

EQUATIONS FONCTIONNELLES LIANT LA SERIE GENERATRICE DES CARTES PLANAIRE A CELLE DES MOTS DE DYCK

Didier ARQUES & Isabelle JACQUES

Laboratoire d'Informatique de Besançon
Université de Franche-Comté

16 Route de Gray

25030 BESANÇON Cedex.

Karine ORIEUX

Laboratoire d'Informatique de Mulhouse
Université de Haute Alsace

4 Rue des Frères Lumière

68093 MULHOUSE Cedex.

ABSTRACT

For any graph with edges weighted by formal variables, we consider the following "linear evolution" problem. For each n (time) and for x and y (vertices of the graph), $H(n,x,y)$ is, at time 0 the unity value on x , and at time $n+1$ the sum of the $H(n,x,z)$ weighted by the variables associated to the edges (z,y) going in y . There are two different forms of the unique solution of this problem, leading to an identity closely related to the underlying graph. The first form is usual and comes from linear algebra. The second form, very different and using continued fractions of Dyck, is obtained by a totally new approach issued from evolution problems. A particular case of this problem in the case of graph \mathbb{Z} , gives the well known three terms recurrence.

An application in the combinatorics of maps is then proposed, using as underlying graph, the infinite tree, associated to the family of rooted planar maps (well labeled trees), weighted by appropriately chosen formal variables. We then establish a set of functional relations for rooted planar maps and well labeled trees, one of them links the generating series of rooted planar maps with the generating series of Dyck words.

RESUME

Etant donné un graphe quelconque dont les arcs sont valués par des variables formelles, on considère le problème d' "évolution linéaire" suivant : déterminer pour tout n (temps), x et y (sommets du graphe), $H(n,x,y)$, sachant qu'à l'instant 0, $H(0,x,y)$ est la valeur unité en x , et qu'à l'instant $n+1$, $H(n+1,x,y)$ est la somme des $H(n,x,z)$ pondérés par les variables associées aux arcs (z,y) entrant en y . On peut donner deux formes différentes de la solution unique de ce problème, d'où une identité intimement associée au graphe sous-jacent au problème. La première forme est classique et issue de l'algèbre linéaire. La seconde forme, totalement différente et impliquant l'apparition de fractions continues de Dyck est obtenue par une approche totalement nouvelle issue des problèmes d'évolution.

Un cas particulier de ce problème est le cas où le graphe est \mathbb{Z} , celui de la récurrence à trois termes.

Une application dans le cadre de la combinatoire des cartes est alors proposée, utilisant comme graphe, l'arbre infini sous-jacent à la famille des cartes planaires pointées (arbres bien étiquetés), valué par des variables formelles convenablement choisies. On en déduit un ensemble de relations fonctionnelles sur les cartes planaires pointées et les arbres bien étiquetés, dont l'une lie la série génératrice des cartes planaires pointées à la série génératrice des mots de Dyck.

INTRODUCTION

De nombreux problèmes en mathématiques concernent des phénomènes d'évolution, c'est-à-dire dépendant du temps. D'une certaine façon, le problème résolu dans cet article, peut être vu comme celui d'une équation d'évolution, traitée sous un aspect calcul formel, totalement discrétisé et combinatoire. La technique utilisée dans cet article peut également être rapprochée de la classique méthode des éléments finis utilisée en analyse numérique pour modéliser un tel problème d'évolution. La différence étant que l'analyse numérique réalisera des calculs sur des valeurs concrètes alors que les résultats obtenus ici sont réalisés au niveau du calcul formel.

Une autre façon d'interpréter les objets combinatoires et les résultats présentés dans cet article est issue de l'algèbre linéaire. On verra en particulier, que la série formelle $\mathfrak{H}(t,x,y)$ définie ci-dessous est le terme général de l'inverse d'une matrice.

Cependant, cet aspect n'est pas celui qui a guidé l'obtention des résultats de cet article qui présente les résultats suivants :

Au Paragraphe I., une identité nouvelle, intimement associée à tout graphe quelconque est d'abord établie. Précisément, étant donné un graphe quelconque dont les arcs sont valués par des lettres d'un alphabet \mathcal{Q} , on considère le problème d' "évolution linéaire" ainsi défini :

Déterminer pour tout n (entier représentant le temps), x et y (sommets de G), $H(n,x,y)$ dans $\mathbb{N}[[\mathcal{Q}]]$, sachant qu'à l'instant 0, $H(0,x,y)$ est la valeur unité en x , c'est-à-dire $H(0,x,y) = \mathbb{1}_{\{x\}}(y)$ et sachant qu'à l'instant $n+1$, $H(n+1,x,y)$ est la somme des $H(n,x,z)$ pondérés par les variables associées aux arcs (z,y) entrant en y .

Il s'avère que l'on peut donner deux formes différentes de la solution (à l'évidence unique) de ce problème d'évolution, d'où une identité intimement associée au graphe sous-jacent au problème :

La première forme, que l'on trouvera par exemple dans [CF69] ou [Vi85], est très classique et issue de l'algèbre linéaire. $H(n,x,y)$ est dans ce cadre la somme pour tous les chemins de longueur n allant de x à y dans le graphe G , des monômes associés à ces chemins (ce monôme est le produit des valuations des arcs constituant le chemin considéré).

La seconde forme, totalement différente et impliquant l'apparition de fractions continues de Dyck est obtenue par une approche totalement nouvelle issue des problèmes d'évolution. Ainsi l'interprétation des termes qui constituent cette seconde forme sera de nature "markovienne" (c'est-à-dire que la valuation d'un arc le long d'un chemin sera fonction de l'arc qui le précède dans le chemin) par opposition à la situation de l'algèbre linéaire où la valuation d'un chemin est le produit des valuations de ses arcs (situation de nature "indépendante").

Un cas particulier de ce problème est le cas où le graphe sous-jacent est \mathbb{Z} , celui de la bien connue récurrence à trois termes : l'identité, dans ce cas particulier, se déduit essentiellement de l'identité entre la fraction continue et son développement sous forme d'une série formelle.

Les applications de cette équation sont potentiellement nombreuses. On peut songer à des applications à des réseaux de neurones linéaires par exemple.

Au Paragraphe II., est présentée une application dans le cadre de la combinatoire des cartes : on détermine, dans ce paragraphe, l'identité précitée de ce problème d'évolution associé à l'arbre infini (cf [Ar85]) sous-jacent à la famille des cartes planaires pointées (arbres bien étiquetés) (cf [CV81], [Ar86]), valué par des variables formelles convenablement choisies. On en déduit un ensemble de nouvelles relations fonctionnelles sur les cartes planaires pointées et les arbres bien étiquetés, dont la première lie la série génératrice des cartes planaires pointées à la série génératrice des mots de Dyck.

Les méthodes usuelles dans l'étude des cartes planaires pointées concernent la définition de transformations topologiques sur les cartes à partir desquelles on déduit des équations sur les séries génératrices. Cette approche, initiée par W. T. Tutte, a donné la première équation (cf [Tu68]). Une seconde équation totalement différente dans sa forme mais également obtenue par des techniques topologiques a été obtenue par D. Arquès (cf [Ar85]). La troisième équation obtenue ici pour la série génératrice des cartes planaires est totalement nouvelle dans sa technique d'obtention et dans sa forme.

I. UN PROBLEME D'EVOLUTION

I.1. Fonction d'évolution associée à un graphe

DEFINITION : Graphe muni d'une valuation formelle (G, α) .

1. On se donne un multigraphe non orienté $G = (X, U)$ quelconque (éventuellement infini), où l'on rappelle que :

- * X représente l'ensemble des *sommets* du graphe G ,
- * U représente l'ensemble des *arcs* du graphe G (les arcs multiples et les boucles sont autorisés).

G étant non orienté, tout arc i de U admet un arc opposé, noté $-i$ dans la suite.

2. On associe à chaque arc i de G une variable formelle $\alpha(i)$.

On note \mathcal{C} l'alphabet constitué par les lettres $\alpha(i)$ codant les arcs de G .

REMARQUES

1. Dans le cadre d'applications, les variables $\alpha(i)$ peuvent formellement représenter le coefficient de transmission électrique si le graphe est un réseau de neurones, le flux autorisé par l'arc dans un problème de transport ou une variable d'une série génératrice intervenant dans un problème d'énumération naturellement lié au graphe. C'est dans ce dernier cadre que les résultats seront appliqués au Paragraphe II.

2. Le cas d'un multigraphe orienté est inclus dans cette étude. En effet, si i est un arc du graphe G et si $-i$ n'est pas arc de G , il suffit de prendre $\alpha(-i) = 0$.

DEFINITION : Fonction d'évolution H associée à (G, α) .

