ , où  $\lfloor x \rfloor$  désigne le plus petit entier  $n$  plus grand que  $x$ .

X.G. Viennot [Vi1, Vi2] a montré que les bijections de tassement permettent de passer d'un modèle à l'autre. Il y a en fait deux bijections de tassements (transformant un chemin de Dyck valué en un chemin de Motzkin valué). En combinant ces deux bijections, X.G. Viennot [Vi2] déduit une interprétation combinatoire du célèbre algorithme "quotient-différence" (ou qd-algorithme), permettant de développer une série formelle en S-fraction.

Au fond, nous pourrions dire que la bijection Françon-Viennot correspond au développement de la série  $\sum_{n \geq 0} n!t^n$  en J-fraction, tandis que la bijection Foata-Zeilberger

correspond à son développement en S-fraction.

En section 5, nous mettons bout à bout les quatre étapes de la bijection Foata-Zeilberger et montrons comment une autre répartition des  $q$ -poids que celle employée par D. Foata et D. Zeilberger sur les deux involutions  $\sigma_{exc}$  et  $\sigma_{nex}$  permet de transformer la statistique  $lag$  des histoires de Laguerre (1.22) en le nombre d'inversions classique  $inv$  des permutations. En fait, la statistique  $lag$  est transformée par la bijection Foata-Zeilberger en un nouveau paramètre sur les permutations, dont il n'est pas évident a priori que ce soit le nombre d'inversions de la permutation originale  $\sigma$ . Ce curieux fait est démontré par une double récurrence en section 3. La section 5 termine ainsi la preuve combinatoire du résultat principal de cet article, donnant la récurrence linéaire à trois termes des polynômes  $L_{n,q}^{(0)}(x)$ . L'extension de ce résultat aux polynômes  $L_{n,q}^{(\beta-1)}(x)$  se fait sans difficulté. En effet, la notion d'éléments saillants s'interprète facilement à travers les quatre étapes de la construction de Foata-Zeilberger.

**1.6. Compléments.** La construction de Foata-Zeilberger était originellement relative à une autre statistique,  $den(\sigma)$ , introduite par Marleen Denert [Den]. Celle-ci avait conjecturé que cette statistique était également Mahonienne. L'un des buts de D. Foata et D. Zeilberger était de démontrer cette conjecture (voir aussi Han [Han1, Han2]). Curieusement, la statistique de Denert sur les permutations est transformée par la bijection de Foata-Zeilberger en une statistique très proche de notre statistique  $lag$  sur les histoires de Laguerre. Nous n'avons cependant pas pu relier simplement les deux statistiques pour retrouver ainsi une autre preuve de la conjecture de Denert.

Dans la section 6, nous donnons une expression directe du paramètre  $lag(h)$  transporté sur les permutations le long de la bijection Françon-Viennot, obtenant ainsi une nouvelle statistique Mahonienne pour les permutations.

Enfin, nous esquissons dans la section 6 une théorie combinatoire générale des  $q$ -analogues des classes de polynômes orthogonaux de Sheffer. Nous proposons un  $q$ -analogue combinatoire de ces classes de polynômes, à l'aide d'un raffinement des  $q$ -valuations des histoires de Laguerre. Nous donnons notamment une interprétation combinatoire des moments en termes de certaines statistiques sur les permutations, obtenues via la bijection Foata-Zeilberger.

Une classe de polynômes orthogonaux un peu plus générale que les  $q$ -polynômes de Laguerre étudiés dans cet article, dont les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes (1.1) sont

$$b_k(\beta, \gamma; q) = q^k([k; \gamma]_q + [k+1; \beta]_q) \quad \text{et} \quad \lambda_k(\beta, \gamma; q) = q^{2k-1}[k; \gamma]_q[k; \beta]_q, \quad (1.26)$$

a été étudiée par J. Zeng [Zen1] en 1989. Il a notamment montré, en utilisant les fractions continues ainsi qu'une transformation particulière  $\varrho$ , faisant correspondre à toute permutation de  $\mathfrak{S}_n$  une permutation de  $\mathfrak{S}_{n-1}$  (cf Dumont et Kreweras [DuKr]), que les moments associés à ces polynômes étaient donnés par l'expression

$$\mu_n(\beta, \gamma; q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \beta^{ssg(\sigma)} \gamma^{side(\sigma)} q^{inv(\sigma)}, \quad (1.27)$$

où  $ssg(\sigma)$  désigne le nombre d'éléments saillants supérieurs gauches de  $\sigma$  (ou nombre de records), i.e. le nombre d'entiers  $\sigma_{i_0}$  dans  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$  tels que  $\sigma_j < \sigma_{i_0}$  pour tout

$j < i_0$ , et  $side(\sigma)$  désigne le nombre d'*éléments saillants inférieurs droits exclusifs* de  $\sigma$  (ou nombre d'*anti-records exclusifs*), i.e. le nombre d'entiers  $\sigma_{i_0}$  dans  $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n$  tels que  $\sigma_j > \sigma_{i_0}$  pour tout  $j > i_0$ , et qui ne sont pas en même temps des records de  $\sigma$ .

En particulier, il obtient aussi le résultat

$$\mu_n(\beta, 1; q) = [n; \beta]_q!. \quad (1.28)$$

Mentionnons également les travaux poursuivis actuellement par R. Simion et D. Stanton [SiSt, St], qui ont pour objet l'étude et la classification des différentes spécialisations des polynômes de Laguerre généralisés, définis par la récurrence linéaire à trois termes (1.1) pour les coefficients

$$b_k = a[k+1]_{r,s} + b[k]_{t,u} \quad \text{et} \quad \lambda_k = ab[k]_{p,q}[k]_{v,w}, \quad (1.29)$$

où  $[n]_{p,q} = (p^n - q^n)/(p - q)$ .

R. Simion et D. Stanton obtiennent en particulier, via la bijection Françon-Viennot, des interprétations combinatoires des moments de ces polynômes en termes de séquences croissantes maximales ("runs") de la permutation.

## 2. INVOLUTIONS, HISTOIRES D'HERMITE ET $q$ -ANALOGUES DES POLYNÔMES D'HERMITE

Notons  $INV[n]$  l'ensemble des involutions sans points fixes sur l'ensemble  $[2n] = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ . Nous conviendrons que l'ensemble  $INV[0]$  contient un élément, l'involution vide. Soit  $\tau \in INV[n]$ . Tout comme les permutations, on peut représenter  $\tau$  soit comme un tableau dont la première ligne est formée des entiers de 1 à  $2n$  et la seconde, des images correspondantes par  $\tau$ , i.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \dots & \tau(2n) \end{pmatrix};$$

soit comme produit de cycles disjoints, ordonnés selon l'ordre croissant des minima des cycles, chaque cycle commençant par son minimum, comme par exemple

$$\tau = (1, 4)(2, 7)(3, 10)(5, 6)(8, 9).$$

Nous dirons dans ce cas que  $\tau$  est écrite *sous forme standard de produit de cycles disjoints*.

Dans la suite, nous utiliserons également une autre écriture de  $\tau \in INV[n]$ : sa *représentation graphique*. Elle est construite de la manière suivante: on associe un sommet à chaque entier de 1 à  $2n$  et on les place sur une ligne, par ordre croissant, de gauche à droite. On dessine un arc du sommet  $i$  au sommet  $j$  si et seulement si  $\tau(i) = j$ . La figure 2 illustre la représentation graphique de l'involution  $\tau$  donnée ci-dessus.

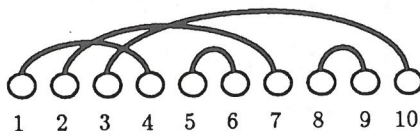


FIGURE 2: représentation graphique de  $\tau = (1, 4)(2, 7)(3, 10)(5, 6)(8, 9)$ .



Il existe une bijection classique entre l'ensemble  $INV[n]$  et les histoires d'Hermite de longueur  $2n$ . Rappelons qu'une *histoire d'Hermite* est une histoire de Laguerre  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$ , soumise aux restrictions suivantes:

- i) le chemin  $w$  ne contient pas de pas Est (c'est un *chemin de Dyck*), et
- ii) si  $(s_{i-1}, s_i)$  est un pas Nord-Est, alors  $p_i = 0$ .

En appliquant la bijection Françon-Viennot aux histoires d'Hermite, on obtient une classe de permutations en correspondance évidente avec les involutions sans points fixes. En fait, cette correspondance n'est pas autre chose que la "première transformation fondamentale", envoyant les cycles des permutations sur leurs éléments saillants (voir Foata [Fo]) et qui, dans ce cas, revient à enlever les parenthèses dans l'involution  $\tau$ , écrite sous forme (non standard) de produit de cycles disjoints, les cycles étant ordonnés par ordre décroissant des minima de cycles, chaque cycle commençant par son minimum.

Nous rappelons la correspondance de Françon-Viennot, restreinte aux histoires d'Hermite et composée avec la première transformation fondamentale, en la décrivant directement, comme dans l'article de P. Flajolet [Fla]. Dans la suite, nous aurons également besoin d'une variante de cette correspondance, obtenue en renversant l'ordre des "positions libres".

Soit  $h = (w; (p_1, \dots, p_{2n}))$ , une histoire d'Hermite de longueur  $2n$ . Nous construisons une involution sans points fixes  $\varphi_{gd}(h) = \tau$  (respectivement  $\varphi_{dg}(h) = \tau'$ ), sous forme standard de produit de 2-cycles disjoints, comme suit: en parcourant le chemin  $w$ , chaque fois que l'on rencontre un pas élémentaire  $(s_{i-1}, s_i)$  Nord-Est, on "ouvre" un nouveau cycle dans  $\tau$  (respectivement  $\tau'$ ) avec l'entier  $i$ , et chaque fois que l'on rencontre un pas  $(s_{i-1}, s_i)$  Sud-Est, on "referme" le  $(p_i + 1)$ -ième cycle "ouvert" avec l'entier  $i$ , les cycles encore ouverts étant numérotés de gauche à droite (respectivement de droite à gauche pour  $\varphi_{dg}(h)$ ).

Par exemple, si  $h = (w; (0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 0))$ , où  $w$  est le chemin de Dyck représenté dans la figure 3, on obtient  $\varphi_{gd}(h) = (1, 4)(2, 7)(3, 10)(5, 6)(8, 9)$  et  $\varphi_{dg}(h) = (1, 6)(2, 9)(3, 4)(5, 7)(8, 10)$ . On retrouve à la figure 4 les différentes étapes de la construction des involutions  $\varphi_{gd}(h)$  et  $\varphi_{dg}(h)$ , représentées graphiquement.

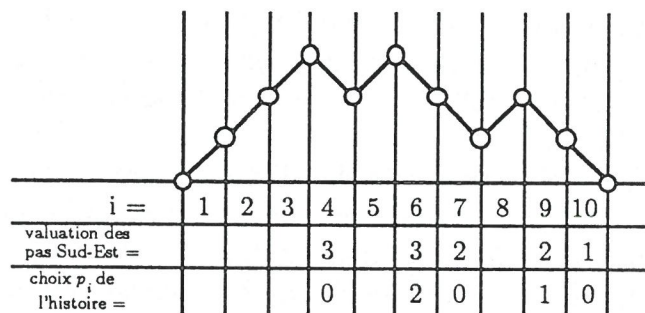


FIGURE 3: une histoire d'Hermite  $h = (w; (p_1, \dots, p_{10}))$ .

Les constructions décrites ci-haut s'expriment d'ailleurs très simplement en termes des représentations graphiques des involutions. En effet, l'opération "ouvrir un cycle" avec l'entier  $i$  correspond, du point de vue graphique, à décréter que le sommet  $i$  est l'extrémité gauche d'un arc dont l'autre extrémité reste à déterminer. Nous dirons dans ce cas que  $i$

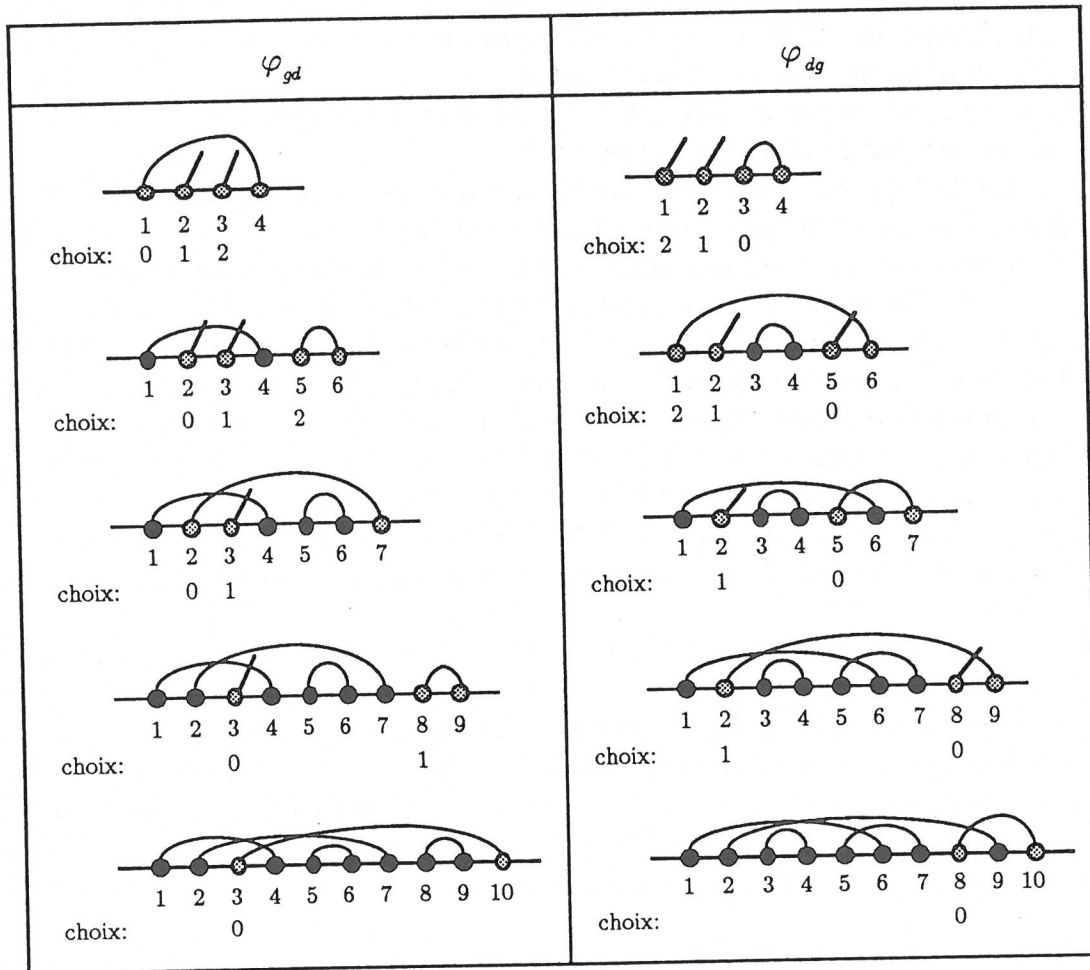


FIGURE 4: les bijection  $\varphi_{gd}$  et  $\varphi_{dg}$ .

est un *sommet pendent*. De même, “refermer un cycle” avec un entier  $i$  correspond à relier le sommet associé  $i$  à l’un des sommets pendants toujours libres qui le précèdent.

