Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1992, 498/S-28
Actes 28^{e} Séminaire Lotharingien, p. 65-71

Über Identitäten von Charaktersummen

Anna Helversen-Pasotto

Abstract : We discuss character sum analogues of some well-known identities (constant term identities for Laurent-series as discovered by DYSON, MAC-DONALD, MORRIS, famous identities in the theory of special functions as discovered by BARNES, DIXON and others) as well as character sum identities obtained by different methods (direct computations, study of group representations).

1. - Zur Identität von Dyson

Die "klassische" Identität von DYSON besagt, dass das konstante Glied der Laurentreihe

$$\prod_{i\neq j} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^{a_i}$$

gleich dem folgenden Ausdruck ist

$$\frac{(a_1+ \dots +a_n)\,!}{a_1!\, \cdots\, a_n!} ,$$

dabei sind $a_1, \dots, a_n$ natürliche Zahlen und $x_1, \dots, x_n$ "Unbekannte".

Sei F_q der endliche Körper von $q=p^m$ Elementen, wobei p eine Primzahl ist; für einen multiplikativen Charakter S von F_q definiert man die Gaussche Summe $G(S)$ durch

$$G(S) = \sum_{t\neq 0} S(t)\, \psi(t) ,$$

dabei bezeichnet ψ einen ein für allemal fixierten additiven Charakter, z.B. den kanonisch definierten

$$\psi(t) = e^{\frac{2\pi i}{p} \mathrm{Spur}(t)} ,$$

wobei Spur die Spurabbildung der Körpererweiterung F_q von F_p bedeutet und t ein Element von F_q bezeichnet.

Man beachte die wohlbekannte Analogie mit der Gammafunktion, die durch das Eulersche Integral deutlich wird :

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^s \ e^{-t} \ \frac{dt}{t} ,$$

und auch, dass

$$\Gamma(a) = (a-1) \ !$$

für natürliche Zahlen a . Dann ist man gut auf die folgende "Dysonidentität" für Gaussche Summen vorbereitet :

$$\Sigma \ A(1- \frac{x}{y}) \ B(1- \frac{y}{x}) \ = \ q(q-1) \ \frac{G(AB)}{G(A) \ G(B)} ,$$

es wird dabei summiert über alle x, y in F_q mit $x, y \neq 0$ und $x \neq y$; man hat hier den Fall von zwei "Unbekannten"; man setzt voraus, dass A, B und AB nicht-triviale multiplikative Charaktere von F_q sind. Ein Beweis der Identität erfolgt leicht durch Umsummieren, und es handelt sich in der Tat um nichts anderes als die wohlbekannte Beziehung zwischen Gausschen Summen und Jacobi-Summen, denn die linke Seite identifiziert man leicht als die Jacobi-Summe von A^{-1} und B^{-1}.

Man möchte nun eine Spielregel erraten, wie man zu der klassischen Dysonidentität mit n Unbekannten eine Identität für Gaussche Summen aufstellt :

man gibt sich n multiplikative Charakter $A_1, \ldots, A_n$ von F_q vor, für die rechte Seite schreibt man

$$\frac{G(A_1 \ldots A_n)}{G(A_1) \ \ldots \ G(A_n)}$$

versuchsweise, indem man $a_i\,!$ durch $G(A_i)$ ersetzt für $i=1, \ldots, n$, indem man $a_1+\ldots+a_n$ durch das Produkt $A_1 \ldots A_n$ der multiplikativen Charaktere $A_1, \ldots, A_n$ ersetzt und dann $(a_1+\ldots+a_n)\,!$ durch die Gaussche Summe $G(A_1 \ldots A_n)$ des Produktes.

Für die linke Seite hingegen ist man versucht zu schreiben

$$\Sigma \prod_{i \neq j} A_i\left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right) ,$$

wobei man summiert über alle $x_1, \ldots, x_n$ in F_q mit $x_i \neq 0$ und $x_i \neq x_j$ für $i,j = 1, \ldots, n$.