On considère les fonctions : $y \in X \rightarrow H(n, x, y) \in \mathbb{N}[\mathcal{C}]$

où : $n \in \mathbb{N}$ est le temps,

x est un sommet (donné au départ) du graphe G ,

y est un sommet générique du graphe G ,

$\mathbb{N}[\mathcal{C}]$ est l'ensemble des polynômes formels en les variables commutatives de \mathcal{C} à coefficients entiers.

H étant définie par (cf Figure 1) :

$$(I) \quad \begin{cases} H(0, x, y) = \mathbb{1}_{\{x\}}(y) \\ H(n+1, x, y) = \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) H(n, x, T(j)) \quad , \quad n \geq 0 \end{cases}$$

où : $A(s)$ est l'ensemble des arcs issus de s dans G ,

$T(j)$ est l'extrémité terminale de l'arc j .

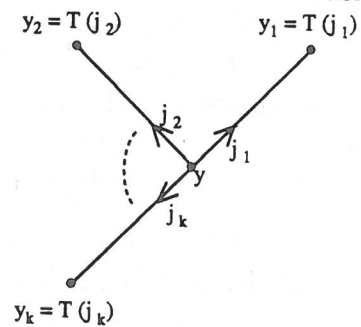


Figure 1

$\mathbb{1}_I(y)$ (notée également $\mathbb{1}_{\{y \in I\}}$) est la valeur prise en y de la fonction indicatrice de l'ensemble I :

$$\mathbb{1}_I(y) = 1 \text{ si } y \in I \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_I(y) = 0 \text{ si } y \notin I$$

Intuitivement, $H(n, x, s)$ correspond à la sortie en s à l'instant n , lorsqu'à l'instant 0, on a injecté la valeur 1 en x dans le graphe G .

PROBLEME D'EVOLUTION : Il s'agit de déterminer H.

ASPECT EQUATION FONCTIONNELLE DE CE PROBLEME D'EVOLUTION

Selon une technique classique en combinatoire, on ramène (I) à une équation fonctionnelle en faisant intervenir la variable t dont l'exposant donne le temps n.

On pose :
$$\mathfrak{H}(t, x, y) = \sum_{n \geq 0} H(n, x, y) t^n$$

On en déduit facilement l'équivalent du système (I) sous forme d'une relation fonctionnelle :

$$(II) \quad \mathfrak{H}(t, x, y) = \mathbb{1}_{\{x\}}(y) + t \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \mathfrak{H}(t, x, T(j))$$

THEOREME 1

La relation fonctionnelle (II) admet une solution unique $\mathfrak{H}(t,x,y)$ dans $\mathbb{N}[\mathcal{Q}][[t]]$ (ensemble des séries formelles en la variable commutative t à coefficients dans $\mathbb{N}[\mathcal{Q}]$).

DEMONSTRATION

Evidente : $\mathfrak{H}(t,x,y)$ est le point fixe unique d'une application contractante dans l'espace métrique complet $\mathbb{N}[\mathcal{Q}][[t]]$ muni de la distance ultramétrique classique définie sur les séries.

REMARQUES

1. Le problème a été posé dans le cadre d'un problème d'évolution, cadre qui a guidé sa résolution, en particulier dans la "Situation 2" (cf Paragraphe I.3. ci-dessous).

Dans le cadre de l'algèbre linéaire, une autre définition classique de $\mathfrak{H}(t,x,y)$ aurait pu être donnée : si l'on associe à tout chemin orienté C de x à y, le monôme constitué par la multiplication des valuations formelles $t.\alpha(i)$ de ses arcs i, $\mathfrak{H}(t,x,y)$ n'est autre que la série somme de tous ces monômes (c'est la "Situation 1" décrite au Paragraphe I.3. ci-dessous). Par ailleurs, si \mathcal{A} est la matrice d'adjacence formelle du multigraphe G (le terme $a_{x,y}$ de \mathcal{A} est la somme des valuations des arcs allant de x à y) alors la matrice $(\mathfrak{H}(t,x,y))_{x,y}$ n'est autre que $(Id - t \mathcal{A})^{-1}$. On en déduit l'expression bien classique $\mathfrak{H}(t,x,y) = N_{x,y} / \det (Id - t \mathcal{A})$, où $N_{x,y}$ est le mineur pour (x,y) de la matrice (cf [CF69], [Vi85]).

2. Cette représentation matricielle n'est cependant pas adaptée à la "Situation 2" définie Paragraphe I.3., d'où ce choix de présentation du problème.

I.2. Résolution dans le cas particulier du graphe infini $G = \mathbb{Z}$

Dans ce cas particulier, la relation (I) est une récurrence à trois termes, dont la solution est classiquement donnée par une fraction continue.

DESCRIPTION DU PROBLEME

* On considère le cas où α_+ et α_- étant des variables données,
 \forall arc $(y, y+1), y \in \mathbb{Z} : \alpha(y,y+1) = \alpha_+$ et $\alpha(y+1,y) = \alpha_-$
 sont indépendantes de y.

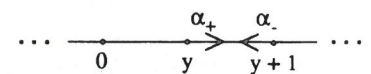


Figure 2

* Il y a alors invariance par translation : $\forall x$ et $y \in \mathbb{Z} \mathfrak{H}(t, x, y) = \mathfrak{H}(t,0,y - x)$

SOLUTION DE CE PROBLEME SUR \mathbb{Z}

THEOREME 2 : Détermination de \mathcal{H} .

Si l'on note d la série génératrice des mots de Dyck, solution de l'équation $d(z) = 1 + zd^2(z)$, et :

$$\lambda_+ = \lambda(\alpha_+, \alpha_+) = t \cdot \alpha_+ \cdot d(t \cdot \alpha_+ \cdot t \cdot \alpha_+) = \frac{t \alpha_+}{1 - \frac{t^2 \alpha_+ \alpha_+}{1 - \frac{t^2 \alpha_+ \alpha_+}{\dots}}}$$

$$\lambda_- = \lambda(\alpha_-, \alpha_-) = t \cdot \alpha_- \cdot d(t \cdot \alpha_- \cdot t \cdot \alpha_-) = \frac{t \alpha_-}{1 - \frac{t^2 \alpha_- \alpha_-}{1 - \frac{t^2 \alpha_- \alpha_-}{\dots}}}$$

$$\mu = \alpha_+ \lambda_+ = \alpha_- \lambda_-$$

On a : 1. $\mathcal{H}(t, 0, 0) = \frac{1}{1 - 2\mu t}$

2. $\forall i > 0 :$

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{H}(t, 0, i) = \lambda_+^i \mathcal{H}(t, 0, 0) \\ \mathcal{H}(t, 0, -i) = \lambda_-^i \mathcal{H}(t, 0, 0) \end{array} \right.$$

DEMONSTRATION

2. Comme rappelé à la remarque précédente, $\mathcal{H}(t, 0, i)$, $i > 0$ (démonstration analogue pour $i < 0$), est la somme sur tous les chemins allant de 0 à i sur \mathbb{Z} , des monôme constitués pour chacun de ces chemins de la multiplication des valuations formelles $t \cdot \alpha_+$ (resp. $t \cdot \alpha_-$) de ses arcs montants (resp. descendants). Par décomposition en fonction des derniers passages aux niveaux 0, 1, ..., $i-1$, on décompose un tel chemin en un chemin allant de 0 en 0 (terme générique de $\mathcal{H}(t, 0, 0)$), puis en une montée (la dernière de 0 en 1 (terme $t \cdot \alpha_+$) suivi d'un chemin allant de 1 en 1 sans jamais passer en dessous du niveau 1 (c'est un mot de Dyck dont les pas montants et descendants sont respectivement codés par $t \cdot \alpha_+$ et $t \cdot \alpha_-$, donc le terme générique de $d(t \cdot \alpha_+ \cdot t \cdot \alpha_-)$) et ainsi de suite jusqu'au niveau i , d'où la formule :

$$\mathcal{H}(t, 0, i) = \mathcal{H}(t, 0, 0) \cdot (t \alpha_+ \cdot d(t^2 \alpha_+ \alpha_+))^i = \mathcal{H}(t, 0, 0) \lambda_+^i$$

1. Pour $i = 0$, le résultat se déduit de 2. et de l'équation :

$$\mathcal{H}(t, 0, 0) = 1 + t \alpha_+ \mathcal{H}(t, 0, -1) + t \alpha_- \mathcal{H}(t, 0, 1)$$

REMARQUE : L'équation $\mathcal{H}(t, 0, i) = \lambda_+^i \mathcal{H}(t, 0, 0)$ est un cas particulier dans \mathbb{Z} de l'identité générale annoncée dans l'introduction (cf § I.3.) : le membre de gauche est la somme classique sur tous les chemins allant de 0 à i , issue de l'algèbre linéaire, alors que le membre de droite peut être interprété autrement. Considérons la valuation de type markovienne suivante : un arc d'un chemin donné est valué λ_+ ou λ_- (resp. 0) s'il est montant ou descendant et précédé,

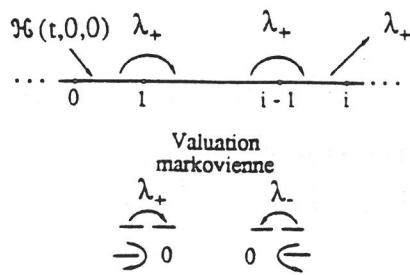


Figure 3

dans ce chemin, par un arc allant dans le même sens (resp. dans le sens contraire). Le premier arc du chemin issu de 0 sera valué par $\mathcal{H}(t, 0, 0)$ et le dernier arc du chemin par λ_+ ou λ_- suivant qu'il est montant ou descendant. On constate alors (pour $i > 0$ par exemple) que le seul chemin ayant une contribution non nulle pour cette valuation est le chemin qui monte directement de 0 à i sans jamais faire de retour arrière, et cette contribution est le membre de droite de l'équation interprétée. Il s'avère que ce type de formule peut être généralisée au cas d'un multigraphe valué quelconque :

I.3. Résolution dans le cas général

Généralisant les valuations markoviennes décrites dans le cas de \mathbb{Z} dans la remarque précédente, on a les notations suivantes :

NOTATIONS

Les séries définies ci-dessous, sont formelles en les variables commutatives : $t, \alpha(i), i \in U$.