Il est clair que les applications  $\varphi_{gd}$  et  $\varphi_{dg}$  sont des bijections entre les histoires d’Hermite de longueur  $2n$  et l’ensemble  $INV[n]$  des involutions sans points fixes sur  $[2n]$ . Les détails sont laissés au lecteur.

D’après les résultats que nous avons cités dans l’introduction, ces bijections fournissent une preuve combinatoire du fait que les polynômes d’Hermite classiques, notés  $H_n(x)$ , dont les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes (1.1) sont  $b_k = 0$  et  $\lambda_k = k$ , ont pour moments d’ordre  $n$ , notés  $h_n$ , le nombre d’involutions sans points fixes sur l’ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ , c’est-à-dire:

$$h_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad h_{2n} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1). \tag{2.1}$$

On retrouve dans la littérature deux  $q$ -analogues classiques des polynômes d’Hermite (voir Désarménien [Dés] pour un historique), soient les *polynômes de  $q$ -Hermite de première sorte* ou *continus* (Rogers [Ro], Szegő [Sz], Cigler [Ci], Ismail, Stanton et Viennot [ISV],

Penaud [Pe]) ou les *polynômes de  $q$ -Hermite de deuxième sorte* ou *discrets* (Al Salam et Carlitz [ASCa], Askey, Cigler [Ci]).

Les premiers, que nous noterons  $H_n^I(x, q)$ , satisfont la récurrence linéaire à trois termes (1.1) pour  $b_k = 0$  et  $\lambda_k = [k]_q$ , et ont pour moments

$$h_{n,q}^I = \frac{1}{(1-q)^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j t_{n,j} q^{j(j+1)/2}, \quad (2.2)$$

où  $t_{n,j}$  désigne les nombres de Delannoy

$$t_{n,j} = \binom{2n}{n-j} - \binom{2n}{n-j-1} \quad (2.3)$$

(cf Riordan [Ri], Touchard [To]). De même, les  $q$ -polynômes d'Hermite de deuxième sorte, que nous noterons  $H_n^{II}(x, q)$ , satisfont la récurrence linéaire à trois termes pour les coefficients  $b_k = 0$  et  $\lambda_k = q^{k-1}[k]_q$ . Ils ont pour moments

$$h_{2n+1,q}^{II} = 0 \text{ et } h_{2n,q}^{II} = [1]_q \cdot [3]_q \cdot \dots \cdot [2n-1]_q, \quad (2.4)$$

le  $q$ -analogue naturel des moments  $h_n$  des polynômes d'Hermite classiques.

En introduisant des " $q$ -analogues" des histoires d'Hermite, correspondant aux deux  $q$ -analogues classiques des polynômes d'Hermite, nous allons maintenant exprimer les moments  $h_{n,q}^I$  et  $h_{n,q}^{II}$  en terme d'un certain  $q$ -comptage des involutions sans points fixes. Nous aurons besoin, pour ce faire, de quelques statistiques sur ces objets.

**DÉFINITIONS 2.1:** soit  $\tau \in INV[n]$ , une involution sans points fixes. On appelle *croisement* de  $\tau$  une paire  $((i, \tau(i)), (j, \tau(j)))$ , telle que  $1 \leq i < j < \tau(i) < \tau(j) \leq 2n$ . On dira que  $(i, \tau(i))$  (respectivement  $(j, \tau(j))$ ) est l'*arc initial* (respectivement l'*arc terminal*) de ce croisement.

De même, on appelle *paire imbriquée* de  $\tau$ , une paire  $((i, \tau(i)), (j, \tau(j)))$ , telle que  $1 \leq i < j < \tau(j) < \tau(i) \leq 2n$ . On dira de plus que  $(i, \tau(i))$  (respectivement  $(j, \tau(j))$ ) est l'*arc extérieur* (respectivement l'*arc intérieur*) de cette paire imbriquée.

Remarquons que ces deux définitions correspondent exactement aux croisements d'arcs ainsi qu'aux paires d'arcs imbriqués dans les représentations graphiques des involutions sans points fixes. Nous noterons respectivement  $cr(\tau)$  et  $pbr(\tau)$ , le nombre de croisements et le nombre de paires imbriquées de  $\tau \in INV[n]$ . Par exemple, pour

$$\tau = (1, 4)(2, 7)(3, 10)(5, 6)(8, 9),$$

qui est représentée graphiquement à la figure 2, on trouve  $cr(\tau) = 3$  et  $pbr(\tau) = 3$ . Par convention, l'involution vide ne contient aucun croisement ni paire imbriquée.

Finalement, nous poserons

$$Inv(\tau) = cr(\tau) + 2 \cdot pbr(\tau). \quad (2.5)$$

**PROPOSITION 2.2:** Avec les notations précédentes, on a les égalités suivantes:

$$i) \quad h_{2n,q}^I = \sum_{\tau \in INV[n]} q^{pbr(\tau)}, \quad (2.6)$$

$$= \sum_{\tau \in INV[n]} q^{cr(\tau)}; \quad (2.7)$$

$$ii) \quad h_{2n,q}^{II} = \sum_{\tau \in INV[n]} q^{Inu(\tau)}. \quad (2.8)$$

### DÉMONSTRATION:

i) Les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes des  $q$ -polynômes d'Hermite de première sorte étant égaux à  $b_k = 0$  et  $\lambda_k = [k]_q$ , on a

$$h_{2n,q}^I = \sum_h q^{som(h)}, \quad (2.9)$$

où la sommation parcourt l'ensemble des histoires d'Hermite  $h$  de longueur  $2n$ , et  $som(h)$  a été défini en (1.21). Pour démontrer la partie (i) de la proposition 2.2, il suffit donc de démontrer les égalités suivantes: si  $h = (w; (p_1, \dots, p_{2n}))$  est une histoire d'Hermite,

$$som(h) = pbr(\varphi_{gd}(h)), \quad (2.10)$$

pour l'égalité (2.6), et

$$som(h) = cr(\varphi_{dg}(h)), \quad (2.11)$$

pour l'indentité (2.7). Rappelons que  $som(h)$  désigne la somme des choix  $p_1 + \dots + p_{2n}$ .

Puisque par définition des histoires d'Hermite, le choix  $p_i$  correspondant à un pas élémentaire Nord-Est  $(s_{i-1}, s_i)$  doit nécessairement être nul, il suffit d'examiner ce qui se passe dans la construction des bijections  $\varphi_{gd}$  et  $\varphi_{dg}$  lorsque l'on rencontre un pas élémentaire  $(s_{i-1}, s_i)$  Sud-Est.

Supposons donc que l'on soit en train de construire  $\varphi_{gd}(h)$  (graphiquement) et que l'on soit arrivé dans la lecture de  $h$  à un pas élémentaire Sud-Est  $(s_{i-1}, s_i)$ , partant du niveau  $k$ . À cette étape de la construction, exactement  $k$  sommets inférieurs à  $i$  sont toujours pendants, alors que les  $i - k - 1$  sommets restant sont reliés entre eux. Selon les règles de construction, il faut alors ajouter un arc entre le sommet  $i$  et le  $(p_i + 1)$ -ième sommet pendant, ceux-ci étant numérotés de gauche à droite. Ainsi, les  $p_i$  sommets pendants  $j$ , se trouvant à gauche de l'extrémité gauche  $\varphi_{gd}(h)(i)$  de l'arc  $(\varphi_{gd}(h)(i), i)$ , seront reliés à un sommet  $\varphi_{gd}(h)(j)$  se trouvant à droite du sommet  $i$ , i.e. on aura les inégalités suivantes:

$$j < \varphi_{gd}(h)(i) < i < \varphi_{gd}(h)(j).$$

L'arc  $(\varphi_{gd}(h)(i), i)$  forme donc l'arc intérieur d'exactlyment  $p_i$  paires imbriquées dans  $\varphi_{gd}(h)$  (ce sont les seules). Comme tout pas élémentaire Sud-Est de l'histoire d'Hermite  $h$  correspond à un seul arc dans la représentation graphique de  $\varphi_{gd}(h)$ , cela signifie que

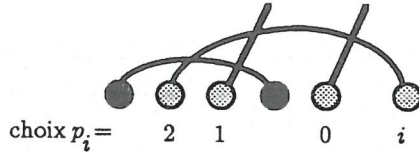


FIGURE 5: le choix  $p_i$  dans  $\varphi_{dg}$ .

$som(h) = p_1 + p_2 + \dots + p_{2n}$  est exactement égal au nombre de paires imbriquées de  $\varphi_{gd}(h)$ , et l'identité (2.6) est vérifiée.

De même, on peut montrer que pour  $\varphi_{dg}(h)$ , chaque pas Sud-Est  $(s_{i-1}, s_i)$  de  $h$  correspond un à un à un arc  $(\varphi_{dg}(h)(i), i)$ , formant l'arc initial d'exactly  $p_i$  croisements (voir la figure 5). Les détails sont laissés au lecteur.

ii) Il suffit d'établir l'égalité

$$\sum_{h=(w;(p_1, \dots, p_{2n}))} q^{som(h)} \cdot q^{nse(h)} = \sum_{\tau \in INV[n]} q^{Inv(\tau)}, \quad (2.12)$$

où, dans la sommation de gauche,  $h$  parcourt toutes les histoires d'Hermite de longueur  $2n$ ,

$$nse(h) = \sum_{\substack{(s_{i-1}, s_i) \\ \text{pas Sud-Est de } w}} (niv(w, i) - 1), \quad (2.13)$$

et  $niv(w, i)$  désigne le niveau de départ du  $i$ -ième pas élémentaire  $(s_{i-1}, s_i)$  de  $w$ .

Le fait que les moments  $h_{2n,q}^{II}$  soient égaux au membre de gauche de (2.12) découle du fait que les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes (1.1) des polynômes  $H_{n,q}^{II}(x)$  sont égaux à  $b_k = 0$  et  $\lambda_k = q^{k-1}[k]_q$ .

Appliquons la bijection  $\varphi_{gd}$  aux histoires d'Hermite  $h = (w; (p_1, \dots, p_{2n}))$  de longueur  $2n$ . Comme nous l'avons vu dans la démonstration de la partie (i), à la lecture d'un pas Sud-Est  $(s_{i-1}, s_i)$ , partant du niveau  $k$ , il y a exactement  $k$  sommets toujours pendants à gauche du sommet  $i$  dans la construction partielle de  $\varphi_{gd} = \tau$ . De plus, nous avons établi que les  $p_i$  sommets pendants se trouvant à gauche du sommet  $\tau(i)$ , correspondent aux arcs extérieurs de toutes les paires imbriquées dont l'arc intérieur est  $(\tau(i), i)$ . De même, on peut montrer que les  $k - 1 - p_i$  sommets pendants restant, se situant entre le sommet  $\tau(i)$  et le sommet  $i$ , correspondent aux arcs terminaux des croisements dont l'arc initial est  $(\tau(i), i)$ .

Ainsi, la bijection  $\varphi_{gd}$  envoie le paramètre " $som(h)$ " sur le paramètre " $pbr(\varphi_{gd}(h))$ ", et le paramètre " $nse(h)$ " sur " $pbr(\varphi_{gd}(h)) + cr(\varphi_{gd}(h))$ ", ce qui démontre (2.12). Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

Remarquons qu'un lemme direct sur les involutions permet alors de retrouver la relation (2.4) à partir de (2.5) et (2.8).