Für $n=3$ und drei multiplikative Charaktere A, B, C von F_q erhält man so den folgenden Ausdruck

$$\Sigma\ A\left(\left(1-\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{x}{z}\right)\right)B\left(\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(1-\frac{y}{z}\right)\right)C\left(\left(1-\frac{z}{x}\right)\left(1-\frac{z}{y}\right)\right) ,$$

wobei man über x, y, z in F_q summiert mit $x, y, z \neq 0$ und $x\neq y$, $y\neq z$, $z\neq x$; einem Artikel von R.J. EVANS aus dem Jahr 1981 kann man entnehmen, dass für $p\neq 2$ dieser Ausdruck dividiert durch $q^2(q-1)$ dem folgenden gleich ist :

$$\frac{G(ABC)}{G(A)G(B)G(C)} + \frac{G(ABCQ)}{G(AQ)G(BQ)G(CQ)} ,$$

wobei Q den quadratischen Charakter von F_q bezeichnet, d.h. $Q(x^2)=1$ für alle x in F_q und $Q(y)=-1$ für alle Nicht-Quadrate y in F_q ; man hat auch vorauszusetzen, dass A^2, B^2, C^2 und AB, AC, BC nicht-trivial sind, anderenfalls kann die Formel aber leicht korrigiert werden. Der Beweis von R. J. EVANS erfolgt durch trickreiches Umsummieren inspiriert durch den Beweis einer analogen Integralformel von ANDREWS und ASKEY.

Für $p=2$ hingegen erhält man für die rechte Seite der "endlichen" Dysonidentität für "drei Unbekannte" den folgenden einfacheren Ausdruck :

$$q^2(q-1)\,\frac{G(ABC)}{G(A)G(B)G(C)} - q(q-1)\ ,$$

was ganz natürlich ist, weil ja im Fall $p=2$ jedes Element von F_q ein Quadrat ist; die Einschränkungen über die Charaktere bleiben.

Für mehr als drei "Unbekannte" wagt R.J. EVANS es nicht, eine Vermutung für eine "endliche Dysonidentität" aufzustellen; hingegen werden einige interessante Fälle der MACDONALD-MORRIS Vermutungen untersucht. Diese geben Identitäten an, welche Wurzelsystemen entsprechen; die Dysonidentität entspricht dem "einfachsten" Wurzelsystem A_{n-1}. Für alles weitere sei auf die am Ende dieses Vortrags angegebene Litteratur verwiesen.

2. - *Zur Identität von Barnes*

Die "klassische" Identität von BARNES besagt, dass das folgende Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(a+s)\ \Gamma(b-s)\ \Gamma(c+s)\ \Gamma(d-s)\ ds$$

gleich dem folgenden Ausdruck ist :

$$\frac{\Gamma(a+b)\ \Gamma(b+c)\ \Gamma(c+d)\ \Gamma(a+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}\ ,$$

wobei man voraussetzt, dass $a+b$, $a+c$, $c+d$ und $a+d$ keine Pole der Gammafunktion sind und dass der Integrationsweg geeignet gewählt ist.

Die "endliche" Barnesidentität besagt, dass

$$\frac{1}{q-1}\sum_S G(AS)G(BS^{-1})G(CS)G(DS^{-1}) = \frac{G(AB)G(BC)G(CD)G(AD)}{G(ABCD)}\ ,$$

wobei A,B,C,D vier multiplikative Charaktere eines endlichen Körpers F_q sind und man über alle multiplikativen Charaktere S von F_q summiert; man setzt voraus, dass das Produkt $ABCD$ der vier Charaktere nicht-trivial ist, anderenfalls lässt sich die Formel leicht korrigieren.

Diese endliche Barnesidentität wurde vom Autor gefunden beim Studium des Endomorphismenringes der GELFAND-GRAEV-schen Darstellung der Gruppe $GL(2,F_q)$; sie entspricht der Hauptreihe von den Darstellungen; der diskreten Reihe entspricht eine im Sinn der Galoistheorie getwistete Form; weitere getwistete Formen können extrapoliert werden; deren Interpretation durch die Darstellungstheorie ist eine offene Frage. Es sei wiederum auf die am Vortragsende angegebene Literatur verwiesen.

