

Über Spechtmoduln als lineare Codes

Karl-Heinz Zimmermann

September 26, 1991

Wir gehen in diesem Artikel der Fragestellung nach, welche codierungstheoretischen Eigenschaften Spechtmoduln als lineare Codes besitzen. Erste Arbeiten auf diesem Gebiet gehen auf Wong und Liebler zurück. Während Wong [6] zeigen konnte, daß jeder Spechtmodul über dem Körper $GF(2)$, der zu einer Partition in genau zwei Teile gehört, vollständig Majoritätslogik-decodierbar ist, behandelt Liebler [5] dieses Problem für den allgemeinen Fall. Jedoch führt seine mit Hilfe von Flaggen vorgenommene Formalisierung zu einer recht komplizierten Darstellung des Problems. Wir werden Lieblers Ansatz weiterentwickeln, bedienen uns jedoch eines gänzlich anderen Aufbaus der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe. Dieser gründet sich auf der Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf der Produktordnung von \mathbb{N}^n . Im ersten Abschnitt werden wir diese Operation genauer skizzieren. Im zweiten Abschnitt wenden wir uns dann der Untersuchung codierungstheoretischer Eigenschaften von Spechtmoduln zu.

1 Grundlagen

Im folgenden sei n stets eine natürliche Zahl. Im Text verwendete grundlegende Begriffe wie Partition oder Tableau schlage man bei James, Kerber [3] oder Kerber [4] nach; eine Zusammenstellung der im Text benutzten Abkürzungen bzw. Konventionen befindet sich am Ende des Artikels.

1. Die Produktordnung \leq_p auf \mathbb{N}^n ist für alle $(i_1, \dots, i_n), (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n$ wie folgt definiert:

$$(i_1, \dots, i_n) \leq_p (j_1, \dots, j_n) :\iff \forall s \in \underline{n} : i_s \leq j_s.$$

Die halbgeordnete Menge (\mathbb{N}^n, \leq_p) definiert einen Verband $(\mathbb{N}^n, \sqcap, \sqcup)$ mit den Operationen

$$i \sqcap j := (\min\{i_1, j_1\}, \dots, \min\{i_n, j_n\}) \text{ und } i \sqcup j := (\max\{i_1, j_1\}, \dots, \max\{i_n, j_n\})$$

für alle $i = (i_1, \dots, i_n), j = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n$. Das kleinste Element $(1, \dots, 1)$ des Verbandes bezeichnen wir auch mit $\mathbf{0}$.

2. Die symmetrische Gruppe S_n operiert auf \mathbb{N}^n von *rechts* durch "Platz-Permutation" wie folgt:

$$(i_1, \dots, i_n)\pi = (i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(n)})$$

für alle $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ und $\pi \in S_n$. Jeder S_n -Orbit $S_n(i) = \{i\pi \mid \pi \in S_n\}$, $i \in \mathbb{N}^n$, dieser Operation ist endlich. Fassen wir $i \in \mathbb{N}^n$ als eine Funktion $f: \underline{n} \rightarrow \mathbb{N}$ auf, also $f(\rho) = i_\rho$ für alle $\rho \in \underline{n}$, dann können wir setzen:

$$\alpha(i) := (|f^{-1}(1)|, |f^{-1}(2)|, \dots).$$

Somit ist $\alpha(i)$ eine uneigentliche Partition von n ; in Zeichen: $\alpha(i) \models n$.

3. Die Abbildung $\phi: S_n(i) \mapsto \alpha(i)$, $i \in \mathbb{N}^n$, definiert eine Bijektion von der Menge der S_n -Orbits der Operation von S_n auf \mathbb{N}^n auf die Menge der uneigentlichen Partitionen von n .

Schreibweise: Für $\lambda \models n$ und $i \in \mathbb{N}^n$ mit $\alpha(i) = \lambda$ schreiben wir kurz $i \in \lambda$; man sagt dann auch, "i hat den Inhalt λ ".

4. Aus den Definitionen folgt sofort die Beziehung

$$i \leq_p j \iff i\pi \leq_p j\pi$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}^n$, $\pi \in S_n$. Man sagt, S_n operiert als eine Automorphismengruppe auf (\mathbb{N}^n, \leq_p) bzw. $(\mathbb{N}^n, \sqcap, \sqcup)$. Ferner bestätigt man leicht die Gültigkeit der beiden folgenden Aussagen:

$$(i \sqcap j)\pi = i\pi \sqcap j\pi \quad \text{und} \quad (i \sqcup j)\pi = i\pi \sqcup j\pi$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}^n, \pi \in S_n$.