### 3. UNE NOUVELLE DÉFINITION DES INVERSIONS D'UNE PERMUTATION

Dans cette section, nous allons introduire une décomposition des permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  en deux involutions sans points fixes (essentiellement en séparant les excédances ( $i < \sigma(i)$ ))

et les non-excédances ( $i \geq \sigma(i)$ ) de la permutation) et nous exprimerons ensuite le nombre d'inversions classique de  $\sigma$  en terme de la statistique  $Inv$  sur les involutions, définie en (2.5) de la section 2.

Soit donc  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , une permutation sur l'ensemble  $[n]$ . La *représentation graphique* de  $\sigma$  se construit de la manière suivante: on prend  $2n$  sommets numérotés de gauche à droite par  $1^-, 1^+, 2^-, 2^+, \dots, n^-, n^+$  (on décide que  $1^- < 1^+ < 2^- < 2^+ < \dots < n^- < n^+$ ). On trace un arc du point  $i^+$  au point  $j^-$  si et seulement si  $\sigma(i) = j$ . De plus, si  $i < j$ , l'arc devra passer au-dessus de tous les sommets (on dira alors que c'est un *arc supérieur*) et si  $i \geq j$ , l'arc passera plutôt en dessous des points (*arc inférieur*). Par exemple, si

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

la représentation graphique de  $\sigma$  est illustrée à la figure 6.

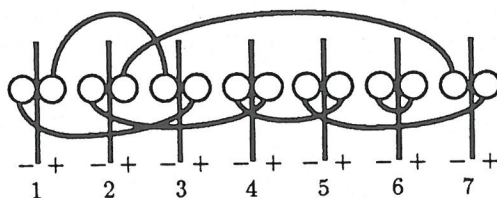


FIGURE 6: représentation graphique d'une permutation  $\sigma$ .

Nous noterons  $\sigma_{exc}$  (respectivement  $\sigma_{nex}$ ), l'involution sans points fixes (qui aura comme support un sous-ensemble de  $\{1^-, 1^+, 2^-, 2^+, \dots, n^-, n^+\}$ ) dont la représentation graphique est formée par les arcs supérieurs (respectivement inférieurs) et leurs extrémités dans la représentation graphique de  $\sigma$ . Dans l'exemple précédent, on obtient  $\sigma_{exc} = (1^+, 3^-)(2^+, 7^-)$  et  $\sigma_{nex} = (1^-, 3^+)(2^-, 4^+)(4^-, 5^+)(5^-, 7^+)(6^-, 6^+)$ . Notons

$$exc(\sigma) = |\{1 \leq i \leq n \mid i < \sigma(i)\}|, \quad (3.1)$$

$$= \text{nombre d'arcs supérieurs dans la représentation graphique de } \sigma. \quad (3.2)$$

La statistique classique d'inversions sur la permutation  $\sigma$  s'exprime élégamment en terme des croisements et paires imbriquées de  $\sigma_{exc}$  et  $\sigma_{nex}$ .

**LEMME 3.1:** *Pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , avec les notations précédentes,*

$$inv(\sigma) = exc(\sigma) + Inv(\sigma_{exc}) + Inv(\sigma_{nex}). \quad (3.3)$$

Par exemple, pour la permutation  $\sigma$  dont la représentation graphique est donnée dans la figure 6, on calcule  $inv(\sigma) = 8$ ,  $exc(\sigma) = 2$ ,  $Inv(\sigma_{exc}) = 1$ , et  $Inv(\sigma_{nex}) = 3 + 2$ .

**DÉMONSTRATION:** (par récurrence sur  $n$  puis sur la position de  $n$  dans la permutation)

Le cas initial  $n = 0$  est trivial. Supposons donc que l'identité (3.3) soit vérifiée pour toute permutation  $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n) \in \mathfrak{S}_n$ , et montrons que quelle que soit la façon d'insérer  $n + 1$  dans  $\sigma$  pour obtenir  $\sigma' \in \mathfrak{S}_{n+1}$ , l'identité (3.3) est conservée.

a) Si la permutation  $\sigma'$  est obtenue de  $\sigma$  de la manière suivante:

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } 1 \leq i \leq n, \\ n+1 & \text{si } i = n+1, \end{cases}$$

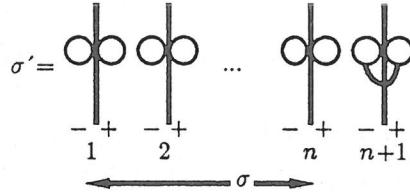


FIGURE 7: cas (a) du lemme 3.1.

on a clairement (voir figure 7),  $inv(\sigma') = inv(\sigma)$ ,  $exc(\sigma') = exc(\sigma)$ ,  $Inv(\sigma'_{exc}) = Inv(\sigma_{exc})$  et  $Inv(\sigma'_{nex}) = Inv(\sigma_{nex})$ , donc par induction

$$inv(\sigma') = exc(\sigma') + Inv(\sigma'_{exc}) + Inv(\sigma'_{nex}).$$

b) Supposons maintenant que l'identité (3.3) est vérifiée pour

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n & n+1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(k) & n+1 & \dots & \sigma(n) & \sigma(n+1) \end{pmatrix},$$

et montrons que (3.3) est aussi vérifiée pour

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma \circ (k, k+1), \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n & n+1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & n+1 & \sigma(k) & \dots & \sigma(n) & \sigma(n+1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarquons que la permutation  $\sigma'$  possède une inversion de plus que  $\sigma$ :  $\sigma'(k) = n+1 > \sigma(k) = \sigma'(k+1)$ . Donc, pour démontrer (3.3), il suffit de montrer que

$$exc(\sigma') + Inv(\sigma'_{exc}) + Inv(\sigma'_{nex}) = exc(\sigma) + Inv(\sigma_{exc}) + Inv(\sigma_{nex}) + 1. \quad (3.4)$$

Il y a quatre sous-cas à considérer, pour lesquels un dessin suffit à illustrer les variations des différentes statistiques  $exc$  et  $Inv$ .

- b.1)  $k+1 = n+1$  et  $\sigma(k) \leq n$ ,
- b.2)  $k+1 < n+1$  et  $\sigma(k) \leq k$ ,
- b.3)  $k+1 < n+1$  et  $\sigma(k) > k+1$ ,
- b.4)  $k+1 < n+1$  et  $\sigma(k) = k+1$ .

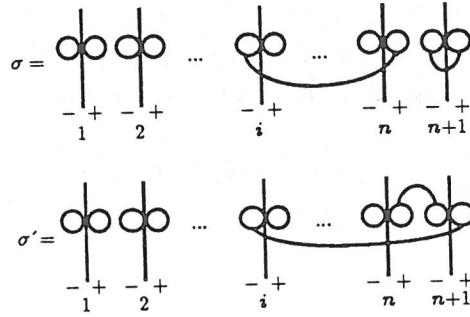


FIGURE 8: sous-cas (b.1) du lemme 3.1.

cas b.1)  $k + 1 = n + 1$  et  $\sigma(k) \leq n$  (figure 8).

En comparant  $\sigma$  à  $\sigma'$ , on constate que  $exc(\sigma') = exc(\sigma) + 1$ ,  $Inv(\sigma'_{exc}) = Inv(\sigma_{exc})$  et  $Inv(\sigma'_{nex}) = Inv(\sigma_{nex})$ . La permutation  $\sigma'$  contient l'excédance supplémentaire  $\sigma'(n) = n + 1$ .

cas b.2)  $k + 1 < n + 1$  et  $\sigma(k) \leq k$  (figure 9).

Comparons  $\sigma'$  à  $\sigma$ . Si  $j = \sigma^{-1}(k + 1) < k$ , l'arc supérieur  $(j^+, (k + 1)^-)$  apparaît dans les représentations graphiques de  $\sigma$  et  $\sigma'$ . La permutation  $\sigma'$  contient alors un croisement (supérieur) de plus que  $\sigma$ , à savoir le croisement entre les arcs  $(j^+, (k + 1)^-)$  et  $(k^+, (n + 1)^-)$ . On a donc  $exc(\sigma') = exc(\sigma)$ ,  $Inv(\sigma'_{exc}) = Inv(\sigma_{exc}) + 1$  et  $Inv(\sigma'_{nex}) = Inv(\sigma_{nex})$ .

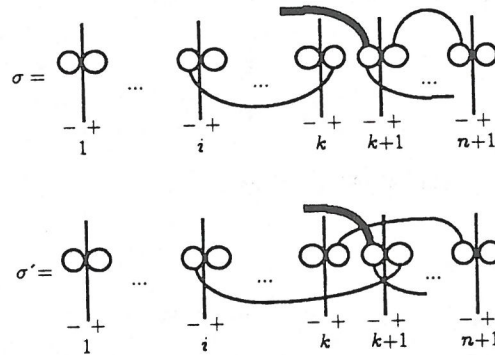


FIGURE 9: sous-cas (b.2) du lemme 3.1.

Inversement, si  $j = \sigma^{-1}(k + 1) > k + 1$ , il y a un nouveau croisement (inférieur) entre les arcs  $((k + 1)^-, j^+)$  et  $(i^-, (k + 1)^+)$  dans  $\sigma'$ . Ainsi  $exc(\sigma') = exc(\sigma)$ ,  $Inv(\sigma'_{exc}) = Inv(\sigma_{exc})$  et  $Inv(\sigma'_{nex}) = Inv(\sigma_{nex}) + 1$ .

cas b.3)  $k + 1 < n + 1$  et  $\sigma(k) > k + 1$  (figure 10).

Le croisement de l'arc  $(k^+, i^-)$  avec l'arc  $((k + 1)^+, (n + 1)^-)$  dans la représentation graphique de  $\sigma$  devient la paire imbriquée entre les arcs  $(k^+, (n + 1)^-)$  et  $((k + 1)^+, i^-)$  dans  $\sigma'$ , qui compte double dans la statistique  $Inv$ . Les autres croisements ou paires imbriquées de  $\sigma$  sont préservés entre eux, ou avec l'un ou l'autre des arcs  $(k^+, (n + 1)^-)$  et  $((k + 1)^+, i^-)$  de  $\sigma'$ . Ainsi  $exc(\sigma') = exc(\sigma)$ ,  $Inv(\sigma'_{exc}) = Inv(\sigma_{exc}) + 1$  et  $Inv(\sigma'_{nex}) = Inv(\sigma_{nex})$ .



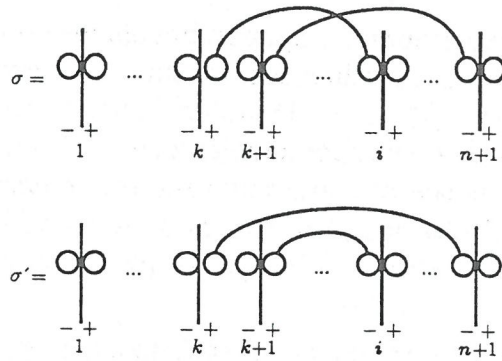


FIGURE 10: sous-cas (b.3) du lemme 3.1.

cas b.4)  $k + 1 < n + 1$  et  $\sigma(k) = k + 1$  (figure 11).

Dans ce cas, on retrouve un arc supérieur de moins dans la représentation graphique de  $\sigma'$  que dans celle de  $\sigma$ , reflétant l'excédance perdue  $k + 1 < \sigma(k + 1) = n + 1$ , devenue  $\sigma'(k + 1) = k + 1$ .

Ensuite, les croisements et paires imbriquées entre les arcs supérieurs de la représentation graphique de  $\sigma'$  sont tous conservés, sauf les paires imbriquées de  $\sigma_{exc}$  qui avaient  $(k^+, (k + 1)^-)$  comme arc intérieur.

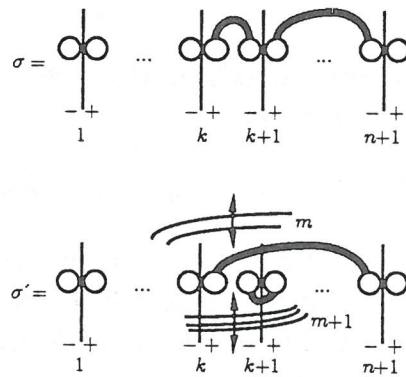


FIGURE 11: sous-cas (b.4) du lemme 3.1.

L'argument de la preuve repose sur le fait suivant: il passe autant d'arcs supérieurs au-dessus de deux sommets successifs  $k^+, (k + 1)^-$ , dans la représentation graphique d'une permutation  $\sigma$ , qu'il ne passe d'arcs inférieurs en dessous de ces deux points. En effet, on peut faire correspondre bijectivement à chaque arc supérieur  $(j_0^+, l_0^-)$  tel que  $j_0 \leq k < k + 1 \leq l_0$ , un unique arc inférieur  $(l_1^-, j_1^+)$ , satisfaisant les inégalités  $l_1 \leq k < k + 1 \leq j_1$ , en suivant simplement les cycles de la permutation  $\sigma$ . En fait, on prend  $j_1 = \sigma^i(j_0)$  et  $l_1 = \sigma^i(l_0)$ , où  $i$  est le plus petit entier pour lequel l'inégalité suivante est vérifiée:  $\sigma^i(l_0) \leq k < k + 1 \leq \sigma^i(j_0)$ .