3. - *Zur Identität von Dixon*

Es sei nur die "endliche" Identität angegeben, sie wurde von R.J. EVANS trickreich bewiesen in einem noch nicht veröffentlichten Artikel, auch J. GREENE scheint einen Beweis mit verschiedenen Methoden gefunden zu haben. Es werden drei multiplikative Charaktere A, B, C von F_q betrachtet, man setzt voraus, dass $A^2B^2C^2$ nicht trivial ist; man bezeichnet mit Q wieder den quadratischen Charakter; man summiert über alle multiplikativen Charaktere S von F_q und erhält :

$$\frac{1}{q-1} \Sigma\, S(-1)\, G(AS)G(AS^{-1})G(BS)G(BS^{-1})G(CS)G(CS^{-1}) = G(AB)G(BC)G(AC)\left(\frac{G(A)G(B)G(C)}{G(ABC)} + Q(-1)\,\frac{G(AQ)G(BQ)G(CQ)}{G(ABCQ)} \right).$$

4. - *Zu einer Théorie von MELLIN-BARNES-Summen*

In Analogie zu den MELLIN-BARNES-Integralen definieren wir "Mellin-Barnes-Summen"

$$\Sigma \quad S(a)\,\frac{G(A_1S)\ \ldots\ G(A_kS)\ \ G(B_1S^{-1})\ \ldots\ G(B_mS^{-1})}{G(C_1S)\ \ldots\ G(C_nS)\ \ G(D_1S^{-1})\ \ldots\ G(D_rS^{-1})}$$

und fragen : welche dieser Summen lassen sich "auswerten" ?

In der obigen Formel wird über alle multiplikativen Charaktere S von F_q summiert, a ist ein festes Element von F_q mit $a \neq 0$, meist interessiert man sich für $a=1$ oder $a=-1$, weiter sind $A_1, \ldots, A_k$; $B_1, \ldots, B_m$; $C_1, \ldots, C_n$; $D_1, \ldots, D_r$ multiplikative Charaktere von F_q.

Die endliche Barnesidentität ist eine Auswertung der Summe

$$\Sigma \quad S(1)\ G(AS)G(CS)G(BS^{-1})G(DS^{-1}) \quad ;$$

die endliche Dixonidentität ist eine Auswertung der Mellin-Barnes-Summe

$$\Sigma \quad S(-1)\ G(AS)G(BS)G(CS)G(AS^{-1})G(BS^{-1})G(CS^{-1}) \ .$$

Im Folgenden geben wir noch ein paar einfache Auswertungen an :

$$\Sigma \quad G(AS) \quad = \quad (q-1)\ \psi(1) \quad ,$$

$$\Sigma \quad G(AS)G(BS^{-1}) \quad = \begin{cases} 0 & \text{für } AB\neq 1,\ p=2 \\ (q-1)^2 & \text{für } AB=1,\ p=2 \\ (q-1)(AB)(1/2)G(AB) & \text{für } p\neq 2 \end{cases}$$

$$\Sigma \quad \frac{G(AS)}{G(BS)} \quad = \quad \frac{(1-q)}{q}\ G(AB^{-1}) \qquad \text{für } AB^{-1}\neq 1$$

5. - *Nachwort*

Es ist zu erwarten, dass - so wie die endliche Barnesidentität der Hauptreihe von Darstellungen der Gruppe $GL(2,F_q)$ entspricht - kompliziertere Auswertungen von Mellin-Barnes-Summen den Darstellungen der Gruppe $GL(n,F_q)$ entsprechen. Mehr darüber in den Literaturhinweisen !

Es wäre interessant, die Methode von WILF und ZEILBERGER des "automatischen Beweises" gewisser Identitäten von speziellen Funktionen auf den Fall der hier angegebenen "endlichen" Identitäten auszudehnen.

6. - *Literaturhinweise*

6.1. - Zur Dysonidentität

R.J. EVANS, Identities for products of Gauss Sums over finite fields, Enseign. Math.27 (1981), 197-209

R.J. EVANS, Character Sum Analogues of Constant Term Identities for Root Systems, Israel Journal of Mathematics, Vol. 46, No. 3 (1983), 189-196

6.2. - Zur Barnesidentität

A. HELVERSEN-PASOTTO, Représentations de Gelfand-Graev et identités de Barnes, le cas de GL_2 d'un corps fini, Enseign. Math.32 (1986), 57-77

A. HELVERSEN-PASOTTO, On the structure constants of certain Hecke algebras, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, numero 26 (1991), 179-188

siehe auch die in diesen Artikeln angegebene Literatur !

6.3. - Zur Dixonidentität

R.J. EVANS, A Character Sum for Root System G_2, (to appear)

J. GREENE, The Bailey transform over finite fields, (to appear)

Adresse : UNIVERSITE DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS

MATHEMATIQUES

U.A. au C.N.R.S. n° 168

Faculté des Sciences

Parc Valrose, Boite Postale 71

06 108 - NICE Cedex 02

FRANCE

e-mail : helpa@aurora.unice.fr