5. Es sei nun K ein Körper und $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \models n$. Wir definieren zunächst den für die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe wichtigen K -Vektorraum

$$M^\lambda = \bigoplus_{i \in \lambda} K i.$$

Die lineare Fortsetzung der Operation von S_n auf dem S_n -Orbit, der gemäß 3. λ zugeordnet ist, macht M^λ zu einem KS_n -Rechtsmodul. Da S_n transitiv auf der Basis von M^λ operiert, ist $M^\lambda = iKS_n$ für jedes $i \in \lambda$. Somit ist M^λ ein transitiver Permutationsmodul.

Ist $i \in \lambda$ das bezüglich der lexikographischen Anordnung der n -Tupel vom Inhalt λ kleinste Element (hierbei seien die Ziffern wie folgt angeordnet: $1 < 2 < 3 < \dots$), dann

ist die kanonische Young-Untergruppe S_λ der Stabilisator von i . Auf diese Weise erhält man eine Bijektion zwischen den n -Tupeln vom Inhalt λ und den Rechtsnebenklassen von S_λ nach S_n . Somit ist klar, daß $\dim_K M^\lambda = n! / (\prod_s \lambda_s!)$ ist.

Ein Skalarprodukt \langle, \rangle auf M^λ ist gegeben durch

$$\langle j, k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Demnach bildet die Menge der n -Tupel vom Inhalt λ eine ON-Basis von M^λ . Weiterhin ist \langle, \rangle sogar S_n -invariant, d.h. es gilt $\langle j\pi, k\pi \rangle = \langle j, k \rangle$ für alle $j, k \in M^\lambda, \pi \in S_n$.

6. Es sei nun $\lambda \vdash n$. Die Abbildung, die jedem λ -Tableau T ein n -Tupel i_T vom Inhalt λ derart zuordnet, daß an der ρ -ten Stelle von i_T die Zeilennummer derjenigen Zeile von T steht, in der die Zahl ρ vorkommt, ist surjektiv; hierbei werden die Zeilen von oben nach unten mit 1 beginnend durchnummeriert. Es ist klar, daß i_T den Inhalt λ besitzt. Zum Beispiel wird dem $(3, 2)$ -Tableau

$$T = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{array}$$

das Tupel $i_T = 11212$ zugeordnet; solange keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir die Elemente von \mathbb{N}^n ohne Kommas und Klammern. Für jedes λ -Tableau T bezeichnen wir mit

$$V(T) := \{ \pi \in S_n \mid \forall \rho \in \underline{n}: \rho \text{ und } \pi(\rho) \text{ gehören zur selben Spalte von } T \}$$

die vertikale Gruppe von T . $V(T)$ ist eine Untergruppe von S_n . Nunmehr läßt sich zu jedem λ -Tableau T ein sogenanntes " λ -Polytabloid" definieren:

$$p_T := i_T \left(\sum_{\sigma \in V(T)} \text{sgn}(\sigma) \sigma \right).$$

Für das obige $(3, 2)$ -Tableau T ist $V(T) = \{ (1), (13), (25), (13)(25) \}$ und somit $p_T = 11212 - 21112 - 12211 + 22111$.

Der K -Vektorraum

$$S^\lambda := \sum_{T \lambda\text{-Tableau}} K p_T$$

ist ein linearer Unterraum von M^λ und heißt der *Spechtmodul* zur Partition λ . Wir erwähnen noch zwei Eigenschaften von Spechtmoduln, die wir jedoch im folgenden nicht weiter benötigen:

- (a) S^λ ist ein KS_n -Rechtsmodul.
- (b) Die Menge $\{ p_T \mid T \text{ Standard } \lambda\text{-Tableau} \}$ ist eine K -Basis, die sog. Standardbasis von S^λ .

2 Codierungstheoretische Eigenschaften von Spechtmoduln

Da S^λ ein linearer Teilraum von M^λ ist, können wir S^λ als einen linearen Code mit Blocklänge $\dim M^\lambda$ auffassen. Wenn wir im folgenden vom Hamming-Gewicht eines Codewortes oder von der Minimaldistanz von S^λ sprechen, beziehen wir uns immer auf die ON-Basis $\{i \mid i \in \lambda\}$ von M^λ . Das Hamming-Gewicht von $c = \sum_{i \in \lambda} \kappa_i i \in M^\lambda$ ($\kappa_i \in K$) ist die Anzahl seiner von Null verschiedenen Koeffizienten. Weil S^λ ein linearer Teilraum ist, so ist die Minimaldistanz von S^λ gleich dem minimalen Hamming-Gewicht, genommen über alle von Null verschiedenen Codeworte. Die im folgenden verwendeten codierungstheoretischen Begriffe findet man in jedem Standardwerk über Codierungstheorie.