Notons  $m$  le nombre d'arcs  $(j^+, l^-)$  tels que  $j < k < k + 1 < l$ , dans la permutations  $\sigma$ . En comptant l'arc  $(k^+, (k + 1)^-)$ , il y a exactement  $m + 1$  arcs passant au-dessus des sommets  $k^+$  et  $(k + 1)^-$  dans la représentation graphique de  $\sigma$ , et de même pour la permutation  $\sigma'$ , en comptant l'arc  $(k^+, (n + 1)^-)$ . Lors du passage de  $\sigma$  à  $\sigma'$ , on a déjà fait

remarquer que parmi les arcs supérieurs,  $m$  paires imbriquées sont perdues. Du côté des arcs inférieurs, les croisements et paires imbriquées existant sont conservés. Par contre, par ce qui précède, le nouvel arc  $((k+1)^-, (k+1)^+)$  de  $\sigma'$  forme l'arc intérieur d'exactlyment  $m+1$  nouvelles paires imbriquées (correspondant aux  $m+1$  arcs qui passent en dessous des points  $k^+$  et  $(k+1)^-$ ), et ne cause aucun nouveau croisement.

Ainsi  $exc(\sigma') = exc(\sigma) - 1$ ,  $Inv(\sigma'_{exc}) = Inv(\sigma_{exc}) - 2m$  et  $Inv(\sigma'_{nex}) = Inv(\sigma_{nex}) + 2(m+1)$  où  $m$  désigne le nombre d'arcs  $(j^+, l^-)$  tels que  $j < k < k+1 < l$ .  $\square$

#### 4. HISTOIRES DE LAGUERRE SUBDIVISÉES ET TASSEMENT

Une fonctionnelle linéaire  $f$  est dite *symétrique* si ses moments d'ordre impair,  $\mu_{2n+1} = f(x^{2n+1})$  sont tous nuls. Entre autres, les polynômes d'Hermite et leurs  $q$ -analogues, que nous avons étudiés dans la section 2, possèdent une fonctionnelle linéaire symétrique.

Soit  $S_n(x)$  une famille de polynômes orthogonaux unitaires associée à une fonctionnelle linéaire symétrique. On peut montrer qu'alors les coefficients  $b_k$  de la récurrence linéaire à trois termes (1.1) satisfaite par  $S_n(x)$  sont tous égaux à zéro. De même, cette famille est aussi caractérisée par l'identité

$$S_n(-x) = (-1)^n S_n(x), \quad (4.1)$$

pour tout  $n \geq 0$ .

Cette dernière propriété permet de définir deux suites de polynômes unitaires  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  et  $\{Q_n(x)\}_{n \geq 0}$ , par les relations

$$S_{2n}(x) = P_n(x^2) \quad \text{et} \quad S_{2n+1}(x) = xQ_n(x^2). \quad (4.2)$$

Or, il se trouve que les polynômes  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$  eux-mêmes forment aussi des classes de polynômes orthogonaux. De plus, si  $\nu_n$  désigne les moments associés aux polynômes  $P_n(x)$ , et  $\nu_n^+$  désigne les moments associés aux polynômes  $Q_n(x)$ , alors ces deux suites de moments sont reliées entre elles par la relation

$$\nu_n^+ = \nu_{n+1}. \quad (4.3)$$

Ce passage des polynômes  $P_n(x)$  aux polynômes  $Q_n(x)$  est un cas particulier des "kernel polynomials" (cf Chihara [Chi]), définis plus généralement comme étant des polynômes  $P_n^+(x, c)$ , orthogonaux par rapport aux moments  $\nu_n' = \nu_{n+1} - c\nu_n$ .

Il existe aussi une relation entre les moments des polynômes  $S_n(x)$ , notés  $\mu_n$ , et ceux des polynômes  $P_n(x)$ : pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\mu_{2n} = \nu_n. \quad (4.4)$$

Dans cette section, nous exhibons des bijections classiques de tassement (cf Viennot, chapitre 5 [Vi1]), entre des chemins de Dyck de longueur  $2n$  et certains chemins de Motzkin colorés de longueur  $n$  ou  $n-1$ . Ces bijections permettent de démontrer combinatoirement les relations (4.3) et (4.4), entre les moments des polynômes  $S_n(x)$  et ceux des polynômes

associés  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$ . Nous les étendons ensuite aux histoires de Laguerre subdivisées et usuelles.

Soit  $w = (s_0, s_1, \dots, s_{2n})$  un chemin de Dyck de longueur  $2n$ . Il existe deux manières naturelles de le contracter en un chemin de Motzkin coloré.

La première consiste à lire les pas élémentaires de  $w$  de deux en deux, et à les remplacer par un seul pas élémentaire selon les règles suivantes:

- (i) si  $(s_{2i}, s_{2i+1})$  et  $(s_{2i+1}, s_{2i+2})$  sont deux pas Nord-Est, alors ils sont remplacés par un pas élémentaire  $(s_i^*, s_{i+1}^*)$  Nord-Est;
- (ii) si  $(s_{2i}, s_{2i+1})$  et  $(s_{2i+1}, s_{2i+2})$  sont deux pas Sud-Est, alors ils sont remplacés par un pas élémentaire  $(s_i^*, s_{i+1}^*)$  Sud-Est;
- (iii) si  $(s_{2i}, s_{2i+1})$  est un pas Nord-Est et  $(s_{2i+1}, s_{2i+2})$  est un pas Sud-Est, ils sont remplacés par un pas élémentaire  $(s_i^*, s_{i+1}^*)$  Est rouge; et
- (iv) si  $(s_{2i}, s_{2i+1})$  est un pas Sud-Est et  $(s_{2i+1}, s_{2i+2})$  est un pas Nord-Est, ils sont remplacés par un pas élémentaire  $(s_i^*, s_{i+1}^*)$  Est bleu.

Notons  $\Theta(w) = (s_0^*, s_1^*, \dots, s_n^*) = w^*$  le nouveau chemin obtenu. Remarquons que si le pas élémentaire  $(s_{2i}, s_{2i+1})$  (qui part toujours d'un niveau pair) part du niveau  $2l$ , alors le pas élémentaire correspondant  $(s_i^*, s_{i+1}^*)$  dans  $\Theta(w)$  part du niveau  $l$ .

**PROPOSITION 4.1:** *L'application de tassement  $\Theta$  décrite ci-haut constitue une bijection entre les chemins de Dyck de longueur  $2n$  et les chemins de Motzkin colorés de longueur  $n$ , sans pas Est bleu au niveau 0.*

*De plus, le niveau de départ d'un pas élémentaire  $(s_i^*, s_{i+1}^*)$  dans le tassement  $\Theta(w) = (s_0^*, s_1^*, \dots, s_n^*)$  est égal au niveau de départ du pas  $(s_{2i}, s_{2i+1})$  correspondant dans  $w$  divisé par 2.*

La deuxième façon de contracter des chemins de Dyck de longueur  $2n$  consiste à effacer le premier et le dernier pas du chemin (le premier étant obligatoirement un pas Nord-Est et le dernier un pas Sud-Est), à lire les pas restant de deux en deux et à appliquer la même règle de substitution des couples de pas élémentaires que  $\Theta$ . On obtient cette fois une bijection  $\Theta^+$  entre les chemins de Dyck de longueur  $2n + 2$  et les chemins de Motzkin colorés quelconques de longueur  $n$ .

Par exemple, si  $w$  désigne le chemin de Dyck de la figure 12, alors  $\Theta(w)$  et  $\Theta^+(w)$  sont décrits dans les figures 13 et 14 respectivement.

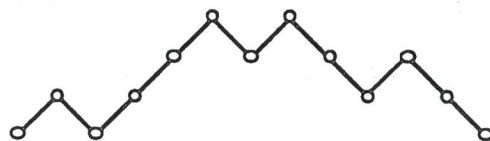


FIGURE 12: chemin de Dyck.

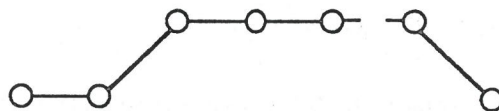


FIGURE 13: la bijection  $\Theta$  appliquée à la figure 12.

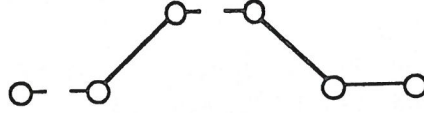


FIGURE 14: la bijection  $\Theta^+$  appliquée à la figure 12.

Soit  $\{\gamma_k\}_{k \geq 1}$ , une suite de scalaires à valeurs dans un anneau  $K$ . Soit  $v$  la valuation des chemins de Dyck  $w = (s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ , définie comme dans la théorie classique des polynômes orthogonaux, par

$$v(s_i, s_{i+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (s_i, s_{i+1}) \text{ est un pas Nord-Est,} \\ \gamma_k & \text{si } (s_i, s_{i+1}) \text{ est un pas Sud-Est partant du niveau } k. \end{cases} \quad (4.5)$$

On peut alors transporter aisément les valuations des pas élémentaires, le long de  $\Theta$  et de  $\Theta^+$ , par les relations respectives:

$$v'(s_i^*, s_{i+1}^*) = v(s_{2i}, s_{2i+1}) \cdot v(s_{2i+1}, s_{2i+2}), \quad (4.6)$$

pour  $\Theta$ , et

$$v^+(s_i^*, s_{i+1}^*) = v(s_{2i+1}, s_{2i+2}) \cdot v(s_{2i+2}, s_{2i+3}), \quad (4.7)$$

pour  $\Theta^+$ .

Plus exactement, le long de  $\Theta$ , on obtient comme suites  $\{a_k\}$ ,  $\{b'_k\}$ ,  $\{b''_k\}$ ,  $\{c_k\}$ , associées à la valuation des chemins de Motzkin colorés, définie en (1.9) et (1.10)

$$a_k = 1, \quad b'_k = \gamma_{2k}, \quad b''_k = \gamma_{2k+1}, \quad c_k = \gamma_{2k} \gamma_{2k-1}, \quad (4.8)$$

et le long de  $\Theta^+$ ,

$$a_k^+ = 1, \quad b_k'^+ = \gamma_{2k+1}, \quad b_k''^+ = \gamma_{2k+2}, \quad c_k^+ = \gamma_{2k+1} \gamma_{2k}, \quad (4.9)$$

où, par convention,  $\gamma_0 = 0$ .

Les identités suivantes découlent, pour tout chemin de Dyck  $w$ :

$$v(w) = v'(\Theta(w)), \quad \text{et} \quad v(w) = \gamma_1 \cdot v^+(\Theta^+(w)). \quad (4.10)$$

**THÉORÈME 4.2:** Soit  $S_n(x)$ , la famille de polynômes orthogonaux dont les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes (1.1) sont  $b_k = 0$  et  $\lambda_k = \gamma_k$ , et dont les moments sont donnés par

$$\mu_n = \sum_w v(w), \quad (4.11)$$

où  $w$  parcourt l'ensemble des chemins de Dyck de longueur  $n$  et  $v$  est la valuation définie en (4.5). Soient  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$  les familles de polynômes orthogonaux définies par les relations (4.2).

Alors les moments associés aux polynômes  $P_n(x)$  sont donnés par

$$\nu_n = \sum_w v'(w), \quad (4.12)$$

où  $w$  parcourt tous les chemins de Motzkin colorés de longueur  $n$  et  $v'$  désigne la valuation définie en (4.6).

De même, les moments des polynômes  $Q_n(x)$  sont donnés par

$$\nu_n^+ = \nu_{n+1} = \sum_w v^+(w), \quad (4.13)$$

où  $w$  parcourt tous les chemins de Motzkin colorés de longueur  $n$  et  $v^+$  est la valuation définie en (4.7).

Le lecteur est référé au chapitre 5 de [Vi1] pour la démonstration de ce théorème.

En utilisant la théorie des polynômes orthogonaux et les bijections de tassement  $\Theta$  et  $\Theta^+$ , X.G. Viennot [Vi2] a donné une interprétation combinatoire de l'algorithme quotient-différence (ou QD-algorithme) (cf Stieltjes [Sti], Rutishauser [Ru], Henrici [Hen1, Hen2], Brezinski [Bre], Gragg [Gr]). Cet algorithme permet de calculer les coefficients  $\gamma_k$  d'une fraction continue de type Stieltjes (voir formule (1.24)) à partir des coefficients  $\mu_n$  de sa série génératrice.

Appelons *polynômes de Laguerre subdivisés*, les polynômes  $S_n(x)$  orthogonaux par rapport à la fonctionnelle linéaire symétrique correspondant aux moments

$$\mu_{2n} = n! \quad \text{et} \quad \mu_{2n+1} = 0. \quad (4.14)$$

La suite  $\{\gamma_k\}_{k \geq 1}$  associée à la valuation (4.5) des chemins de Dyck, interprétant combinatoirement ces moments (cf (4.11)), est donnée par

$$\gamma_k = \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor. \quad (4.15)$$

Les classes de polynômes associées,  $P_n(x)$  et  $Q_n(x)$ , ne sont pas autre chose que les polynômes de Laguerre classiques  $P_n(x) = L_n^{(0)}(x)$  et  $Q_n(x) = L_n^{(1)}(x)$ . En effet, par le tassement  $\Theta$ , les valuations des chemins de Motzkin colorés obtenus sont, d'après les égalités (4.8),

$$a_k = 1, \quad b'_k = k, \quad b''_k = k+1, \quad \text{et} \quad c_k = k^2. \quad (4.16)$$

D'autre part, ces valuations satisfont bien les identités (1.11) et (1.12) de la section 1 pour les coefficients  $b_k^{(1)}$  et  $\lambda_k^{(1)}$  définis en (1.2). En vertu des résultats énoncés dans la section 1, la classe de polynômes orthogonaux associée  $P_n(x)$  correspond donc aux polynômes de Laguerre avec le paramètre  $\alpha = 0$ . Un raisonnement similaire montre que  $Q_n(x) = L_n^{(1)}(x)$ .