1. On note $\varepsilon_{i,j}$ une série formelle appelée *coefficient de transmission* de l'arc i à l'arc j .
2. On note $v(x)$, une série formelle appelée *ordre de x* , associée à tout sommet x du graphe G .
On note $\phi(i)$, une série formelle associée à tout arc i du graphe G .
3. x et y étant deux sommets du graphe G , on note $\mathfrak{C}(x,y)$, l'ensemble des chemins orientés de x à y dans G , de longueur $n \geq 1$.
On notera : $C = (x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y)$ un chemin dans $\mathfrak{C}(x,y)$, constitué des arcs : $i_1 = (x_0, x_1), \dots, i_n = (x_{n-1}, x_n)$ où i_n , dernier arc de C , sera noté $f(C)$.

On associe alors à un tel chemin C , la série formelle de transmission le long de C :

$$\delta(C) = \mathbb{1}_{n=1} + \mathbb{1}_{n \geq 2} \prod_{l=1}^{n-1} \varepsilon_{i_l, i_{l+1}}$$

$\delta(C)$ n'est autre que le produit des coefficients de transmission le long des arcs de C joignant x à y dans le graphe G .

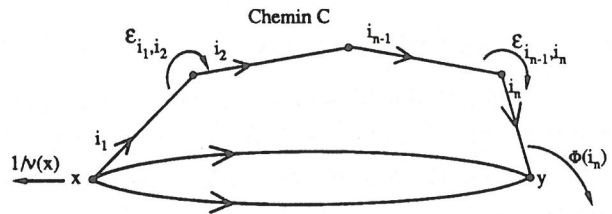


Figure 4

4. La solution sur \mathbb{Z} (cf § I.2.) "pour l'arc i " du graphe G , c'est-à-dire avec :
 $\alpha_+ = \alpha(i)$ et $\alpha_- = \alpha(-i)$ sera notée : $\lambda_+ = \lambda(\alpha(i), \alpha(-i)) = \lambda_i(t)$.
On a alors : $\lambda_- = \lambda_{-i}(t)$ (évident).

THEOREME 3 : La solution unique du problème d'évolution (II) est :

$$\mathfrak{K}(t,x,y) = \frac{1}{v(x)} \left[\mathbb{1}_{\{x\}}(y) + \sum_{C \in \mathfrak{C}(x,y)} \delta(C) \cdot \phi(f(C)) \right]$$

Cette formule étant prise dans l'une ou l'autre des deux Situations 1 et 2 :

SITUATION 1	$v(x) = 1$ $\varepsilon_{i,j} = t \cdot \alpha(i)$ $\varepsilon_{i,j} = 0$	$\phi(i) = t \cdot \alpha(i)$
(algèbre linéaire)		si i est prédécesseur de j dans G
		sinon

SITUATION 2	$v(x) = 1 - \sum_{j \in A(x)} \alpha(-j) \cdot t \cdot \lambda_j$ $\varepsilon_{i,j} = \alpha(i) (1 - \lambda_i \lambda_{-i}) \frac{t}{v(T(i))} = \phi(i)$ $\varepsilon_{i,j} = \alpha(i) (1 - \lambda_i \lambda_{-i}) \frac{t}{v(T(i))} - \lambda_i = \phi(i) - \lambda_i$	$\phi(i) = \alpha(i) (1 - \lambda_i \lambda_{-i}) \frac{t}{v(T(i))}$
(markovienne)		si i est prédécesseur de j et $j \neq -i$
		si i est prédécesseur de j et $j = -i$

REMARQUES

1. Dans la Situation 1, on a la situation classique de l'algèbre linéaire, l'expression de $\mathfrak{H}(t,x,y)$ donnée par le second membre du Théorème 3 étant alors la classique série somme des monômes (obtenus par multiplication des variables $t.\alpha(i)$ associées aux arcs i du chemin) associés aux chemins orientés de x à y .

2. Dans la Situation 2, le monôme $\delta(C).\phi(f(C))$ associé au chemin C , n'est pas multiplicatif comme dans la Situation 1, mais de type markovien, la quantité $\epsilon_{i,j}$ associée à l'arc j dépendant de son prédécesseur i dans le chemin C . Ce n'est plus la situation classique de l'algèbre linéaire.

3. S'il existe $i \in G / \alpha(i)$ et $\alpha(-i)$ sont différents de 0 alors λ_i et λ_{-i} sont différents de 0 dans la Situation 2, et donc les deux expressions de $\epsilon_{i,j}$ dans les Situations 1 et 2 sont effectivement profondément différentes. Par suite, ces deux situations conduisent, par le Théorème 3, à deux expressions différentes de la même fonctionnelle \mathfrak{H} .

On en déduit donc une relation fonctionnelle nouvelle associée au graphe G .

4. Dans le cas particulier du Paragraphe I.2. où $G = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{H}(t,0,0)$ apparaît comme la fraction continue associée à une récurrence à trois termes particulière. Le Théorème 3 peut donc être vu comme une généralisation à un graphe quelconque de l'égalité entre une fraction continue (expression de $\mathfrak{H}(t,x,y)$ dans la Situation 2) et son développement en série formelle (expression de $\mathfrak{H}(t,x,y)$ dans la Situation 1).

Pour prouver le Théorème 3, le lemme technique ci-dessous sera nécessaire :

LEMME : Décomposition de chemins

Soient x et y deux sommets de G .

Alors l'ensemble des chemins de x à y est : $\mathbb{1}_{\{x\}}(y) + \mathfrak{C}(x,y)$

où $\mathfrak{C}(x,y)$, ensemble des chemins orientés de x à y , de longueur ≥ 1 , se décompose en :

$$\mathfrak{C}(x,y) = \sum_{j \in A(y)} \mathbb{1}_{\{x\}}(y_j) \cdot (-j) + \sum_{j \in A(y)} \mathfrak{C}(x,y_j) \cdot (-j)$$

avec : j l'arc générique ($y, y_j = T(j)$) issu de y , $A(y)$ l'ensemble des arcs issus de y dans G ,
 "." l'opération de concaténation des chemins et \sum l'union ensembliste disjointe.

DEMONSTRATION DU LEMME

Evidente (le premier terme du second membre de cette équation donne les chemins de longueur 1 et le second terme ceux de longueur ≥ 2).

DEMONSTRATION DU THEOREME 3

SITUATION 1. Cette situation est évidente et classique : laissée au lecteur.

SITUATION 2. On garde la notation du lemme précédent : j arc générique ($y, y_j = T(j)$) issu de y .

Montrons que l'équation (II) est vérifiée quand on remplace \mathfrak{H} par sa valeur donnée par le Théorème 3 dans la Situation 2. La quantité :

$$\sigma = \mathbb{1}_{\{x\}}(y) + t \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \mathfrak{H}(t, x, y_j = T(j)) \quad \text{est égale, par le Théorème 3 à :}$$

$$\sigma = \mathbb{1}_{\{x\}}(y) + t \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \frac{1}{v(x)} \left[\mathbb{1}_{\{x\}}(y_j) + \sum_{C_j \in \mathfrak{C}(x,y_j)} \delta(C_j) \cdot \phi(f(C_j)) \right]$$

Or, par définition de ϕ et du coefficient de transmission ϵ , on a : $\phi(f(C_j)) = \epsilon_{f(C_j), -j} + \mathbb{1}_{\{j\}}(f(C_j)) \cdot \lambda_j$

Donc, en notant $C = C_j \cdot (-j)$, où $C_j \in \mathfrak{C}(x, y)$: $\delta(C_j) \cdot \phi(f(C_j)) = \delta(C) + \mathbb{1}_{\{j\}}(f(C_j)) \cdot \delta(C_j) \cdot \lambda_j$

De plus, le dernier terme de l'équation précédente n'est non nul que si : $f(C_j) = j$, c'est-à-dire si $C_j = d \cdot j$, avec d un chemin de x à y .