Lemma 1 *Es seien $\lambda, \nu \vdash n$. Die Abbildung*

$$\eta_\lambda^\nu : M^\nu \ni l \mapsto \sum_{j \in \lambda, l \leq p_j} j \in M^\lambda$$

ist ein KS_n -Homomorphismus. Ist $\lambda \neq \nu$, dann ist $\text{im } \eta_\lambda^\nu \subseteq (S^\lambda)^\perp$.

Beweis: Mit Hilfe von 1.5 folgt sofort, daß η_λ^ν ein KS_n -Homomorphismus ist. Es sei nun $l \in \nu$ und T ein λ -Tableau. Der Beweis der zweiten Aussage erfolgt in drei Schritten:

- Wir zeigen zuerst, daß aus $l(\sum_{\sigma \in V(T)} \text{sgn}(\sigma)\sigma) \neq 0$ stets $\lambda \supseteq \nu$ folgt. Seien $a, b \in \underline{n}$ mit $l_a = l_b$. Dann folgt $l((1) - (ab)) = l - l = 0$. Somit ist $(a, b) \notin V(T)$. Anderfalls könnte man eine Transversale $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ der Rechtsnebenklassen von $\langle (a, b) \rangle$ in $V(T)$ wählen, sodaß gilt:

$$l\left(\sum_{\sigma \in V(T)} \text{sgn}(\sigma)\sigma\right) = l((1) - (a, b))\left(\sum_{s=1}^k \text{sgn}(\sigma_s)\sigma_s\right) = 0.$$

Bezeichnet nun T' ein ν -Tableau mit $i_{T'} = l$, dann folgt aus dem eben Bewiesenen, daß jedes Paar a, b von Ziffern, das in T' in derselben Zeile vorkommt, in verschiedenen Spalten von T auftritt. M.a.W. müssen die Elemente der ersten Zeile von T' in verschiedenen Spalten von T liegen, d.h. $\lambda_1 \geq \nu_1$; ferner müssen die Elemente der zweiten Zeile von T' in verschiedenen Spalten von T liegen, d.h. $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \nu_1 + \nu_2$; es folgt schließlich $\lambda \supseteq \nu$.

- Sei nun $\lambda \not\supseteq \nu$. Dann gilt:

$$\langle \eta_\lambda^\nu(l), p_T \rangle = \langle \eta_\lambda^\nu(l) \left(\sum_{\sigma \in V(T)} \text{sgn}(\sigma)\sigma, i_T \right) \rangle \quad \text{da } \langle, \rangle \text{ } S_n\text{-invariant,}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \eta_\lambda^\nu(l \sum_{\sigma \in V(T)} \text{sgn}(\sigma)\sigma), i_T \rangle \text{ da } \eta_\lambda^\nu \text{ KS}_n\text{-Homomorphismus,} \\
&= 0 \text{ wegen Teil 1.}
\end{aligned}$$

Somit gilt im Falle $\lambda \not\geq \nu$ stets im $\eta_\lambda^\nu \subseteq (S^\lambda)^\perp$.

3. Schließlich sei $\lambda \triangleright \nu$. Wenn $\eta_\lambda^\nu \neq 0$, dann gibt es n -Tupel $j \in \lambda$ und $l \in \nu$ mit $l \leq_p j$. Aus der Definition von \leq_p und \triangleright folgt dann sogar $\nu \geq \lambda$. Also impliziert $\lambda \triangleright \nu$ stets $\eta_\lambda^\nu = 0$. Damit ist die Aussage bewiesen. \square

Ferner sei noch bemerkt, daß das obige Lemma auch im Falle $\nu \models n$ gültig ist. Für $\lambda \models n$ und $i, j \in \mathbb{N}^n$ mit $i \leq_p j$ definieren wir

$$\Pi_\lambda(i, j) := \{ k \in \lambda \mid k \sqcap j = i \}$$

und damit

$$\Pi_\lambda^+(i, j) := \sum_{k \in \Pi_\lambda(i, j)} k.$$

Dann gilt:

$$\{ k \in \lambda \mid i \leq_p k \} = \bigcup_{l \in [i, j]} \Pi_\lambda(l, j). \quad (1)$$

Der Beweis der Aussage folgt sofort aus der für alle $k \in \lambda$ geltenden Beziehung:

$$i \leq_p k \iff i \leq_p k \sqcap j \leq_p j.$$

Die Disjunktheit der Vereinigung ist klar, da \sqcap eine Funktion ist.

