Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1992, 498/S-28
Actes 28[e] Séminaire Lotharingien, p. 53-55

Un q-analogue des polynômes de Bessel

(résumé)

Serge Dulucq (*)

Abstract. The combinatorial model for the Bessel polynomials, introduced by Dulucq and Favreau in [3], allows us to define the q-Bessel polynomials. This model, based upon weighted involutions, leads to a combinatorial interpretation of the three-term recurrence relation and to an explicit formula for the n^{th} q-Bessel polynomial.

1. Introduction

Les polynômes de Bessel, ainsi nommés compte-tenu de leur relation avec les fonctions de Bessel, apparaissent comme solution de l'équation différentielle du second ordre [2, 7]

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(2x+2)\frac{dy}{dx}=n(n+1)y\ . \tag{1}$$

Cette famille de polynômes peut également être définie à partir de la récurrence à trois termes

$$\begin{cases} y_{n+1}(x)=(2n+1)xy_n(x)+y_{n-1}(x)\ , \\ y_0(x)=1\ ,\quad y_1(x)=1+x\ . \end{cases} \tag{2}$$

La valeur explicite de ces polynômes, en termes de la fonction hypergéométrique ${}_2F_0$, est

$$\left.\begin{aligned} y_n(x) &= {}_2F_0(-n,n+1;\_;-x/2) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k)!}{(n-k)!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k\ . \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Dans [3], nous avons proposé un modèle combinatoire pour cette famille de polynômes. Ce modèle nous a permis, non seulement de retrouver toutes les identités classiques (récurrence à trois termes (2), équation différentielle (1), équation de récurrence aux dérivées, identité exprimant la série génératrice), mais également d'obtenir une démonstration entièrement combinatoire de l'orthogonalité de cette famille de polynômes.

Comme pour les polynômes de Hermite [1, 5, 6], ce modèle combinatoire nous permet de définir un q-analogue des polynômes de Bessel. Nous montrons alors qu'ils vérifient une récurrence à trois termes qui est un q-analogue de (2) et nous obtenons une formule explicite pour le $n^{\text{ième}}$ polynôme $y_n(x;q)$.

(*) Avec le soutien du P.R.C. Mathématiques et Informatique. E-mail dulucq@labri.greco-prog.fr

2. Un modèle combinatoire pour les q-polynômes de Bessel

Soit $\mathcal{J}_n$ l'ensemble des involutions ayant exactement n *orbites,* où le terme orbite désigne les cycles de longueur 1 ou 2 de l'involution, c'est à dire les *points fixes* ou les *arêtes*, et notons $\mathcal{J}_{n,k}$ l'ensemble des involutions de $\mathcal{J}_n$ ayant k arêtes ($0 \leq k \leq n$).

Etant donnée une involution α de $\mathcal{J}_n$, nous définissons sa *valuation* $v(\alpha)$ par

$$v(\alpha) = x^{e(\alpha)} q^{s(\alpha)}$$

où

$$e(\alpha) = nombre\ d'arêtes\ de\ l'involution\ \alpha$$

$$s(\alpha) = \sum_{arêtes\ a} s(a) + \sum_{fixes\ f} s(f)$$

et, pour une arête $a=(i,j)$,

$$s(a) = Card\{k\ :\ i < k < j\ \ et\ \ \alpha(k) < j\} ,$$

et, pour un point fixe $f=(f)$,

$$s(f) = Card\{k\ :\ k < f\ \ et\ \ \alpha(k) < f\} .$$

Définition 2.1 Les q-analogues $y_n(x;q)$ des polynômes de Bessel sont définis par

$$\left.\begin{aligned} y_n(x;q) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_n} v(\alpha) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_{n,k}} q^{s(\alpha)} x^k \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Théorème 2.2 Les polynômes $y_n(x;q)$ vérifient la relation de récurrence à trois termes

$$\begin{cases} y_{n+1}(x;q) = [2n+1]_q x y_n(x;q) + q^{2n-1} y_{n-1}(x;q) \ , \\ y_0(x;q) = 1 \ , \quad y_1(x;q) = 1 + x \ . \end{cases} \tag{5}$$

où $[n]_q = \dfrac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$ est le q-analogue usuel de l'entier n.

Théorème 2.3 Le polynôme $y_n(x;q)$ est donné par la formule

$$y_n(x;q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+k \\ n-k \end{bmatrix}_q [2k]_q!!\ q^{\binom{n-k}{2}}\ x^k \tag{6}$$

où $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$ est le q-analogue du coefficient binômial,

et $[2k]_q!! = [1]_q[3]_q[5]_q \ldots [2k-1]_q$ est le q-analogue du nombre d'involutions sans point fixe sur 2k points.

Références

[1] R. Askey, M.E.H. Ismail, A generalization of ultraspherical polynomials, *Studies in Pure Mathematics,* edited by P. Erdös, Birkhauser, Basel, 1983, 55-78.

[2] Th.S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New-York, London, Paris (1978), 181-183.

[3] S. Dulucq, L. Favreau, A combinatorial model for Bessel polynomials, Proc. Third International Symposium on Orthogonal Polynomials and their applications, Erice, Sicily, C. Brezinski, L. Gori and A. Ronveaux eds, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, 1990, 243-249.

[4] J. Désarménien, Les q-analogues des polynômes d'Hermite, Actes du 6ème Séminaire Lotharingien de Combinatoire, Burg Feuerstein, V. Stehl éditeur, 1992, 39-56.

[5] I. Gessel, A q-analogue to the exponential formula, *Discrete Math.* **40** (1982), 69-80.

[6] M.E.H. Ismail, D. Stanton, X.G. Viennot, The Combinatorics of q-Hermite polynomials and the Askey-Wilson Integral, *Europ. J. Combinatorics* **8** (1987), 379-392.

[7] H.L. Krall, O. Frink, A new class of orthogonal polynomials : the Bessel polynomials, *Trans. Amer. Soc.*, **65** (1949), 100-115.

LaBRI
Unité de Recherche Associée au C.N.R.S. n° 1304
Université Bordeaux I