Donc, si l'on note $C_j = d \cdot j$ dans ce dernier terme, on a, en exprimant $\delta(C_j)$ en fonction de $\delta(d)$, en distinguant les cas où la longueur $|d|$ du chemin d est ≥ 1 (et donc : d appartient à $\mathfrak{C}(x, y)$) ou nulle :

$$\delta(C_j) \cdot \phi(f(C_j)) = \delta(C) + \mathbb{1}_{C_j = d \cdot j, |d| \geq 1} \delta(d) \epsilon_{f(d), j} \cdot \lambda_j + \mathbb{1}_{C_j = j} \lambda_j$$

$$\text{Donc : } \sigma = \mathbb{1}_{\{x\}}(y) + t \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \frac{1}{v(x)} \dots$$

$$\cdot \left[\mathbb{1}_{\{x\}}(y_j) + \sum_{C_j \in \mathfrak{C}(x, y)} \delta(C) + \sum_{C_j \in \mathfrak{C}(x, y)} \mathbb{1}_{C_j = d \cdot j, |d| \geq 1} \delta(d) \epsilon_{f(d), j} \cdot \lambda_j + \sum_{C_j \in \mathfrak{C}(x, y)} \mathbb{1}_{C_j = j} \lambda_j \right]$$

Or, par le lemme de décomposition de chemins, les deux premiers termes du crochet ci-dessus, se réécrivent, compte tenu de la définition de δ :

$$\frac{t}{v(x)} \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \left[\mathbb{1}_{\{x\}}(y_j) + \sum_{C_j \in \mathfrak{C}(x, y)} \delta(C) \right] = \frac{t}{v(x)} \sum_{C \in \mathfrak{C}(x, y)} \alpha(f(C)) \delta(C)$$

Par ailleurs, dire que C_j dans $\mathfrak{C}(x, y)$ est de la forme $d \cdot j$ avec $|d| \geq 1$, est équivalent à dire que d appartient à $\mathfrak{C}(x, y)$, ce qui permet de réécrire le troisième terme du crochet :

$$t \sum_{j \in A(y)} \sum_{d \in \mathfrak{C}(x, y)} \alpha(-j) \frac{1}{v(x)} \delta(d) \epsilon_{f(d), j} \lambda_j$$

Enfin, dans le quatrième terme du crochet, C_j dans $\mathfrak{C}(x, y)$ est égal à $j = (y, y)$ si et seulement si $x = y$.

Ce quatrième terme se réécrit donc : $\mathbb{1}_{\{x\}}(y) \cdot t \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \frac{1}{v(x)} \lambda_j$

On déduit de ces remarques :

$$\begin{aligned} \sigma = & \mathbb{1}_{\{x\}}(y) + t \sum_{C \in \mathfrak{C}(x, y)} \alpha(f(C)) \frac{1}{v(x)} \delta(C) + t \sum_{j \in A(y)} \sum_{d \in \mathfrak{C}(x, y)} \alpha(-j) \frac{1}{v(x)} \delta(d) \epsilon_{f(d), j} \lambda_j \\ & + \mathbb{1}_{\{x\}}(y) t \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \frac{1}{v(x)} \lambda_j \end{aligned}$$

En réécrivant le dernier terme à l'aide de la définition de $v(x)$ et en remplaçant la notation d par C dans le troisième terme, on a :

$$\sigma = \mathbb{1}_{\{x\}}(y) + \mathbb{1}_{\{x\}}(y) \cdot \frac{1 - v(x)}{v(x)} + \frac{1}{v(x)} \sum_{C \in \mathfrak{C}(x, y)} t \cdot \delta(C) \left[\alpha(f(C)) + \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \epsilon_{f(C), j} \lambda_j \right]$$

Or : $\phi(f(C)) = \alpha(f(C)) (1 - \lambda_{f(C)} \lambda_{-f(C)}) \frac{t}{v(y)}$, soit : $t = \phi(f(C)) \frac{v(y)}{\alpha(f(C)) (1 - \lambda_{f(C)} \lambda_{-f(C)})}$, d'où :

$$\sigma = \frac{1}{v(x)} \mathbb{1}_{\{x\}}(y) + \frac{1}{v(x)} \sum_{C \in \mathfrak{C}(x, y)} \delta(C) \cdot \phi(f(C)) \cdot \frac{v(y)}{\alpha(f(C)) (1 - \lambda_{f(C)} \lambda_{-f(C)})} \left[\alpha(f(C)) + \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \epsilon_{f(C), j} \lambda_j \right]$$

qui sera bien égale à l'expression donnant $\mathfrak{H}(t, x, y)$ au Théorème 3, Situation 2 si l'on vérifie l'égalité :

$$(*) \quad \frac{v(y)}{\alpha(f(C)) (1 - \lambda_{f(C)} \lambda_{-f(C)})} \cdot \left[\alpha(f(C)) + \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \epsilon_{f(C), j} \lambda_j \right] = 1$$

c'est-à-dire :
$$\frac{1 - \lambda_{f(C)} \lambda_{-f(C)}}{v(y)} = 1 + \sum_{j \in A(y)} \frac{\alpha(-j)}{\alpha(f(C))} \varepsilon_{f(C), j} \lambda_j$$

Or $T(f(C)) = y$ (extrémité terminale de $f(C)$), donc :

$$\varepsilon_{f(C), j} = \alpha(f(C)) \left(1 - \lambda_{f(C)} \lambda_{-f(C)}\right) \frac{t}{v(y)} \quad \text{si } j \neq -f(C)$$

$$\varepsilon_{f(C), j} = \alpha(f(C)) \left(1 - \lambda_{f(C)} \lambda_{-f(C)}\right) \frac{t}{v(y)} - \lambda_{f(C)} \quad \text{si } j = -f(C)$$

Donc (*) se réécrit :
$$\frac{1 - \lambda_{f(C)} \lambda_{-f(C)}}{v(y)} = 1 + \left(\sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \left(1 - \lambda_{f(C)} \lambda_{-f(C)}\right) \frac{t}{v(y)} \lambda_j \right) - \lambda_{f(C)} \lambda_{-f(C)}$$

Le dernier terme étant issu du terme en $-\lambda_{f(C)}$ de $\varepsilon_{f(C), j}$ dans le cas où $j = -f(C)$.

Donc (*) se simplifie en :
$$\frac{1 - \lambda_{f(C)} \lambda_{-f(C)}}{v(y)} = \left(1 - \lambda_{f(C)} \lambda_{-f(C)}\right) \left(1 + \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \frac{t}{v(y)} \lambda_j\right)$$

Soit : $\frac{1}{v(y)} = 1 + \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \frac{t}{v(y)} \lambda_j$, d'où : $1 = v(y) + \sum_{j \in A(y)} \alpha(-j) \cdot t \cdot \lambda_j$, exact par définition de v .

CQFD.

REMARQUE

La démonstration présentée ici, montre que les deux situations proposées sont bien solutions du problème. Il est bien évident que trouver la forme explicite de ces deux solutions (en particulier, celle de la Situation 2) n'est pas le fruit du hasard, mais a nécessité une autre approche dans laquelle la forme de la solution \mathfrak{H} est exprimée à l'aide de séries inconnues intervenant dans des produits de convolution liés aux noeuds du graphe. Cette approche, semble nouvelle dans le cadre du calcul formel (cf [AJ91]).

II. UN ENSEMBLE DE RELATIONS FONCTIONNELLES SUR LES CARTES

II.1. Définitions et résultats relatifs aux cartes planaires pointées

On va maintenant étudier le problème d'évolution présenté au Paragraphe I., avec pour graphe G , l'arbre infini I naturellement associé aux cartes planaires pointées (cf Figure 5).

Nous rappelons d'abord quelques définitions et résultats :

Une *carte planaire* est une partition de la sphère de \mathbb{R}^3 en trois ensembles finis de cellules : les sommets qui sont représentés par des points, les arêtes qui sont représentées par des arcs de Jordan ouverts, simples, deux à deux disjoints et dont les extrémités (confondues ou non) sont des sommets, les faces qui sont des domaines simplement connexes dont les frontières sont constituées d'arêtes et de sommets. On choisit sur cette carte un arc (ou brin) appelé *brin distingué*. Deux telles cartes planaires munies d'un brin distingué sont dites *équivalentes* s'il existe un homéomorphisme de la sphère, préservant son orientation qui échange sommets, arêtes, faces et brins distingués des deux cartes. On appellera alors *carte planaire pointée* une telle classe d'équivalence de cartes planaires munies d'un brin distingué.