Satz 1 *Es seien $\lambda \vdash n$ und $i, j \in \mathbb{N}^n$ mit $i \leq_p j$. Dann gilt:*

1. $\eta_\lambda^{\alpha(i)}(i) = \sum_{l \in [i, j]} \Pi_\lambda^+(l, j)$.
2. $\Pi_\lambda^+(i, j) = \sum_{l \in [i, j]} \mu(i, l) \eta_\lambda^{\alpha(l)}(l)$, wobei μ die Möbius-Funktion bezeichne.
3. Wenn $j \in \lambda$, dann ist $\Pi_\lambda^+(l, j) - \mu(l, j)j \in (S^\lambda)^\perp$.

Die erste Aussage folgt sofort aus der Gleichung (1). Die zweite Aussage ergibt sich aus der ersten durch Anwendung der Möbius Inversion. Die dritte Aussage ist eine unmittelbare Folge der zweiten und von Lemma 1.

Satz 2 Es sei $\lambda \vdash n$ und $j \in \lambda$. Die Menge

$$P_\lambda(j) := \{ \Pi_\lambda^+(l, j) - \mu(l, j)j \mid l \in [0, j], \mu(l, j) \neq 0, \Pi_\lambda(l, j) \neq \emptyset \}$$

ist eine Menge von Paritychecksummen von S^λ für die Koordinate j – m.a.W. gilt:

1. Jedes Element von $P_\lambda(j)$ gehört zu $(S^\lambda)^\perp$ (siehe Satz 1.3).
2. j kommt in jedem Element von $P_\lambda(j)$ mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten vor.
3. Jedes $k \in \lambda$ mit $k \neq j$ kommt in höchstens einem Element von $P_\lambda(j)$ mit nicht verschwindendem Koeffizienten vor (siehe Gl. (1)).

Es ist nützlich, die Paritychecksummen von $P_\lambda(j)$ in der Form

$$P_\lambda(l, j) := j - \mu(l, j)^{-1} \Pi_\lambda^+(l, j) \quad (2)$$

zu schreiben. Zum Beispiel besitzt dann das Element $j = 322111$ des Spechtmoduls $S^{(3,2,1)}$ die Paritychecksummen

$$\begin{aligned} P_\lambda(211111, j) &= 322111 + 211123 + 211132 + 211213 + 211231 + 211312 + 211321, \\ P_\lambda(212113, j) &= 322111 - 212113 - 212131 - 212311 - 213112 - 213121 - 213211, \\ P_\lambda(221111, j) &= 322111 - 221113 - 221131 - 221311 - 231112 - 231121 - 231211, \\ P_\lambda(311111, j) &= 322111 - 311122 - 311212 - 311221, \\ P_\lambda(222111, j) &= 322111 + 223111 + 232111, \\ P_\lambda(312111, j) &= 322111 + 312112 + 312121 + 312211, \\ P_\lambda(321111, j) &= 322111 + 321112 + 321121 + 321211. \end{aligned}$$

Aus diesem Satz ergeben sich einige wichtige codierungstheoretische Folgerungen.

Folgerung 1 Die Minimaldistanz von S^λ beträgt mindestens $|P_\lambda(j)| + 1$.

Beweis: Wir setzen $d = |P_\lambda(j)|$. Da S_n eine Automorphismengruppe von (\mathbb{N}^n, \leq_p) ist, S_n transitiv auf $S_n(j)$ operiert und $(S^\lambda)^\perp$ eine KS_n -Rechtsmodul ist, so gibt es zu jedem $k \in \lambda$ eine Menge von d Paritychecksummen für k . Sei $c = \sum_{l \in \lambda} \kappa_l l \in S^\lambda$ ($\kappa_l \in K$) ein von Null verschiedenes Codewort. Dann gibt es ein $j \in \lambda$ mit $\kappa_j \neq 0$. Schreiben wir die Paritychecksummen von $P_\lambda(j)$ in der Form $j + P_\rho$ ($\rho = 1, \dots, d$), so folgt aus $\langle c, j + P_\rho \rangle = 0$ und der Disjunktheit der Mengen $\Pi_\lambda(l, j)$ für verschiedene $l \in [0, j]$ (siehe Gl. (1)), daß c mindestens das Hamming-Gewicht $d + 1$ besitzt. \square