Définissons une *histoire de Laguerre subdivisée*  $h_s$  de longueur  $2n$ , comme la donnée d'une paire  $h_s = (w; (p_1, \dots, p_{2n}))$  où  $w = (s_0, \dots, s_{2n})$  est un chemin de Dyck de longueur  $2n$  et la suite d'entiers  $(p_1, \dots, p_{2n})$  est telle que

$$0 \leq p_i \leq \begin{cases} 0 & \text{si } (s_{i-1}, s_i) \text{ est un pas Nord-Est,} \\ \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor - 1 & \text{si } (s_{i-1}, s_i) \text{ est un pas Sud-Est partant du niveau } k. \end{cases} \quad (4.17)$$

Nous dirons que le  $i$ -ième choix  $p_i$  est *significatif* si  $(s_{i-1}, s_i)$  est un pas Sud-Est (par opposition aux choix  $p_i$  correspondant aux pas Nord-Est qui sont nécessairement nuls).

Il y a  $n!$  histoires de Laguerre subdivisées de longueur  $2n$ , et aussi  $n!$  histoires de Laguerre de longueur  $n$ . À partir de  $\Theta$ , nous construisons une bijection entre les histoires de Laguerre subdivisées et les histoires de Laguerre classiques. Cependant, remarquons que d'après (4.16),  $\Theta$  conduit à des valuations  $a_k = 1$  et  $c_k = k^2$  des chemins de Motzkin, plutôt que les valeurs  $a_k^{(1)} = k + 1$  et  $c_k^{(1)} = k$ , correspondant aux histoires de Laguerre usuelles. C'est pour cette raison que nous allons effectuer une manipulation sur les choix  $p_i$ , avant de tasser les chemins de Dyck associés aux histoires de Laguerre subdivisées.

En fait, cette manipulation correspond, au niveau des chemins valués, à modifier la valuation (4.5) des chemins de Dyck. Plutôt que de donner une valuation égale à 1 aux pas élémentaires Nord-Est partant du niveau  $k$ , nous leur donnons une valuation  $\alpha_k$ . Ceci modifie légèrement les valuations (4.8) et (4.9) obtenues le long des applications  $\Theta$  et  $\Theta^+$ . Nous n'entrerons pas ici dans ces détails.

Soit  $w = (s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ , un chemin de Dyck. Pour tout entier  $k$ , le chemin  $w$  contient autant de pas élémentaires Nord-Est partant du niveau  $k$  que de pas élémentaires Sud-Est partant du niveau  $k + 1$ . Si  $(s_i, s_{i+1})$  désigne un pas Sud-Est partant du niveau  $k + 1$  dans  $w$ , nous lui associerons bijectivement le pas élémentaire Nord-Est  $NE(s_i, s_{i+1})$ , partant du niveau  $k$ , qui est le "plus rapproché" de lui par la gauche. Plus exactement,  $NE(s_i, s_{i+1}) = (s_{j_0}, s_{j_0+1})$ , où

$$j_0 = \max\{j \mid 0 \leq j < i, (s_j, s_{j+1}) \text{ est un pas Nord-Est partant du niveau } k\}. \quad (4.18)$$

Soit donc  $h_s = (w; (p_1, \dots, p_n))$ , une histoire de Laguerre subdivisée de longueur  $2n$ . Nous construisons  $\Theta h(h_s) = h^* = (w^*; (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*))$ , une histoire de Laguerre de longueur  $n$ , de la manière suivante:

- i) pour chaque pas Sud-Est  $(s_{i-1}, s_i)$  de  $w$  dans une bande de hauteur  $2l$  à  $2l + 1$  (i.e. partant du niveau  $2l + 1$ ), échangeons la valeur du choix  $p_i$  avec celle du choix associé à  $NE(s_{i-1}, s_i)$ .

Par exemple, si  $h_s$  est l'histoire de Laguerre subdivisée décrite dans la figure 15, on obtient comme nouveaux choix  $p_i$  (notés  $\tilde{p}_i$ ) la deuxième ligne de choix de la figure 15. Nous avons encadré les choix  $p_i$  significatifs, pour souligner le fait que cette opération a pour effet de les redistribuer comme premier, troisième, ..., et  $(2n - 1)$ -ième choix. Remarquons que ces nouveaux choix varient maintenant dans les intervalles suivant:

$$0 \leq \tilde{p}_i \leq \begin{cases} l, & \text{si } (s_{i-1}, s_i) \text{ part du niveau } 2l, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.19)$$

- ii) nous appliquons alors la bijection  $\Theta$  au chemin  $w$ , obtenant ainsi un chemin de Motzkin coloré  $\Theta(w) = w^*$ , sans pas élémentaires Est bleu au niveau 0, et nous conservons seulement les choix  $\tilde{p}_i$  tels que  $i$  est impair, i.e.  $(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_3, \dots, \tilde{p}_{2n-1})$ .

L'histoire de Laguerre ainsi obtenue est notée  $\Theta h(h_s)$ . Dans l'exemple de la figure 15,  $\Theta h(h_s) = (w^*; (0, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 0))$ , où  $w^*$  est le chemin illustré à la figure 16.

**PROPOSITION 4.3:** *L'application  $\Theta h$  de tassement définie ci-haut constitue une bijection entre les histoires de Laguerre subdivisées de longueur  $2n$  et les histoires de Laguerre de longueur  $n$ .*

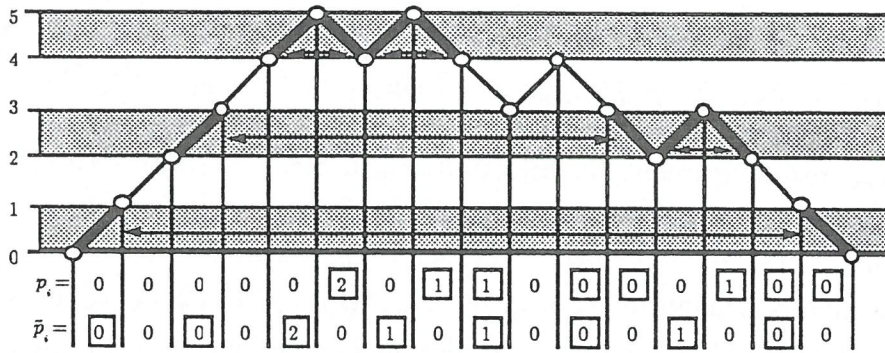


FIGURE 15: redistribution des  $p_i$  significatifs dans une histoire de Laguerre subdivisée  $h_s$ .

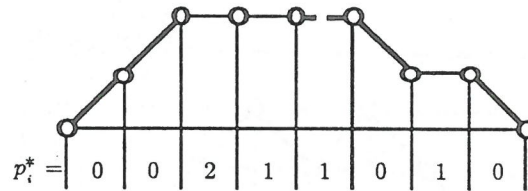


FIGURE 16: la bijection  $\Theta h$  appliquée à l'histoire  $h_s$  de la figure 15.

## 5. LA BIJECTION DE FOATA-ZEILBERGER ET LES MOMENTS DES $q$ -POLYNÔMES DE LAGUERRE

Dans cette section, nous rassemblons les constructions introduites dans les sections 2, 3 et 4, pour reconstituer la bijection de D. Foata et D. Zeilberger [FoZe] entre les permutations et les histoires de Laguerre.

Nous enrichissons ensuite cette bijection d'une  $q$ -pondération, différente de celle de l'article [FoZe] (qui est relative à la statistique Mahonienne de Denert), ce qui nous permettra de démontrer le théorème 5.4, à savoir que la classe des polynômes  $L_{n,q}^{(\beta-1)}(x)$ , orthogonaux par rapport aux moments (1.5), satisfait la récurrence linéaire à trois termes (1.1) pour les coefficients  $b_{k,q}^{(\beta)}$  et  $\lambda_{k,q}^{(\beta)}$  donnés en (1.8).

DESCRIPTION EN QUATRE ÉTAPES DE LA BIJECTION FOATA-ZEILBERGER:

*Première étape:* Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , prenons par exemple

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 8 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nous séparons  $\sigma$  en deux involutions sans points fixes  $\sigma_{exc}$  et  $\sigma_{nex}$ , tel que décrit dans la section 3. Dans l'exemple, on obtient la décomposition suivante:

$$\sigma_{exc} = (1^+, 6^-)(2^+, 5^-)(5^+, 8^-), \quad \text{et} \quad \sigma_{nex} = (1^-, 6^+)(2^-, 4^+)(3^-, 3^+)(4^-, 8^+)(7^-, 7^+).$$

*Deuxième étape:* Aux deux involutions sans points fixes  $(\sigma_{exc}, \sigma_{nex})$ , nous associons le quadruplet  $(h_{exc}, h_{nex}; Supp_{exc}, Supp_{nex})$ , dans lequel  $h_{exc} = (w_{exc}; (p'_1, p'_2, \dots, p'_{2k}))$  et

$h_{nex} = (w_{nex}; (p''_1, p''_2, \dots, p''_{2(n-k)}))$  sont deux histoires d'Hermite, respectivement égales à  $h_{exc} = \varphi_{gd}^{-1}(\sigma_{exc})$  et  $h_{nex} = \varphi_{gd}^{-1}(\sigma_{nex})$ , et  $Supp_{exc} = \{a_1, a_2, \dots, a_{2k}\}$  et  $Supp_{nex} = \{b_1, b_2, \dots, b_{2(n-k)}\}$  sont les sous-ensembles de  $\{1^-, 1^+, \dots, n^-, n^+\}$  formant les supports de  $\sigma_{exc}$  et de  $\sigma_{nex}$  respectivement (la bijection  $\varphi_{gd}$  a été introduite dans la section 2). Nous supposons que  $a_1 < a_2 < \dots < a_{2k}$ , et que  $b_1 < b_2 < \dots < b_{2(n-k)}$ .

Dans l'exemple, nous obtenons  $h_{exc} = (w_{exc}; (p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_5, p'_6)) = (w_{exc}; (0, 0, 1, 0, 0, 0))$ , où  $w_{exc}$  est illustré à la figure 17,  $h_{nex} = (w_{nex}; (p''_1, p''_2, p''_3, p''_4, p''_5, p''_6, p''_7, p''_8, p''_9, p''_{10})) = (w_{nex}; (0, 0, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 0))$ , où  $w_{nex}$  est donné dans la figure 18,  $Supp_{exc} = \{1^+, 2^+, 5^-, 5^+, 6^-, 8^-\}$ , et  $Supp_{nex} = \{1^-, 2^-, 3^-, 3^+, 4^-, 4^+, 6^+, 7^-, 7^+, 8^+\}$ .

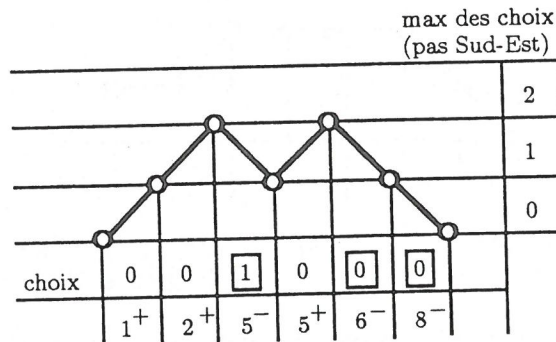


FIGURE 17: chemin  $w_{exc}$  et histoire  $h_{exc}$ .

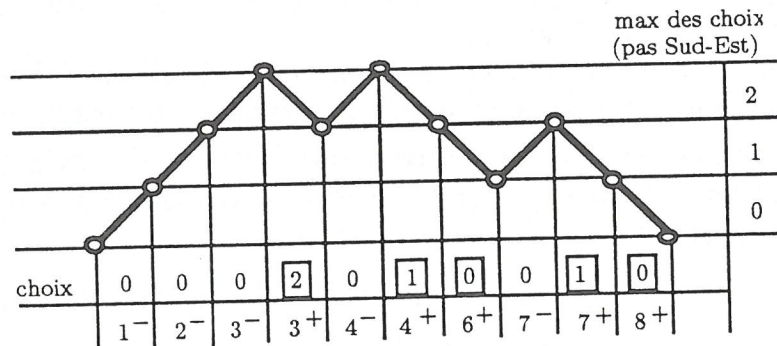


FIGURE 18: chemin  $w_{nex}$  et histoire  $h_{nex}$ .

Les quadruplets  $(h_{exc}, h_{nex}; Supp_{exc}, Supp_{nex})$  sont caractérisés par les conditions suivantes:

- 1)  $(Supp_{exc}, Supp_{nex})$  forme une partition de l'ensemble  $\{1^-, 1^+, 2^-, 2^+, \dots, n^-, n^+\}$  (dans laquelle  $Supp_{exc}$  peut possiblement être vide), et
- 2) les nombres  $a_i = j^+ \in Supp_{exc}$  correspondent aux pas élémentaires  $(s_{i-1}, s_i)$  Nord-Est de  $w_{exc}$ , alors que les nombres  $a_i = j^- \in Supp_{exc}$  correspondent aux pas élémentaires  $(s_{i-1}, s_i)$  Sud-Est de  $w_{exc}$ . Le phénomène inverse se passe pour les nombres  $b_i \in Supp_{nex}$  comparés aux pas élémentaires de  $w_{nex}$ .



La deuxième condition découle de la définition de la bijection  $\varphi_{gd}$  et du fait que dans  $\sigma_{exc}$  (respectivement  $\sigma_{nexc}$ ), les minima de cycles sont de la forme  $i^+$  (respectivement  $i^-$ ).