On notera $R_0(z)$ la série génératrice du nombre de cartes planaires pointées dans laquelle le degré de z décompte le nombre d'arêtes de la carte planaire pointée.

Un *arbre i-bien étiqueté* est un arbre plongé dans le plan dont les sommets sont étiquetés par des entiers naturels, dont la racine est étiquetée i ($i \geq 0$) et dont deux sommets adjacents ont des étiquettes qui diffèrent au plus d'une unité (Dans la suite, on appellera *arbre bien étiqueté*, un arbre 0-bien étiqueté).

L'*arbre infini I associé à la famille des arbres bien étiquetés* est l'arborescence infinie plongée dans le plan, de racine r étiquetée 0, dont tout sommet étiqueté 0 a exactement deux fils gauche et droit respectivement étiquetés 0 et 1, et dont tout sommet étiqueté $i \geq 1$ a exactement trois fils étiquetés $i-1, i, i+1$ dans cet ordre de gauche à droite.

On a les résultats suivants (cf [Ar85], [Ar86] et [CV81]) illustrés par la Figure 5 :

THEOREME 4 : Les trois ensembles suivants sont en bijection (bijections laissant invariant le nombre d'arcs dans la carte, l'arbre et le circuit associés) :

- l'ensemble des cartes planaires pointées,
- l'ensemble des arbres bien étiquetés et
- l'ensemble des circuits allant de la racine à la racine sur l'arbre infini I.

DEMONSTRATION : Se reporter à [Ar85], [Ar86], [CV81].

Nous rappelons seulement ici l'algorithme de passage d'un circuit C à un arbre A :

Lors du parcours du circuit C issu de la racine de I :

* lorsque l'on descend le long d'un arc a de l'arbre infini I, on crée dans l'arbre bien étiqueté A en construction à partir de la position courante, un nouvel arc a' , dont l'extrémité finale est une feuille d'étiquette celle de l'extrémité finale de a dans I,

* lorsque l'on remonte le long d'un arc a de l'arbre infini I, on remonte dans A le long de l'arc a' qui lui a été associé lors de la précédente descente de a dans I.

II.2. Fonction \mathfrak{H} associée à l'arbre infini I

Afin d'appliquer les résultats du Paragraphe I. au graphe constitué par l'arbre infini I, on associe (cf Figure 5) à tout arc descendant (resp. montant) i de I, la valuation $\alpha(i) = z$ (resp. 1).

On imposera par ailleurs dans la suite $t = 1$ dans l'expression de la fonction \mathfrak{H} .

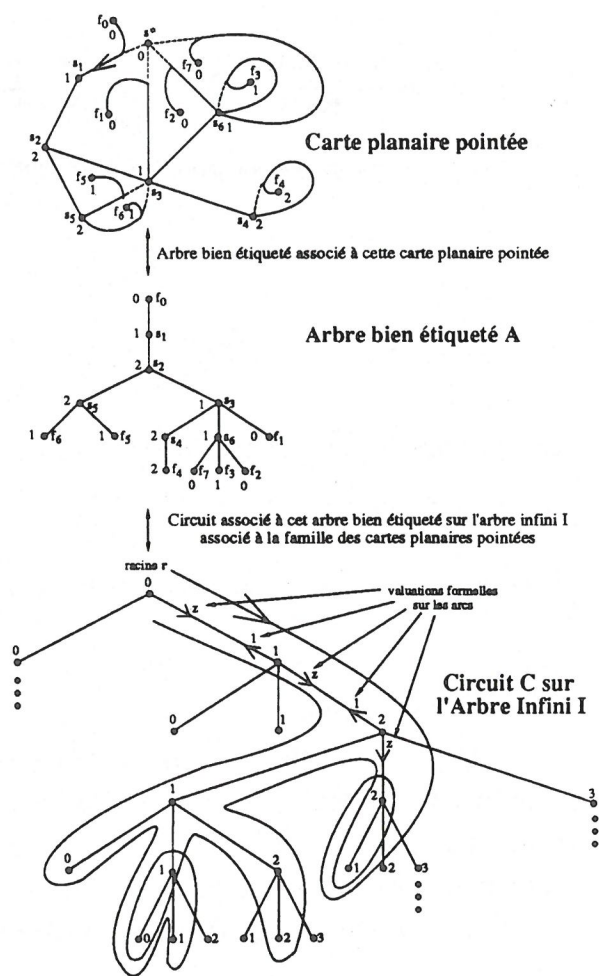


Figure 5

La série génératrice $\mathfrak{H}(1,r,r)$ (cf Remarque en fin de Paragraphe I.1. et Situation 1 du Paragraphe I.3.) est la série somme pour tous les circuits C allant de la racine r à la racine r dans I , des monômes multiplicatifs $m(C)$ ($m(C)$ est la multiplication des étiquettes associées à chaque arc de C). De par la valuation choisie sur I , $m(C)$ compte (variable z) le nombre d'arcs descendants de C , c'est-à-dire le nombre d'arêtes de l'arbre bien étiqueté et de la carte associée par les bijections du Théorème 4. Donc :

PROPOSITION 1 : r étant la racine de l'arbre I et $R_0(z)$ la série génératrice des cartes planaires pointées décomptées en fonction du nombre d'arêtes, on a : $\mathfrak{H}(1, r, r) = R_0(z)$

EXEMPLE

Monôme associé au circuit Figure 5 : $m(C) = z.z.z.z.1.z.1.1.z.z.z.1.1.z.z.1.z.1.z.1.1.z.1.1.1.1 = z^{13}$
Le degré de z donne le nombre d'arêtes dans l'arbre bien étiqueté et dans la carte associés.

II.3. Un ensemble de nouvelles relations fonctionnelles sur les cartes planaires pointées

En utilisant l'expression de \mathfrak{H} dans la Situation 2, on va déduire de la Proposition 1 précédente, une nouvelle expression pour R_0 . Cette nouvelle expression de \mathfrak{H} nécessite de déterminer les expressions de v et des coefficients de transmission ϵ :

II.3.1. Détermination de v et $\epsilon_{i,j}$ pour l'arbre infini I

La simplification des formules donnant v et $\epsilon_{i,j}$ (Lemmes 2 et 3) utilise le Lemme 1 (évident) suivant :

LEMME 1 : Avec $t = 1$, on déduit du Théorème 2 (cf § I.2.) les formules sur $\lambda_+ = \lambda(\alpha_+, \alpha_-)$

1. $\lambda_+ = \frac{\alpha_+}{1 - \alpha_- \lambda_+}$ et $\frac{1}{\alpha_+} \lambda(\alpha_+, \alpha_-) = \frac{1}{\alpha_-} \lambda(\alpha_-, \alpha_+) = \frac{1}{\alpha_+ \alpha_-} \lambda(\alpha_+ \alpha_-, 1) = \lambda(1, \alpha_+ \alpha_-)$

2. $\lambda(1, \alpha_+ \alpha_-) = d(\alpha_+ \alpha_-)$, où d est la série génératrice des mots de Dyck ($d(z)=1+z d^2$)

LEMME 2 : Expression de $v(s)$.

On distingue 3 situations pour le sommet s dans l'arbre infini I (cf Figures 5 et 6) donnant des expressions différentes pour $v(s) = 1 - \sum_{j \in A(s)} \alpha_{(-j)} \lambda_j$, (d est la série génératrice des mots de Dyck) :

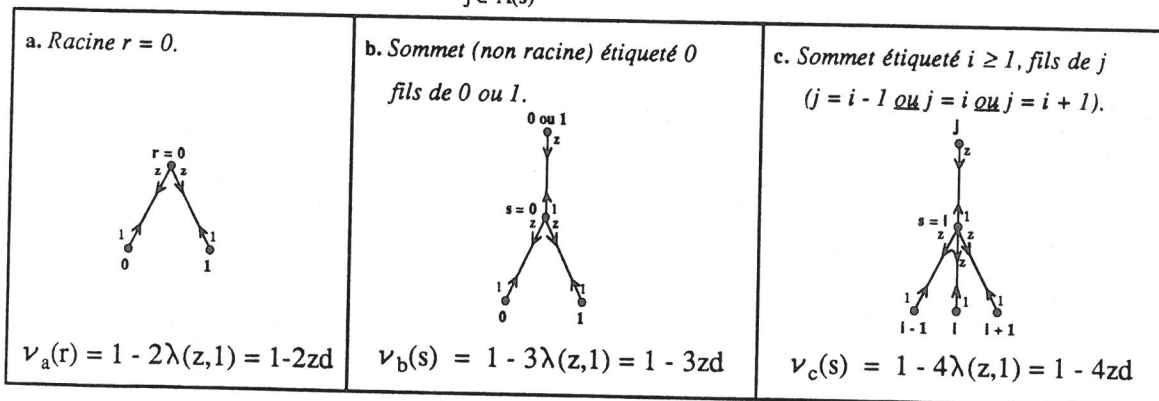


Figure 6

DEMONSTRATION : Evidente à partir du Lemme 1.