Aus dem oben Gesagten folgt, daß $S^{(3,2,1)}$ ein linearer Code ist mit Blocklänge 60, Dimension 16 und Minimaldistanz ≥ 8 . Basierend auf dem Beweis vom Folgerung 1 läßt sich eine Decodierungsprozedur für den Code S^λ realisieren; man sagt dann, S^λ ist (bis zu einem gewissen Grad) Majoritäts-logik decodierbar – weitere Details lese man etwa bei Blahut [1] nach.

Folgerung 2 *Es sei λ' die zu λ assoziierte Partition. Dann gilt für die Anzahl d der im Satz 2 definierten Paritychecksummen $P_\lambda(j)$:*

$$d \leq \prod_s \lambda'_s! - 1. \quad (3)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn λ entweder (n) oder eine Partition in genau zwei Teile ist.

Beweis: Für jedes λ -Tableau T gilt:

$$|V(T)| = \prod_s \lambda'_s! = \prod_s s^{\lambda_s} = |[0, j]|;$$

dabei kann $j \in \lambda$ beliebig gewählt werden, weil S_n als Automorphismengruppe auf (\mathbb{N}^n, \leq_p) operiert. Da das Hamming-Gewicht eines " λ -Polytabloids" p_T stets $|V(T)|$ ist, so ergibt sich mittels Folgerung 1 für die Minimaldistanz $\text{dist}(S^\lambda)$ von S^λ die Beziehung

$$\prod_s \lambda'_s! \geq \text{dist}(S^\lambda) \geq d + 1.$$

Es ist klar, daß im Falle $\lambda = (n)$ die Gleichheit in (3) gilt. Ist nun λ eine Partition in zwei Teile, dann ist für jedes $j \in \lambda$ das Intervall $[0, j]$ ein Boole'scher Verband. Somit ergibt sich $\mu(l, j) = \pm 1$ für alle $l \in [0, j]$. Ferner bestätigt man leicht, daß $\Pi_\lambda(l, j) \neq \emptyset$ für alle $l \in [0, j]$. Folglich ist $d = |[0, j]| = \prod_s \lambda'_s! - 1$.

Schließlich sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ eine Partition von n in $m > 2$ Teile. Dann ist

$$i = 1 \dots 12 \dots m \dots mm - 2 \leq_p 1 \dots 12 \dots m \dots mm - 1 \leq_p 1 \dots 12 \dots m \dots mm = j$$

eine \leq_p -Kette der Länge 2. Aus der Definition der Möbius-Funktion folgt sofort $\mu(i, j) = 0$. Also ist $d < |[0, j]| = \prod_s \lambda'_s! - 1$. Damit ist auch die zweite Aussage bewiesen. \square

Folgerung 3 *Es sei $\lambda \vdash n$ eine Partition in höchstens zwei Teile. Dann ist S^λ vollständig (Ein-Schritt) majoritätslogik-decodierbar, d.h. die Minimaldistanz von S^λ ist $d + 1$, wobei d die Anzahl der im Satz 2 definierten Paritychecksummen $P_\lambda(j)$ bezeichnet.*

Die Standardbasis von S^λ sowie die in Satz 2 definierten Paritychecksummen sind in einem von Uli Eidt [2] implementierten Programm realisiert worden.

Eine kleine Liste von Spechtmoduln sowie deren codierungstheoretische Parameter zeigt Tabelle I. Zum Abschluß geben wir noch einige Beispiele an.