*Troisième étape:* Nous fusionnons les histoires d'Hermite  $h_{exc}$  et  $h_{nexc}$  en une seule histoire de Laguerre subdivisée  $HLs(\sigma) = h_s$ . Selon les notations introduites précédemment, chaque pas élémentaire  $(s_{i-1}, s_i)$  de  $w_{exc}$  et son choix  $p'_i$  associé correspondent à un unique  $a_i \in Supp_{exc}$ , et de même, chaque pas élémentaire  $(s_{j-1}, s_j)$  de  $w_{nexc}$  et son choix  $p''_j$  associé correspondent à un seul  $b_j \in Supp_{nexc}$ . L'histoire de Laguerre subdivisée cherchée est l'histoire  $HLs(\sigma) = (w_s; (p_1, \dots, p_{2n}))$  dont le chemin  $w_s$  est formé des pas élémentaires des chemins  $w_{exc}$  et  $w_{nexc}$ , pris par ordre croissant des  $a_i$  et  $b_j$  correspondant, et dont les choix  $p_i$  sont déterminés de manière analogue.

Dans l'exemple, nous obtenons l'histoire de Laguerre subdivisée  $HLs(\sigma) = h_s = (w_s; (0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0))$ , où  $w_s$  est illustré à la figure 19.

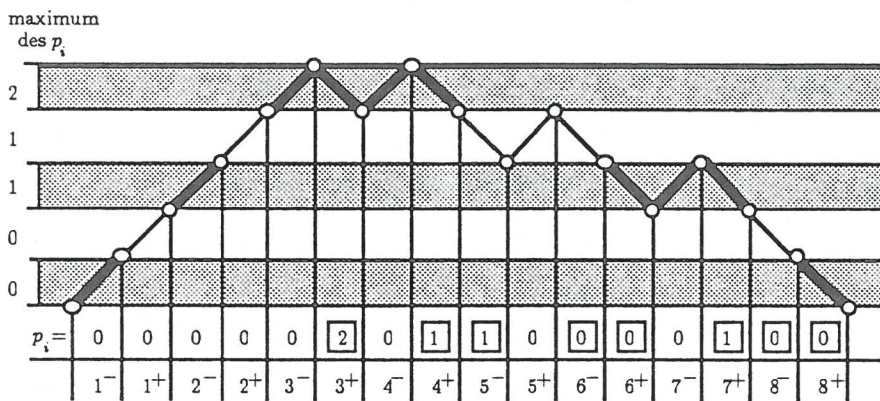


FIGURE 19: la bijection  $HLs$  appliquée aux histoires d'Hermite des figures 17 et 18.

Remarquons que le chemin  $w_{nexc}$  de l'histoire d'Hermite  $h_{nexc} = (w_{nexc}; (p'_i))$  correspond aux pas élémentaires se trouvant à l'intérieur des bandes de hauteur  $2l$  à  $2l + 1$  dans  $w_s$ , alors que le chemin  $w_{exc}$  correspond plutôt aux pas élémentaires dans les bandes de hauteur  $2l + 1$  à  $2l + 2$ .

*Quatrième étape:* Nous appliquons à  $h_s$  la bijection  $\Theta h$ , entre les histoires de Laguerre subdivisées de longueur  $2n$  et les histoires de Laguerre de longueur  $n$ , introduite dans la section 4.

Dans l'exemple,  $h_s$  correspondant à l'histoire de Laguerre subdivisée de la figure 15,  $\Theta h(h_s) = (w^*; (0, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 0))$ , où  $w^*$  est décrit par la figure 16.

**THÉORÈME 5.1:** (Bijection de Foata-Zeilberger)

Chacune des étapes décrites ci-dessus est inversible. En particulier,

$$HLs : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\text{histoires de Laguerre subdivisées de longueur } 2n\}$$

est une bijection, et  $\Psi_{FZ} = \Theta h \circ HLs$  constitue une bijection entre  $\mathfrak{S}_n$  et l'ensemble des histoires de Laguerre de longueur  $n$ .

**DÉMONSTRATION:**

Elle découle aisément des constructions précédentes; voir aussi Foata et Zeilberger [FoZe], et pour les deuxième et quatrième étapes, Flajolet [Fla], Françon et Viennot [FrVi], et Viennot [Vi1, Vi2].  $\square$

Si  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$  désigne une histoire de Laguerre, rappelons que le paramètre  $lag(h)$ , défini dans la section 1, est égal à

$$lag(h) = som(h) + aire(w). \quad (5.1)$$

**PROPOSITION 5.2:** Avec les notations précédentes, pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,

$$inv(\sigma) = lag(\Psi_{FZ}(\sigma)). \quad (5.2)$$

**DÉMONSTRATION:**

Montrons d'abord que si  $HLs(\sigma) = h_s = ((w_s; (p_1, \dots, p_n))$ ,

$$inv(\sigma) = som(h_s) + nsel(h_s) + sep(h_s) \quad (5.3)$$

où

$$n\text{sel}(h_s) = \sum_{\substack{\text{pas } (s_{i-1}, s_i)S-E \text{ de } w, \\ \text{niv}(w, i) = 2l+2}} l + \sum_{\substack{\text{pas } (s_{i-1}, s_i)S-E \text{ de } w, \\ \text{niv}(w, i) = 2l+1}} l, \quad (5.4)$$

$sep(h_s)$  désigne le nombre de pas élémentaires Sud-Est partant d'un niveau pair dans  $w_s$ , et  $niv(w, i)$  désigne le niveau de départ du  $i$ -ième pas élémentaire  $(s_{i-1}, s_i)$  de  $w$ .

Or, en vertu du lemme (3.1),

$$inv(\sigma) = exc(\sigma) + Inv(\sigma_{exc}) + Inv(\sigma_{nex}).$$

En construisant les histoires d'Hermite  $h_{exc} = \varphi_{gd}^{-1}(\sigma_{exc})$  et  $h_{nex} = \varphi_{gd}^{-1}(\sigma_{nex})$ , le nombre d'excédances de  $\sigma$ ,  $exc(\sigma)$ , c'est-à-dire aussi le nombre de 2-cycles de  $\sigma_{exc}$ , devient clairement le nombre de pas Sud-Est de  $w_{exc}$ . En fusionnant les deux histoires d'Hermite  $h_{exc}$  et  $h_{nex}$ , dans la troisième étape de la bijection Foata-Zeilberger, les pas Sud-Est de  $w_{exc}$  se retrouvent dans les bandes de hauteur  $2l + 1$  à  $2l + 2$  de  $w_s$ , donc

$$exc(\sigma) = sep(HLs(\sigma)). \quad (5.6)$$

Notons  $h_{exc} = (w_{exc}; (p'_1, \dots, p'_{2k}))$  et  $h_{nex} = (w_{nex}; (p''_1, \dots, p''_{2(n-k)}))$ . Dans la démonstration de la proposition 2.2 (ii), on a vu que le paramètre " $Inv(\sigma_{exc})$ " (respectivement le paramètre " $Inv(\sigma_{nex})$ ") est transporté par la bijection  $\varphi_{gd}^{-1}$  sur " $\sum_{i=1}^{2k} p'_i + nse(h_{exc})$ " (respectivement " $\sum_{i=1}^{2(n-k)} p''_i + nse(h_{nex})$ "), où  $nse(h)$  désigne la somme des niveaux d'arrivée des pas élémentaires Sud-Est de l'histoire d'Hermite  $h$  (cf (2.13)). En fusionnant les deux histoires d'Hermite dans la troisième étape, la suite de choix  $p_i$  obtenue est un produit d'intercalement des suites de choix  $(p'_i)$  de  $h_{exc}$  et de  $(p''_i)$  de  $h_{nex}$ . De plus,

les pas élémentaires Sud-Est de  $w_{exc}$  (respectivement de  $w_{nex}$ ) partant du niveau  $l$  sont envoyés sur les pas Sud-Est partant du niveau  $2l$  (respectivement du niveau  $2l - 1$ ) de  $w_s$ . Par conséquent,

$$Inv(\sigma_{exc}) + Inv(\sigma_{nex}) = som(h_s) + nsel(h_s). \quad (5.7)$$

Les identités (5.6) et (5.7) établissent (5.3).

Il reste à montrer que

$$som(h_s) + nsel(h_s) + sep(h_s) = lag(\Theta h(h_s)). \quad (5.8)$$

Soit  $\Theta h(h_s) = (w^*; (p_1^*, \dots, p_n^*))$ . Comme les  $p_i^*$  sont obtenus des choix  $p_i$  en oubliant certains  $p_i$  nuls (les choix non significatifs),

$$som(h_s) = \sum_{i=1}^{2n} p_i = \sum_{i=1}^n p_i^* = som(\Theta h(h_s)). \quad (5.9)$$

Le paramètre " $nsel(h_s) + sep(h_s)$ " compte, par définition,  $l + 1$  pour chaque pas élémentaire Sud-Est de  $w_s$  partant d'un niveau pair  $2l + 2$ , et  $l$  pour chaque pas Sud-Est partant d'un niveau impair  $2l + 1$ . Les égalités suivantes découlent:

$$\begin{aligned} nsel(h_s) + sep(h_s) &= \sum_{\substack{(s_{i-1}, s_i) \text{ pas S-E de } w_s, \\ niv(w_s, i) = 2l+2}} (l+1) + \sum_{\substack{(s_{i-1}, s_i) \text{ pas S-E de } w_s, \\ niv(w_s, i) = 2l+1}} l, \\ &= \sum_{\substack{(s_{i-1}, s_i) \text{ pas S-E de } w_s, \\ niv(w_s, i) = 2l+2}} (l+1) + \sum_{\substack{(s_{i-1}, s_i) \text{ pas N-E de } w_s, \\ niv(w_s, i) = 2l}} l, \\ &= \sum_{\substack{(s_{i-1}, s_i) \text{ pas de } w_s, \\ niv(w_s, i) = 2l}} l. \end{aligned}$$

En vertu de la proposition 4.1 et de la définition de  $\Theta h$ , cette dernière somme est exactement égale au paramètre " $aire(w^*)$ ", la somme des niveaux de départ des pas élémentaires de  $w^*$ . Par conséquent, l'identité (5.8) est vérifiée, ce qui conclut la démonstration de cette proposition. Dans la figure 20 nous explicitons les  $q$ -pondérations sur les chemins valués, obtenues dans les différentes étapes de la bijection Foata-Zeilberger.  $\square$

**THÉORÈME 5.3:** La classe de polynômes  $L_{n,q}^{(0)}(x)$ , dont les moments sont  $\mu_{n,q}^{(1)} = [n]_q!$ , satisfait la récurrence linéaire à trois termes (1.1) pour

$$b_{k,q}^{(1)} = q^k([k]_q + [k+1]_q) \quad \text{et} \quad \lambda_{k,q}^{(1)} = q^{2k-1}[k]_q[k]_q. \quad (5.11)$$

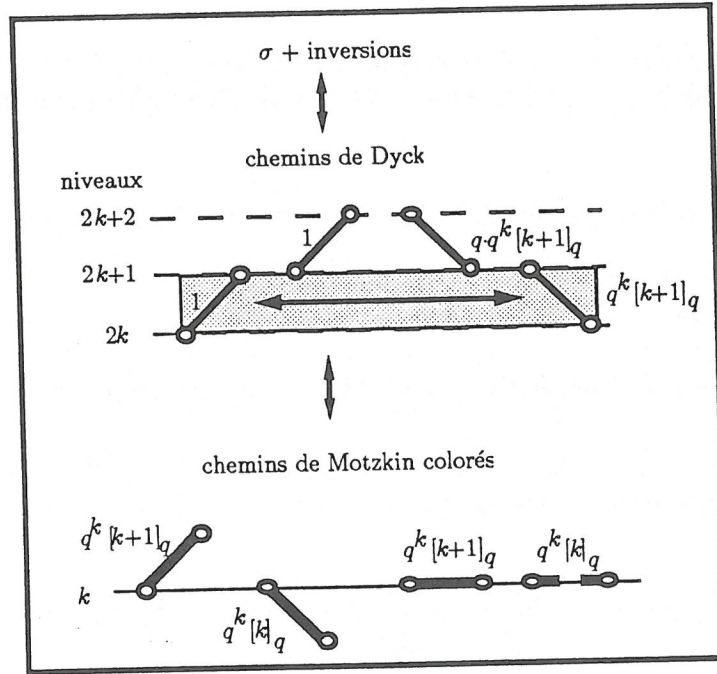


FIGURE 20: correspondance des  $q$ -pondérations.