LEMME 3 : Soit un circuit C associé à un arbre bien étiqueté A. On donne ci-dessous les différentes situations possibles dans I pour les arcs successifs i et j, donnant des valeurs différentes pour les coefficients $\epsilon_{i,j}$ et créant des sommets de natures différentes dans A par l'algorithme du Théorème 4 :

Cas 1. L'arc i remonte en la racine r depuis k (k = 0 ou k = 1)			
<p>1.1</p>	$\epsilon_{i,-i} = 0 \Rightarrow \delta(C) = 0$ Création dans A d'un nouveau fils à la racine d'étiquette égale à celle de son frère gauche. Un arbre bien étiqueté ayant deux fils successifs de la racine de même étiquette aura une contribution 0 dans $\mathcal{H}(1,r,r)$.	<p>1.2</p>	$\epsilon_{i,j} = \frac{1 - z d^2}{1 - 2zd}$ Création dans A d'un nouveau fils à la racine d'étiquette différente de celle de son frère gauche. On note p la variable comptant le nombre de fils à la racine dans A.
Cas 2. L'arc i remonte en un sommet 0 (fils de 0 ou 1, donc non racine) depuis k (k = 0 ou k = 1).			
<p>2.1</p>	$\epsilon_{i,j} = \frac{1 - z d^2}{1 - 3zd}$ Création dans A d'un fils d'un sommet non racine étiqueté 0, fils qui est soit fils gauche, soit de frère à gauche d'étiquette différente. On note δ_0 la variable qui décompte le nombre de ces sommets dans A.	<p>2.2</p>	$\epsilon_{i,-i} = \frac{z d^2}{1 - 3zd}$ Création dans A d'un fils d'un sommet non racine étiqueté 0, fils dont le frère à gauche a la même étiquette (0 ou 1). Un tel sommet sera appelé <i>sommet dupliqué</i> . On note σ_0 la variable qui décompte le nombre de ces sommets dans A.
Cas 3. L'arc i remonte en un sommet k ≥ 1 depuis l (l = k - 1 ou l = k ou l = k + 1).			
<p>3.1</p>	$\epsilon_{i,j} = \frac{1 - z d^2}{1 - 4zd}$ Création dans A d'un fils d'un sommet étiqueté k ≥ 1, fils qui est soit fils gauche, soit de frère à gauche d'étiquette différente. On note δ_1 la variable qui décompte le nombre de ces sommets dans A.	<p>3.2</p>	$\epsilon_{i,-i} = \frac{2z d^2}{1 - 4zd}$ Création dans A d'un sommet dupliqué, fils d'un sommet étiqueté k ≥ 1. On note σ_1 la variable qui décompte le nombre de ces sommets dans A.
Cas 4. L'arc i descend en un sommet 0 depuis 0 ou 1.			
<p>4.1</p>	$\epsilon_{i,j} = \frac{z(1 - z d^2)}{1 - 3zd}$ Création dans A d'un sommet étiqueté 0 (non racine et non feuille). On note ω_0 la variable qui décompte le nombre de ces sommets dans A.	<p>4.2</p>	$\epsilon_{i,-i} = \frac{z^2 d^2}{1 - 3zd}$ Création dans A d'une feuille étiquetée 0. On note φ_0 la variable qui décompte le nombre de ces sommets dans A.
Cas 5. L'arc i descend en un sommet k ≥ 1 depuis l ≥ 0.			
<p>5.1</p>	$\epsilon_{i,j} = \frac{z(1 - z d^2)}{1 - 4zd}$ Création dans A d'un sommet étiqueté k ≥ 1 (non feuille). On note ω_1 la variable qui décompte le nombre de ces sommets dans A.	<p>5.2</p>	$\epsilon_{i,-i} = \frac{2z^2 d^2}{1 - 4zd}$ Création dans A d'une feuille étiquetée k ≥ 1. On note φ_1 la variable qui décompte le nombre de ces sommets dans A.

Figure 7

DEMONSTRATION

On vérifie facilement que tous les cas possibles ont été envisagés dans le calcul des coefficients de transmission. Il est facile de contrôler les séries formelles donnant ces $\epsilon_{i,j}$. Il reste à justifier (à l'aide de l'algorithme du Théorème 4) l'association à chaque situation d'un paramètre combinatoire dans l'arbre A. Montrons par exemple, que le nombre de couples (i,j) d'arcs successifs de C appartenant au cas 2.2 est bien égal au nombre de sommets dupliqués, fils d'un sommet étiqueté 0 non racine, dans A (c'est-à-dire au degré de la variable σ_0). Les autres cas ont un traitement analogue.

Par la bijection entre circuit et arbre bien étiqueté, permettant de construire A à partir de C, un nouveau sommet s est créé dans l'arbre, lorsque l'on descend le long d'un arc $j = (\alpha, \beta)$ de I avec $\beta = \alpha - 1, \alpha$ ou $\alpha + 1$. Son étiquette sera l'étiquette β du sommet atteint dans I par cette descente. Par ailleurs, ce nouveau sommet créé dans A, sera frère d'un sommet t étiqueté γ de A, si l'arc i précédent j dans C, est un arc remontant dans I (depuis le sommet étiqueté γ) (évident par l'algorithme construisant A à partir de C).

Dès lors, s sera un sommet dupliqué étiqueté 0 (resp. 1) (avec $\beta = \gamma = 0$ (resp. $\beta = \gamma = 1$)) si il est associé aux arcs successifs i et j avec i montant depuis 0 (resp. 1) dans I et j redescendant en 0 (resp. 1), c'est-à-dire $i = -j$ (car i et j sont successeurs dans I). Par ailleurs, s sera fils d'un sommet non racine étiqueté 0 si le sommet final de i (et initial de j) est étiqueté 0 et est différent de la racine r de I. Le cas 2.2 du Lemme 3 est exactement celui satisfaisant ces conditions.

REMARQUE : Nouveaux paramètres dans l'étude combinatoire des arbres bien étiquetés

Le Lemme 3 a montré que les différentes situations possibles pour deux arcs successifs i, j dans le circuit C sur l'arbre infini I, se regroupent par paquets donnant des expressions identiques pour $\epsilon_{i,j}$, et correspondant à la création d'un type précis de paramètres combinatoires caractérisant l'arbre bien étiqueté (feuilles étiquetées 0, ...) associé à C par l'algorithme du théorème 4. Par ailleurs, le cas 1.1 du Lemme 3 montre que les seuls arbres bien étiquetés (bijectivement associés aux circuits dans I) ayant une contribution non nulle dans $\mathcal{H}(1,r,r)$, sont ceux dont deux fils successifs de la racine sont d'étiquettes différentes. On note F_0 la sous-famille de ces arbres bien étiquetés.

II.3.2. Une relation fonctionnelle liant la série génératrice des cartes planaires pointées et celle des mots de Dyck

F_0 étant la sous-famille des arbres bien étiquetés dont deux fils successifs de la racine (dans l'ordre où on les rencontre de gauche à droite) n'ont pas la même étiquette, on lui associe sa série génératrice $\Theta(\rho, \sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1)$, somme des monômes (en les variables, définies Figure 7 : $\rho, \sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1$) associés aux arbres de F_0 .

EXEMPLE

Monôme dans Θ associé à l'arbre de la Figure 8

$$m = \rho^3 \sigma_0^1 \sigma_1^2 \varphi_0^3 \varphi_1^7 \delta_0^2 \delta_1^4 \omega_0^1 \omega_1^1$$

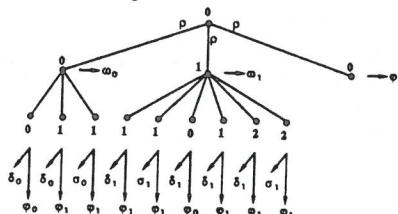


Figure 8 : Etiquettes associées aux sommets.

REMARQUE

Le monôme $m(A)$ associé à un arbre A de F_0 a pour degré total, la somme des degrés des sommets de A .

Ceci est évident si l'on remarque que :

$$\begin{cases} d^\circ\delta_0 + d^\circ\omega_0 + d^\circ\sigma_0 = \text{Somme des degrés des sommets étiquetés } 0 \text{ (non racine et non feuille)} = s_0 \\ d^\circ\delta_1 + d^\circ\omega_1 + d^\circ\sigma_1 = \text{Somme des degrés des sommets étiquetés } \geq 1 \text{ (non feuille)} = s_1 \end{cases}$$

D'où : $d^\circ\rho + d^\circ\sigma_0 + d^\circ\sigma_1 + d^\circ\phi_0 + d^\circ\phi_1 + d^\circ\delta_0 + d^\circ\delta_1 + d^\circ\omega_0 + d^\circ\omega_1 = d^\circ\rho + (d^\circ\phi_0 + d^\circ\phi_1) + (s_0 + s_1)$
 = Degré racine + Somme degrés des feuilles + Somme degrés des sommets (non racine et non feuille)
 = Somme des degrés des sommets de A = Nombre de brins de A .