Beispiel 1 1. *Es sei $\lambda = (3, 2)$. Die Standardbasis von S_λ ist wie folgt gegeben:*

$$\begin{aligned} b_1 &= 11122 - 12121 - 21112 + 22111, \\ b_2 &= 11212 - 12211 - 21112 + 22111, \\ b_3 &= 11221 - 12211 - 21121 + 22111, \\ b_4 &= 12112 - 12211 - 21112 + 21211, \\ b_5 &= 12121 - 12211 - 21121 + 21211. \end{aligned}$$

<i>Partition</i>	<i>Blocklänge</i>	<i>Dimension</i>	<i>Minimaldistanz</i>
(2,1)	3	2	2
(3,1)	4	3	2
(2,2)	6	2	4
(4,1)	5	4	2
(3,2)	10	5	4
(5,1)	6	5	2
(4,2)	15	9	4
(3,3)	20	5	8
(5,2)	21	14	4
(4,3)	35	14	8
(6,2)	28	20	4
(5,3)	56	28	8
(4,4)	70	14	16
(7,2)	36	27	4
(6,3)	84	48	8
(5,4)	126	42	16
(8,2)	45	35	4
(7,3)	120	75	8
(6,4)	210	90	16
(5,5)	252	42	32

Table I: Eine Liste von Codes S_λ .

Die Paritychecksummen für die Koordinate $j = 11221$ sind gemäß (2) wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} P_\lambda(11211, 11221) &= 11221 + 11212 + 12211 + 21211, \\ P_\lambda(11121, 11221) &= 11221 + 11122 + 12121 + 21121, \\ P_\lambda(11111, 11221) &= 11221 - 12112 - 21112 - 22111. \end{aligned}$$

Folglich ist $S_{\lambda,K}$ ein $(10,5)$ -Code mit Minimaldistanz 4. Zum Beispiel erhalten wir die Paritychecksummen für $j' = 11212$ aus den obigen durch Anwendung der Transposition $\pi = (45)$ (siehe den Beweis von Folgerung 1):

$$\begin{aligned} P_\lambda(11211, 11212) &= 11212 + 11221 + 12211 + 21211, \\ P_\lambda(11112, 11212) &= 11212 + 11122 + 12112 + 21112, \\ P_\lambda(11111, 11212) &= 11212 - 12121 - 21121 - 22111. \end{aligned}$$

2. Im Falle $\lambda = (3,3)$ hat der Spechtmodul $S_{\lambda,K}$ die Basis:

$$\begin{aligned} b_1 &= 111222 - 112221 - 121212 + 122211 - 211122 + 212121 + 221112 - 222111, \\ b_2 &= 112122 - 112221 - 122112 + 122211 - 211122 + 211221 + 221112 - 221211, \\ b_3 &= 112212 - 112221 - 122112 + 122121 - 211212 + 211221 + 221112 - 221121, \\ b_4 &= 121122 - 121221 - 122112 + 122211 - 211122 + 211221 + 212112 - 212211, \\ b_5 &= 121212 - 121221 - 122112 + 122121 - 211212 + 211221 + 212112 - 212121. \end{aligned}$$

Die Paritychecksummen für $j = 112122$ sind gemäß (2) wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} P_\lambda(112121, j) &= 112122 + 112221 + 122121 + 212121, \\ P_\lambda(112112, j) &= 112122 + 112212 + 122112 + 212112, \\ P_\lambda(111122, j) &= 112122 + 111222 + 121122 + 211122, \\ P_\lambda(112111, j) &= 112122 - 122211 - 212211 - 222111, \\ P_\lambda(111121, j) &= 112122 - 121221 - 211221 - 221121, \\ P_\lambda(111112, j) &= 112122 - 121212 - 211212 - 221112, \\ P_\lambda(111111, j) &= 112122 + 221211. \end{aligned}$$

Also ist S^λ ein $(20,5)$ -Code mit Minimaldistanz 8.

Im Text verwendete Abkürzungen:

- \underline{n} $\{1, \dots, n\}$
- \leq "kleiner gleich"-Relation auf \mathcal{N}
- \vdash eigentliche Partition
- \vDash uneigentliche Partition
- \supseteq Dominanzrelation

References

- [1] R.A. BLAHUT, "Theory and Practice of Error Control Codes," Addison Wesley, Reading, 1984.
- [2] U. EIDT, Über Moduln und Codes, Diplomarbeit, Math. Institut, Univ. Bayreuth, Bayreuth, 1991.
- [3] G. JAMES AND A. KERBER, "The Representation Theory of the Symmetric Group," Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison Wesley, London, 1981.
- [4] A. KERBER, "The Combinatorial Use of Finite Group Action," BI Wissenschaftsverlag, Heidelberg, 1990.
- [5] R.A. LIEBLER, On codes in the natural representation of the symmetric group, Techn. Report, Univ. Colorado, Fort Collins, 1978.
- [6] A.W. WONG, Modules as Codes, Thesis, Univ. Colorado, Fort Collins, 1977.