**DÉMONSTRATION:**

Soient  $a_{k,q}^{(1)} = q^k [k+1]_q$ ,  $b_{k,q}^{(1)'} = q^k [k]_q$ ,  $b_{k,q}^{(1)''} = q^k [k+1]_q$  et  $c_{k,q}^{(1)} = q^k [k]_q$ , les suites associées à la valuation  $v_q^{(1)}(w)$  des chemins de Motzkin colorés telle que définie en (1.9) et (1.10). Remarquons que l'on a bien  $a_{k-1,q}^{(1)} c_{k,q}^{(1)} = \lambda_{k,q}^{(1)}$  et  $b_{k,q}^{(1)'} + b_{k,q}^{(1)''} = b_{k,q}^{(1)}$ . Il vient successivement,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{w \text{ Motzkin coloré} \\ |w|=n}} v_q^{(1)}(w) &= \sum_{\substack{h \text{ histoire de Laguerre} \\ |h|=n}} q^{\text{som}(h) + \text{aire}(h)}, && \text{(section 1)} \\
 &= \sum_{\substack{h \text{ histoire de Laguerre} \\ |h|=n}} q^{\text{lag}(h)}, && \text{(par (5.1))} \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv}(\sigma)}, && \text{(par la proposition 5.2)} \\
 &= [n]_q! = \mu_{n,q}^{(1)}. && \square
 \end{aligned}$$

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$ . Un élément  $x \in [n]$  est dit *élément saillant inférieur droit* si et seulement si  $x = \sigma(i)$  est le plus petit des éléments  $\sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(n)$ . Notons  $\text{sid}(\sigma)$  le nombre d'éléments saillants inférieurs droits de  $\sigma$ . On sait que

$$[n; \beta]_q! = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv}(\sigma)} \beta^{\text{sid}(\sigma)}. \quad (5.12)$$

**THÉORÈME 5.4:** La classe de polynômes  $L_{n,q}^{(\beta-1)}(x)$ , dont les moments sont  $\mu_{n,q}^{(\beta)} = [n; \beta]_q!$ , satisfait la récurrence linéaire à trois termes (1.1) pour

$$b_{k,q}^{(\beta)} = q^k([k]_q + [k+1; \beta]_q) \quad \text{et} \quad \lambda_{k,q}^{(\beta)} = q^{2k-1}[k; \beta]_q[k]_q. \quad (5.13)$$

**DÉMONSTRATION:**

D'après les rappels de l'introduction, il suffit de montrer que

$$\sum_h q^{\text{lag}(h)} v_\beta(h) = [n; \beta]_q!, \quad (5.14)$$

où  $h$  parcourt l'ensemble des histoires de Laguerre de longueur  $n$ , et  $v_\beta(h) = \beta^l$ , où  $l$  compte le nombre de pas Nord-Est ou Est bleu de  $h$  dont le choix correspondant est  $p_i = 0$ . D'après le théorème 5.3, il suffit de montrer que

$$\beta^{\text{sid}(\sigma)} = v_\beta(\Theta h \circ H L s(\sigma)). \quad (5.15)$$

Or  $x = \sigma(i_0)$  est un élément saillant inférieur droit de  $\sigma$  si et seulement si, dans  $H L s(\sigma) = h_s$ , le pas élémentaire correspondant à  $i_0^+$  est Sud-Est et le choix  $p_{2i_0}$  correspondant est égal à 0. L'application de tassement  $\Theta h$  établit une bijection entre ces pas élémentaires et les pas Nord-Est ou Est bleu de  $\Theta h \circ H L s(\sigma)$  dont le choix associé  $p_i = 0$ . Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

## 6. REMARQUES FINALES ET EXTENSIONS AUX $q$ -ANALOGUES DES CINQ CLASSES DE POLYNÔMES ORTHOGONAUX DE SHEFFER

Nous avons déjà mentionné la statistique Mahonienne  $den(\sigma)$ , introduite par Marleen Denert et faisant l'objet principal de l'article [FoZe]. En appliquant leur bijection  $\Psi_{FZ}$  aux permutations, D. Foata et D. Zeilberger obtiennent une autre statistique Mahonienne,  $ind(h)$ , qu'ils baptisent *index*, sur les histoires de Laguerre  $h = (w; (p_1, \dots, p_n))$ :

$$ind(h) = som(h) + \sum_{\substack{(s_{j-1}, s_j) \\ \text{pas N-E}}} j + \sum_{\substack{(s_{j-1}, s_j) \\ \text{pas E rouge}}} j. \quad (6.1)$$

Cette statistique ressemble beaucoup à l'expression suivante de  $lag(h)$ , obtenue en appliquant une proposition de Françon [Fr]:

$$lag(h) = som(h) + \sum_{\substack{(s_{j-1}, s_j) \\ \text{pas S-E}}} j - \sum_{\substack{(s_{j-1}, s_j) \\ \text{pas N-E}}} j. \quad (6.2)$$

Un problème ouvert consiste à trouver une bijection sur les histoires de Laguerre de longueur  $n$  qui enverrait le paramètre  $ind$  sur le paramètre  $lag$ .

Remarquons que les définitions des statistiques  $den$  et  $inv$  sur les permutations montrent aussi un certain degré de similarité: d'après l'article Foata, Zeilberger [FoZe], la statistique  $denert$  peut s'écrire

$$den(\sigma) = \sum_{\substack{i \\ i < \sigma(i)}} i + pbr(\sigma_{exc}) + pbr(\sigma_{nex}), \quad (6.3)$$

tandis que le nombre d'inversions de  $\sigma$  peut s'écrire (d'après la relation (3.3))

$$inv(\sigma) = \sum_{\substack{i \\ i < \sigma(i)}} 1 + 2 \cdot pbr(\sigma_{exc}) + 2 \cdot pbr(\sigma_{nex}) + cr(\sigma_{exc}) + cr(\sigma_{nex}). \quad (6.4)$$

En transportant le paramètre "lag" sur les histoires de Laguerre le long de la bijection classique Françon-Viennot  $\Psi_{FV}$  (cf Françon et Viennot [FrVi] et Goulden et Jackson [GJ]), nous obtenons une nouvelle statistique Mahonienne "lag" sur les permutations, dont nous donnons une description directe, sans démonstration. Le lecteur est référé au chapitre 1 de la monographie [Vi1] pour les propriétés de la bijection Françon-Viennot sur lesquelles reposent la proposition 6.2.

**DÉFINITION 6.1:** Soit  $\sigma = \sigma(1) \dots \sigma(n) \in \mathfrak{S}_n$ , nous dirons que  $(\sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(j))$ ,  $0 \leq i \leq j \leq n+1$ , est une *séquence décroissante maximale* (nous écrirons *s.d.m.*), si

$$\sigma(i-1) < \sigma(i) > \sigma(i+1) > \dots > \sigma(j) < \sigma(j+1). \quad (6.5)$$

Par convention,  $\sigma(0) = n+1$ ,  $\sigma(n+1) = 0$ ,  $\sigma(-1) = -1$  et  $\sigma(n+2) = n+2$ .

Par exemple, pour  $\sigma = 3 \ 5 \ 6 \ 4 \ 1 \ 10 \ 8 \ 7 \ 2 \ 9$ , les séquences décroissantes maximales sont  $(11,3)$ ,  $(5)$ ,  $(6,4,1)$ ,  $(10,8,7,2)$  et  $(9,0)$ .

**PROPOSITION 6.2:** Avec les notations précédentes, si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,

$$lag(\sigma) = \sum_{(y=\sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(j)=z)} \left( |\{x = \sigma(l) \mid j < l \text{ et } z < x < y\}| + y - z - 1 \right) - n; \quad (6.6)$$

où la somme parcourt les séquences décroissantes maximales  $(\sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(j))$  de la permutation  $\sigma$ .

Par exemple, pour  $\sigma = 3 \ 5 \ 6 \ 4 \ 1 \ 10 \ 8 \ 7 \ 2 \ 9$ , on calcule  $lag(\sigma) = (7 + 11 - 3 - 1) + (0 + 5 - 5 - 1) + (1 + 6 - 1 - 1) + (1 + 10 - 2 - 1) + (0 + 9 - 0 - 1) - 10 = 24$ , qui est bien égal à  $lag(h) = som(h) + aire(h) = 5 + 19 = 24$ .

Mentionnons que la bijection présentée en section 8 de l'article de D. Foata et D. Zeilberger [FoZe], en termes de "gravid permutations" est en fait la bijection  $\Psi_{FV}$ . Dans l'article original [FrVi], la bijection  $\Psi_{FV}$  est décrite en termes de mots sur l'alphabet  $[n] \cup \{0\}$ . Le symbole "0" y joue un rôle spécial (position "libre" ou "ouverte"). Les

mots correspondent à des *histoires de Laguerre incomplètes*, c'est-à-dire à l'extension de la notion d'histoires de Laguerre dans le cas d'un chemin de Motzkin coloré s'arrêtant à un niveau quelconque (non nécessairement nul). La description de D. Foata et D. Zeilberger correspond au cas particulier de la construction de J. Françon et X.G. Viennot où la dernière position "libre" (le symbole "0" à la fin des mots) est toujours laissée vacante au cours des insertions successives des lettres. Dans le cas général, toutes les positions libres peuvent être occupées. Ces deux cas sont appelés dans [Vi1] respectivement "*histoires de Laguerre restreintes*" et "*histoires de Laguerre larges*", et sont dénombrées respectivement par  $n!$  et  $(n+1)!$ . Dans ce texte et l'article [FoZe], les histoires de Laguerre considérées sont des histoires de Laguerre restreintes.

En arrêtant le procédé d'insertion à un instant quelconque de la construction, on obtient une extension de la bijection  $\Psi_{FV}$  entre les histoires de Laguerre incomplètes et certains mots sur l'alphabet  $[n] \cup \{0\}$ . Pour plus de détails, le lecteur se rapportera au chapitre 3 de [Vi1], dans lequel il est montré que cette construction permet de définir une nouvelle classe de polynômes, les "polynômes verticaux", qui constituent la classe des polynômes "inverses" associée à toute classe de polynômes orthogonaux. Les matrices (triangulaires) des coefficients de ces deux classes de polynômes sont inverses l'une de l'autre.

Dans la section 8 de [FoZe], D. Foata et D. Zeilberger posent le problème de l'extension de leur bijection aux histoires de Laguerre incomplètes. La décomposition de cette bijection en quatre étapes, avec notamment le passage par les histoires d'Hermite et les histoires de Laguerre subdivisées, permettrait de répondre à cette question.

En "renversant le temps" dans le procédé d'insertion  $\Psi_{FV}$  généralisé aux histoires de Laguerre incomplètes, il est possible (cf [Vi1], chapitre 3) d'interpréter en termes d'histoires les *opérateurs delta* notés  $Q$  et  $S$  dans la théorie de G.C. Rota [Rota], pour les cinq classes de polynômes orthogonaux de Sheffer (Hermite, Charlier, Laguerre, Meixner et Meixner-Pollaček).

Dans la monographie de Viennot [Vi1], l'étude exhaustive des histoires de Laguerre servait de point de départ à une théorie combinatoire unifiée des classes de polynômes orthogonaux de Sheffer (cf chapitre 2 de [Vi1]). En effet, les modèles combinatoires des moments des cinq classes de polynômes étaient obtenus soit en considérant des restrictions sur les histoires de Laguerre (Hermite et Charlier), soit en ajoutant des paramètres sur les histoires de Laguerre (Meixner et Meixner-Pollaček).

Rappelons (voir Rota [Rota]) qu'une suite de polynômes  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  est dite *suite de polynômes de Sheffer* si et seulement si la fonction génératrice exponentielle de ces polynômes a la forme

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x) \frac{t^n}{n!} = f(t) \exp(x \cdot g(t)). \quad (6.9)$$

Dans le cas où les polynômes sont à coefficients réels, nous appelons polynômes orthogonaux *défini-positifs* des polynômes dont les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes satisfont  $\lambda_k > 0$ , pour tout  $k \geq 1$ .

Meixner a prouvé qu'une suite de polynômes orthogonaux défini-positifs est de Sheffer si et seulement si les coefficients de la récurrence linéaire à trois termes ont la forme

$$b_k = ck + d, \quad \lambda_k = ak^2 + bk, \quad (6.10)$$

dans lequel les nombres réels  $a, b, c, d$  satisfont  $a \geq 0$  et  $a + b > 0$ . Il a de plus montré qu'à un changement de variable près, il n'existe que cinq classes de polynômes orthogonaux définis-positifs déterminés par (6.10), soient les polynômes de Laguerre, Hermite, Charlier, Meixner et Meixner-Pollačzek.

Plus généralement, soient  $\{a_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b'_k\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b''_k\}_{k \geq 0}$  et  $\{c_k\}_{k \geq 1}$ , les suites à valeurs dans l'anneau  $\mathbb{Z}[a, b', b'', c, \beta]$  définies par

$$a_k = a(k + \beta), \quad b'_k = b'(k + \beta), \quad b''_k = b''k \quad \text{et} \quad c_k = ck, \quad (6.7)$$

et soit  $v_s$  la valuation des chemins de Motzkin colorés associée à ces quatre suites comme dans (1.9) et (1.10). On définit les *polynômes de Sheffer généraux*,  $Sh_n(x; a, b', b'', c, \beta)$  comme étant la classe de polynômes orthogonaux dont les moments  $\mu_n$  sont

$$\mu_n = \sum_w v_s(w), \quad (6.8)$$

où  $w$  parcourt les chemins de Motzkin de longueur  $n$ .

Dans un contexte plus général, on peut montrer que toute suite de polynômes orthogonaux de Sheffer peut être décrite à un changement de variable près par les polynômes de Sheffer généraux  $Sh_n(x; a, b', b'', c, \beta)$ .

À l'aide du modèle combinatoire des histoires de Laguerre et de la bijection Françon-Viennot, on obtient une expression des moments de ces polynômes en termes de permutations, comptées selon un certain nombre de paramètres. Plus exactement, soit  $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n) \in \mathfrak{S}_n$ . Convenons que  $\sigma(0) = n + 1$  et  $\sigma(n + 1) = 0$ . Nous dirons que  $x = \sigma(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est

- i) un *pic* si et seulement si  $\sigma(i - 1) < x = \sigma(i) > \sigma(i + 1)$ ,
- ii) un *creux* si et seulement si  $\sigma(i - 1) > x = \sigma(i) < \sigma(i + 1)$ ,
- iii) une *double montée* si et seulement si  $\sigma(i - 1) < x = \sigma(i) < \sigma(i + 1)$ ,
- iv) une *double descente* si et seulement si  $\sigma(i - 1) > x = \sigma(i) > \sigma(i + 1)$ .