THEOREME 5 : *Lien entre les séries génératrices des cartes planaires pointées R_0 et de Dyck R_0, Θ et d sont liées par l'équation :*

$$R_0(z) = \frac{1}{1-2zd} \Theta \left(\frac{1-zd^2}{1-2zd}, \frac{zd^2}{1-3zd}, \frac{2zd^2}{1-4zd}, \frac{z^2d^2}{1-3zd}, \frac{2z^2d^2}{1-4zd}, \frac{1-zd^2}{1-3zd}, \frac{1-zd^2}{1-4zd}, \frac{z(1-zd^2)}{1-3zd}, \frac{z(1-zd^2)}{1-4zd} \right)$$

DEMONSTRATION

Par la Proposition 1 : $R_0(z) = \mathfrak{H}(1, r, r)$.

Par ailleurs, par la formule du Théorème 3 : $\mathfrak{H}(t, x, y) = \frac{1}{v(x)} \left[\mathbf{1}_{\{x\}}(y) + \sum_{C \in \mathfrak{C}(x, y)} \delta(C) \cdot \phi(f(C)) \right]$.

On en déduit, en appliquant le Lemme 2 dans la Situation 2 :

$$\mathfrak{H}(1, r, r) = \frac{1}{v(r)} \left[\mathbf{1}_{\{r\}}(r) + \sum_{C \in \mathfrak{C}(r, r)} \delta(C) \cdot \phi(f(C)) \right] = \frac{1}{v_a} \left[1 + \sum_{C \in \mathfrak{C}(r, r)} \delta(C) \cdot \phi(f(C)) \right]$$

On déduit alors directement du Lemme 3 en exprimant $\delta(C) \cdot \phi(f(C))$ en fonction des coefficients de transmission et des paramètres définis Figure 7 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}(1, r, r) &= \frac{1}{1-2zd} \left(1 + \sum_{\substack{\text{Arbres de } F_0 \\ \text{non réduits à la racine}}} \left(\frac{1-zd^2}{1-2zd} \right)^{d^\circ\rho} \left(\frac{zd^2}{1-3zd} \right)^{d^\circ\sigma_0} \left(\frac{2zd^2}{1-4zd} \right)^{d^\circ\sigma_1} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{z^2d^2}{1-3zd} \right)^{d^\circ\phi_0} \left(\frac{2z^2d^2}{1-4zd} \right)^{d^\circ\phi_1} \left(\frac{1-zd^2}{1-3zd} \right)^{d^\circ\delta_0} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1-zd^2}{1-4zd} \right)^{d^\circ\delta_1} \left(\frac{z(1-zd^2)}{1-3zd} \right)^{d^\circ\omega_0} \left(\frac{z(1-zd^2)}{1-4zd} \right)^{d^\circ\omega_1} \right) \\ &= \frac{1}{1-2zd} \Theta \left(\frac{1-zd^2}{1-2zd}, \frac{zd^2}{1-3zd}, \frac{2zd^2}{1-4zd}, \frac{z^2d^2}{1-3zd}, \frac{2z^2d^2}{1-4zd}, \frac{1-zd^2}{1-3zd}, \frac{1-zd^2}{1-4zd}, \frac{z(1-zd^2)}{1-3zd}, \frac{z(1-zd^2)}{1-4zd} \right) \end{aligned}$$

On remarquera que le terme $\left(\frac{1-zd^2}{1-2zd} \right)^{d^\circ\rho}$ est le produit de $\left(\frac{1-zd^2}{1-2zd} \right)^{d^\circ\rho-1}$, terme de $\delta(C)$ issu du cas 1.2 dans le circuit C , par $\frac{1-zd^2}{1-2zd}$, terme égal à $\phi(f(C))$ (évident).

II.3.3. Relations fonctionnelles liant Θ et la série génératrice des arbres bien étiquetés

On note $B_i(\sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1)$ la série génératrice des arbres i -bien étiquetés énumérés en fonction des paramètres définis Figure 7 (avec la différence que σ_0 décompte le nombre de fils d'un sommet étiqueté 0 (*y compris la racine*)) dont le frère à gauche a la même étiquette.

Les Théorèmes 6 et 7 suivants expriment la série génératrice Θ de la famille F_0 en fonction des séries génératrices des arbres i -bien étiquetés. Ainsi le Théorème 7 peut être considéré comme une réciproque du Théorème 5 puisque la famille des arbres bien étiquetés est en bijection avec celle des cartes planaires pointées.

THEOREME 6

$\Theta(\rho, \sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1)$ et $B_i(\sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1)$ (pour $i \in \mathbb{N}$), notés Θ et B_i ci-dessous, satisfont les équations :

$$1. \quad \Theta = \frac{1}{1 - \frac{\rho B_0}{1 + \rho B_0} - \frac{\rho B_1}{1 + \rho B_1}}$$

$$2. \quad B_0 = \varphi_0 - \omega_0 + \frac{\omega_0}{1 - \frac{X_0}{1 + X_0} - \frac{Y_0}{1 + Y_0}}$$

$$3. \quad X_0 = \frac{\delta_0 B_0}{1 - \sigma_0 B_0} \quad Y_0 = \frac{\delta_0 B_1}{1 - \sigma_0 B_1}$$

$$4. \quad B_i = \varphi_1 - \omega_1 + \frac{\omega_1}{1 - \frac{X_i}{1 + X_i} - \frac{Y_i}{1 + Y_i} - \frac{Z_i}{1 + Z_i}} \quad \text{pour } i \geq 1$$

$$5. \quad X_i = \frac{\delta_1 B_{i-1}}{1 - \sigma_1 B_{i-1}} \quad Y_i = \frac{\delta_1 B_i}{1 - \sigma_1 B_i} \quad Z_i = \frac{\delta_1 B_{i+1}}{1 - \sigma_1 B_{i+1}}$$

DEMONSTRATION

i. Equation 1.

Θ est la série génératrice des arbres bien étiquetés de la famille F_0 , c'est-à-dire de racine étiquetée 0 et dont deux fils successifs de la racine n'ont pas la même étiquette.

Donc : $\Theta = 1 + \rho B_0 + \rho B_1 + \rho B_0 \rho B_1 + \rho B_1 \rho B_0 + \rho B_0 \rho B_1 \rho B_0 + \rho B_1 \rho B_0 \rho B_1 + \dots$

où B_i est la série génératrice des arbres i -bien étiquetés énumérés en fonction des variables $\sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1$ et le degré de ρ donne le degré de la racine.

Posons : $x = \rho B_0$ et $y = \rho B_1$

Alors, on a :

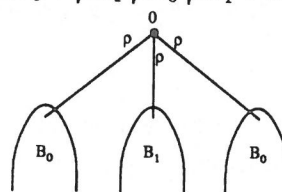


Figure 9

Arbre générique du sixième terme : $\rho B_0 \rho B_1 \rho B_0$ dans l'expansion de Θ .

$$\begin{aligned} \Theta &= 1 + x + y + xy + yx + xyx + yxy + \dots \\ &= 1 + x(1 + yx + (yx)^2 + \dots) + y(1 + xy + (xy)^2 + \dots) + xy(1 + xy + (xy)^2 + \dots) + yx(1 + yx + (yx)^2 + \dots) \\ \Theta &= 1 + \frac{x}{1-yx} + \frac{y}{1-xy} + \frac{xy}{1-xy} + \frac{yx}{1-yx} = \frac{1+x+y+xy}{1-xy} = \frac{1}{1 - \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}} \end{aligned}$$

On obtient donc l'équation 1. recherchée.

ii. *Equations 2. et 3.*

Pour obtenir l'arbre générique de la famille des arbres 0-bien étiquetés, il suffit de remplacer dans l'arbre générique de la famille F_0 , tout sous-arbre fils de la racine dans la famille des arbres 0- (resp. 1-) bien étiquetés par une suite finie de sous-arbres fils de la famille des arbres 0- (resp. 1-) bien étiquetés, la première arête fille étant étiquetée δ_0 (resp. δ_1) et les suivantes étiquetées σ_0 (resp. σ_1).

Cette opération se traduit au niveau série génératrice par le remplacement, dans le calcul de l'équation 1. de :

$$x = \rho B_0 \quad \text{par} \quad X_0 = \frac{\delta_0 B_0}{1 - \sigma_0 B_0}$$

$$\text{et} \quad y = \rho B_1 \quad \text{par} \quad Y_0 = \frac{\delta_0 B_1}{1 - \sigma_0 B_1}$$

La série génératrice de ces arbres 0-bien étiquetés est donc :

$$\frac{1}{1 - \frac{X_0}{1+X_0} - \frac{Y_0}{1+Y_0}}$$

avec X_0 et Y_0 définies par les équations 3.