Par exemple, dans la permutation  $\sigma = 3 \ 5 \ 6 \ 4 \ 1 \ 10 \ 8 \ 7 \ 2 \ 9$ , les pics sont 6, 9 et 10, les creux sont 1, 2 et 3, 5 est une double montée, et 4, 7 et 8 sont des doubles descentes.

Alors les moments des polynômes de Sheffer généraux sont donnés par

$$\mu_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \beta^{s(\sigma)} a^{c(\sigma)} (b')^{dm(\sigma)} (b'')^{dd(\sigma)} c^{p(\sigma)}, \quad (6.11)$$

où  $s(\sigma)$  désigne le nombre d'éléments saillants (inférieurs gauches) de  $\sigma$ ,  $c(\sigma)$  le nombre de creux,  $dd(\sigma)$  le nombre de doubles descentes,  $dm(\sigma)$  le nombre de doubles montées, et  $p(\sigma)$ , le nombre de pics de  $\sigma$ .

La bijection de Foata-Zeilberger permet d'obtenir un  $q$ -analogue général des polynômes de Sheffer. Plus exactement, soient  $\{a_{k,q}\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b'_{k,q}\}_{k \geq 0}$ ,  $\{b''_{k,q}\}_{k \geq 0}$  et  $\{c_{k,q}\}_{k \geq 1}$ , les suites à valeurs dans l'anneau  $\mathbb{Z}[a, b', b'', c, \beta, q]$  définies par

$$a_{k,q} = aq^k [k + 1; \beta]_q, \quad b'_{k,q} = b'q^k [k]_q, \quad b''_{k,q} = b''q^k [k + 1; \beta]_q \quad \text{et} \quad c_{k,q} = cq^k [k]_q, \quad (6.12)$$



et soit  $v_{s,q}$  la valuation des chemins de Motzkin colorés associée à ces quatre suites telle que définie dans (1.9) et (1.10).

**DÉFINITION 6.3:** On appelle  $q$ -polynômes de Sheffer généraux, notés  $Sh_{n,q}(x; a, b', b'', c, \beta)$ , la classe de polynômes orthogonaux dont les moments  $\mu_{n,q}$  sont donnés par

$$\mu_{n,q} = \sum_w v_{s,q}(w), \quad (6.13)$$

où  $w$  parcourt les chemins de Motzkin de longueur  $n$ .

**DÉFINITIONS 6.4:** Soit  $\sigma$  une permutation. On dira que l'entier  $x = \sigma(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , est

- i) un *pic de cycle* si et seulement si  $\sigma^{-1}(x) < x = \sigma(i) \geq \sigma(x)$ ,
- ii) un *creux de cycle* si et seulement si  $\sigma^{-1}(x) \geq x = \sigma(i) < \sigma(x)$ ,
- iii) une *double montée de cycle* si et seulement si  $\sigma^{-1}(x) < x = \sigma(i) < \sigma(x)$ ,
- iv) une *double descente de cycle* si et seulement si  $\sigma^{-1}(x) \geq x = \sigma(i) \geq \sigma(x)$ .

Remarquons que les points fixes d'une permutation sont des doubles descentes de cycles.

Nous noterons

$$pc(\sigma) = \#\{\text{pics de cycle de } \sigma\}, \quad (6.14)$$

$$cc(\sigma) = \#\{\text{creux de cycle de } \sigma\}, \quad (6.15)$$

$$dmc(\sigma) = \#\{\text{doubles montées de cycle de } \sigma\}, \quad (6.16)$$

$$ddc(\sigma) = \#\{\text{doubles descentes de cycle de } \sigma\}. \quad (6.17)$$

**THÉORÈME 6.5:** Avec les notations précédentes, les moments des  $q$ -polynômes de Sheffer généraux,  $Sh_{n,q}(x; a, b', b'', c, \beta)$  sont égaux à

$$\mu_{n,q} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \beta^{sid(\sigma)} q^{inv(\sigma)} a^{cc(\sigma)} (b')^{dmc(\sigma)} (b'')^{ddc(\sigma)} c^{pc(\sigma)}, \quad (6.18)$$

où  $sid(\sigma)$  et  $inv(\sigma)$  désignent respectivement le nombre d'éléments saillants inférieurs droits et le nombre d'inversions de  $\sigma$ .

**DÉMONSTRATION:**

Étant donné le théorème 5.4, il suffit de déterminer à quoi correspondent chacun des types de pas élémentaires des histoires de Laguerre  $h$  au niveau des permutations  $\sigma$  lors de l'application de  $\Psi_{FZ}^{-1}$ .

Par exemple, selon les constructions et notations introduites dans les sections précédentes de ce texte, si le  $i$ -ième pas élémentaire de l'histoire de Laguerre  $h = \Psi_{FZ}(\sigma)$  est Nord-Est, c'est parce que dans l'histoire de Laguerre subdivisée correspondante (avant tassement), les pas élémentaires correspondants aux entier  $i^-$  et  $i^+$  sont tous les deux Nord-Est. Donc  $i^-$  doit faire partie du support de l'involution sans points fixes  $\sigma_{nex}$ , alors que  $i^+$  fait partie du support de  $\sigma_{exc}$  (voir la caractérisation des quadruplets  $(h_{exc}, h_{nex}; Supp_{exc}, Supp_{nex})$  dans la section 5), c'est-à-dire que l'on a les inégalités suivantes:

$$(\sigma^{-1}(i))^+ \geq i^- \quad \text{et} \quad i^+ < (\sigma(i))^- , \quad (6.19)$$

i.e.  $\sigma^{-1}(i) \geq i < \sigma(i)$ , et donc l'entier  $i$  est un creux de cycle dans la permutation  $\sigma$ .

Raisonnement similaire pour les pas élémentaires Est bleu, Est rouge et Sud-Est des histoires de Laguerre.  $\square$

En spécialisant les valeurs des paramètres  $a, b', b'', c$ , nous obtenons des  $q$ -analogues des cinq classes de polynômes orthogonaux de Sheffer. L'expression (6.18) des moments de ces polynômes en termes de permutations pose le problème combinatoire de trouver des expressions pour les séries génératrices des permutations selon le nombre d'inversions, le nombre d'éléments saillants inférieurs droits et certaines statistiques sur les cycles des permutations. Ces distributions conjointes ne sont pas classiques au sens où les deux premiers paramètres se calculent sur les permutations exprimées sous forme de mots, alors que les autres statistiques se calculent sur les permutations écrites comme produit de cycles disjoints. On considère habituellement des distributions conjointes de statistiques calculées sur les permutations exprimées selon l'une ou l'autre des écritures, mais pas les deux à la fois. Mentionnons cependant que I. Gessel et C. Reutenauer [GeRe] ont récemment trouvé une expression du nombre de permutations ayant une structure cyclique et un ensemble de descentes fixés, comme produit scalaire de deux caractères spéciaux du groupe symétrique.

## 9. RÉFÉRENCES

- [ASCa] AL-SALAM, W.A. et CARLITZ, L., "Some orthogonal  $q$ -polynomials", Math. Nachr., 30, 1965, pp. 47-61.
- [Bre] BREZINSKI, C., "Outline of Padé approximation and general orthogonal polynomials", ISNM, Vol. 50, Birkhäuser Verlag, Basel, 1980.
- [Chi] CHIHARA, T.S., An Introduction to orthogonal polynomials, Gordon and Breach, New-York/London/Paris, 1978.
- [Ci] CIGLER, J., "Elementare  $q$ -Identitäten", Actes de la 5ème session du Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Publ. de l'I.R.M.A., no 182/S-04, Strasbourg, 1982.
- [Den] DENERT, M., "The genus zeta function of hereditary orders in central simple algebras over global fields", Math. Comp., t. 54, 1990, pp. 449-465.
- [Dés] DÉSARMÉNIEN, J., "Les  $q$ -analogues des polynômes d'Hermite", Actes de la 6ème session du Séminaire Lotharingien, Publ. de l'I.R.M.A., Strasbourg, 1982, pp. 39-56.
- [DuKr] DUMONT, D. et KREWERAS, G., "Sur le développement d'une fraction continue liée à la série hypergéométrique et son interprétation en terme de records et anti-records dans les permutations", Europ. J. Comb., 1988, pp. 27-32.
- [Fo] FOATA, D., "On the Netto inversion number of a sequence", Proc. Am. Math. Soc., vol. 19, 1968, pp. 236-240.
- [FoZe] FOATA, D. et ZEILBERGER, D., "Denert's permutation statistic is indeed Euler-Mahonian", Studies in Applied Math. 83, 1990, pp. 31-59.
- [Fla] FLAJOLET, P., "Combinatorial aspects of continued fractions", Discrete Math., 32, 1980, pp. 125-161.
- [Fr] FRANÇON, J., "Fractions continues  $q$ -analogiques pour certaines distributions de permutations et partitions", Publ. Math. de l'Univ. de Haute Alsace, rapport de recherche 7, 1982, 8 p. À paraître dans Annales Sc. Math. Québec.
- [FrVi] FRANÇON, J. et VIENNOT, G., "Permutations selon les pics, creux, doubles montées, doubles descentes, nombres d'Euler et nombres de Genocchi", Discrete Math., 28, 1979, pp. 21-35.
- [GR] GASPER, G. et RAHMAN, M., Basic Hypergeometric Series, Encyclopedia of mathematics and its applications, vol. 35, Cambridge University Press, New York, 1990.
- [GeRe] GESSEL, I. et REUTENAUER, C., "Counting permutations with cycle structure and descent set", J. Comb. Theory Ser. A, à paraître.
- [GJ] GOULDEN, I. et JACKSON, D.M., Combinatorial Enumeration, New York, John Wiley & Sons, 1983.
- [Gr] GRAGG, W.B., "The Padé table and its relation to certain algorithms of numerical analysis", SIAM Review, 14, 1972, pp. 1-62.

- [Han1] HAN, G.N., "Une nouvelle bijection pour la statistique de Denert", C.R. Acad. Sc. Paris, t. 310, 1990, pp. 493-496.
- [Han2] HAN, G.N., Calcul Denertien, thèse de Doctorat, Publ. de l'I.R.M.A., Stratsbourg, 476/TS-29, 1991.
- [Hen1] HENRICI, P., "The quotient-difference algorithm", J.Wiley, New York, vol. 1, 1974 et vol. 2, 1976.
- [Hen2] HENRICI, P., "Applied and computational complex analysis", NBS Appl. Math. Series, 49, 1958, pp. 23-46.
- [ISV] ISMAIL, M., STANTON, D. et VIENNOT, X.G., "The combinatorics of  $q$ -Hermite polynomials and the Askey-Wilson integral", Europ. J. Comb., 8, 1987, pp. 379-392.
- [Pe] PENAUD, J.-G., "Une preuve combinatoire d'une formule de Touchard-Riordan", dans Arbres et animaux, mémoire d'habilitation, Université Bordeaux I, Bordeaux, 1990, pp. 143-162. Aussi dans Comptes Rendus du 4-ième Colloque "Séries formelles et combinatoire algébrique" (Montréal, Juin 1992), Publ. du LACIM, no 11, UQAM, Montréal, 1992, pp. 313-325.
- [Ri] RIORDAN, J., "The distribution of crossing of chords joining pairs of  $2n$  points on a circle", Math. Comp., 29, 1975, pp. 215-222.
- [Ro] ROGERS, L.J., "On a Three-fold symmetry in the elements of Heine's series", Proc. London Math. Soc., 24, 1938, pp. 171-179.
- [Rota] ROTA, G.C., KAHANER, D. et ODLYZKO, A., "Finite operators calculus", J. Math. Anal. Appl., 42, 1973, pp. 685-760.
- [Ru] RUTISHAUSER, H., "Der Quotienten-Differenzen Algorithmus", Birkhäuser Verlag, Basel, 1957.
- [SiSt] SIMION, R. et STANTON, D., "Octobasic Laguerre polynomials and permutation statistics", en préparation.
- [St] STANTON, D., "Specializations of generalized Laguerre polynomials", en préparation.
- [Sti] STIEFEL, E., "Kernel polynomials in linear algebra and their numerical applications", NBS Appl. Math. Series, 49, 1958, pp. 1-22.
- [Sz] SZÉGO, G., "Ein Beitrag zur Theorie des Thetafunktionen", Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math., K. XIX, 1926, pp. 242-252.
- [To] TOUCHARD, J., "Sur un problème de configurations et sur les fractions continues", Canadian J. Math., 4, 1952, pp. 2-25.
- [Vi1] VIENNOT, X.G., "Une Théorie Combinatoire des Polynômes Orthogonaux", Notes de conférences données à l'UQAM, septembre et octobre 1983 (réédition, publications du LACIM, UQAM, Montréal, 1992).
- [Vi2] VIENNOT, X.G., "A combinatorial interpretation of the quotient-difference algorithm", Rapport de recherche de l'UER de mathématique et informatique, Université Bordeaux I, Mars 1986, 23 pages.
- [Zen] ZENG, J., "Records, Antirecords et Permutations Discordantes", European J. Comb. 10, 1989, pp. 103-109.

*LACIM*

Département de Mathématiques et Informatique  
Université du Québec à Montréal, Montréal H3C 3P8, Canada.

*LaBRI*

Université Bordeaux I, 33405 Talence, France.