Si l'on étiquette la racine des arbres 0-bien étiquetés par ω_0 , leur série génératrice devient :

$$\frac{\omega_0}{1 - \frac{X_0}{1+X_0} - \frac{Y_0}{1+Y_0}}$$

On obtient alors l'équation 2. recherchée en tenant compte du fait que lorsque l'arbre 0-bien étiqueté considéré est celui réduit à un sommet (c'est alors une feuille), son étiquette n'est pas ω_0 mais φ_0 . Ainsi on obtient finalement :

$$B_0(\sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1) = \frac{\omega_0}{1 - \frac{X_0}{1+X_0} - \frac{Y_0}{1+Y_0}} - \omega_0 + \varphi_0$$

iii. *Equations 4. et 5.*

Même raisonnement.

CQFD.

Les équations récurrentes du Théorème 6 peuvent être remplacées par une équation unique, donnée par le Théorème 7 et exprimant Θ en fonction de B_0 .

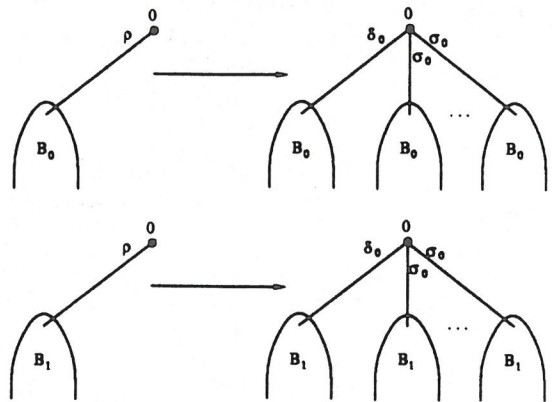


Figure 10

Remplacement d'un sous-arbre de la famille des arbres 0-bien étiquetés (resp. 1-bien étiquetés) par une suite de tels sous-arbres.

NOTATIONS

* On note : Θ pour $\Theta(\rho, \sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1)$
 B_i pour $B_i(\sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1)$ (pour $i \in \mathbb{N}$)

* On pose : a. $\Delta_0 = \delta_1 X_1 + \delta_1$ avec : $X_1 = \frac{\delta_1 B_0}{1 - \sigma_1 B_0}$
b. $\Sigma_0 = \delta_1 X_1 + \sigma_1$
c. $\Omega_0 = \omega_1 X_1 + \omega_1$
d. $\phi_0 = \omega_1 X_1 + \varphi_1$

* On note : \tilde{B}_i pour $B_i(\Sigma_0, \sigma_1, \phi_0, \varphi_1, \Delta_0, \delta_1, \Omega_0, \omega_1)$ (pour $i \in \mathbb{N}$)

Alors le système d'équations du Théorème 6 donné précédemment est équivalent aux équations du Théorème 7 suivant :

THEOREME 7

$\Theta(\rho, \sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1)$ et $B_i(\sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1)$ (pour $i \in \mathbb{N}$) satisfont les équations :

1.
$$\Theta = \frac{1}{1 - \frac{\rho B_0}{1 + \rho B_0} - \frac{\rho \tilde{B}_0}{1 + \rho \tilde{B}_0}}$$
2.
$$B_0 = \varphi_0 - \omega_0 + \frac{\omega_0}{1 - \frac{\frac{\delta_0 B_0}{1 - \sigma_0 B_0}}{1 + \frac{\delta_0 B_0}{1 - \sigma_0 B_0}} - \frac{\frac{\delta_0 \tilde{B}_0}{1 - \sigma_0 \tilde{B}_0}}{1 + \frac{\delta_0 \tilde{B}_0}{1 - \sigma_0 \tilde{B}_0}}}$$
3. $B_i = \tilde{B}_{i-1}$ pour $i \geq 1$
4.
$$B_0 = \varphi_0 + \sigma_0 B_0^2 + (B_0 + \tilde{B}_0)(\omega_0 \delta_0 - \varphi_0 \sigma_0) + B_0^2 \tilde{B}_0 (\delta_0^2 - \sigma_0^2) + B_0 \tilde{B}_0 [\sigma_0 + (\delta_0 - \sigma_0)(2 \omega_0 \delta_0 - \varphi_0 \sigma_0 - \delta_0 \varphi_0)]$$

REMARQUES

* L'équation 2. (et sa réécriture 4.) du Théorème 7 est une équation récursive sur B_0 , admettant B_0 comme unique solution et n'invoquant que B_0 et les variables $\sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1$.

* Les équations 1. et 2. du Théorème 7 suffisent à déterminer totalement Θ et B_0 .

* On peut remarquer que les paramètres $\rho, \sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1$ introduits pour l'adaptation à l'arbre infini I de la Situation 2, passent au niveau relation fonctionnelle, permettant d'obtenir des relations closes. Cela prouve que ces paramètres ne sont pas factices mais ont probablement des liens (et des interprétations) importants (qui restent à déterminer) dans le cadre des cartes planaires pointées.

DEMONSTRATION

i. *Formule préliminaire à $B_1 = \tilde{B}_0$*

D'après l'équation 4. du Théorème 6, on a :

$$(*) \quad B_1 = \varphi_1 - \omega_1 + \frac{\omega_1}{\frac{1}{1+X_1} - \frac{\delta_1 B_1}{1 - \sigma_1 B_1 + \delta_1 B_1} - \frac{\delta_1 B_2}{1 - \sigma_1 B_2 + \delta_1 B_2}} \quad \text{avec : } X_1 = \frac{\delta_1 B_0}{1 - \sigma_1 B_0}$$

Posons : a. $\Delta_0 = \delta_1 X_1 + \delta_1 = \delta_1 (1 + X_1)$

alors, en réduisant au même dénominateur :

$$(*) \quad B_1 = \varphi_1 - \omega_1 + \omega_1 (1 + X_1) \frac{(1 - \sigma_1 B_1 + \delta_1 B_1)(1 - \sigma_1 B_2 + \delta_1 B_2)}{(1 - \sigma_1 B_1 + \delta_1 B_1 - \Delta_0 B_1)(1 - \sigma_1 B_2 + \delta_1 B_2 - \Delta_0 B_2) - \Delta_0 B_1 \Delta_0 B_2}$$

Posons : b. $\Sigma_0 = \delta_1 X_1 + \sigma_1 (= \Delta_0 - \delta_1 + \sigma_1)$

(*) se réécrit alors sous la forme :

$$(*) \quad B_1 = \varphi_1 - \omega_1 + \omega_1 (1 + X_1) \frac{(1 - \Sigma_0 B_1 + \Delta_0 B_1)(1 - \Sigma_0 B_2 + \Delta_0 B_2)}{(1 - \Sigma_0 B_1)(1 - \Sigma_0 B_2) - \Delta_0 B_1 \Delta_0 B_2}$$

Posons : c. $\Omega_0 = \omega_1 X_1 + \omega_1$ et d. $\phi_0 = \omega_1 X_1 + \varphi_1 (\Rightarrow \phi_0 - \Omega_0 = \varphi_1 - \omega_1)$

alors, (*) se réécrit :

$$(*) \quad B_1 = \phi_0 - \Omega_0 + \Omega_0 \frac{(1 - \Sigma_0 B_1 + \Delta_0 B_1)(1 - \Sigma_0 B_2 + \Delta_0 B_2)}{(1 - \Sigma_0 B_1)(1 - \Sigma_0 B_2) - \Delta_0 B_1 \Delta_0 B_2}$$

Cette formule est à rapprocher de l'équation 2. du Théorème 6 donnant B_0 , et que l'on peut réécrire :

$$(**) \quad B_0 = \varphi_0 - \omega_0 + \omega_0 \frac{(1 + X_0)(1 + Y_0)}{1 - X_0 Y_0}$$

Soit :

$$(**) \quad B_0 = \varphi_0 - \omega_0 + \omega_0 \frac{(1 - \sigma_0 B_0 + \delta_0 B_0)(1 - \sigma_0 B_1 + \delta_0 B_1)}{(1 - \sigma_0 B_0)(1 - \sigma_0 B_1) - \delta_0 B_0 \delta_0 B_1}$$

On constate que l'on aura : $B_1 = \tilde{B}_0$, si l'on a : $B_2 = \tilde{B}_1$.

En fait, toutes les équations $B_i = \tilde{B}_{i-1}$ sont liées (pour $i \geq 1$), et sont prouvées par récurrence :

ii. *Preuve des équations 3. au Théorème 7 : $B_i = \tilde{B}_{i-1}$ pour $i \geq 1$*

DEFINITIONS ET NOTATIONS

* On appelle *degré d'un monôme de B_i* , le degré cumulé par rapport à toutes les variables $\sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1$ du monôme considéré.

(*Exemple* : Le monôme $\sigma_0^4 \varphi_1^2 \omega_0$ a pour degré 7.)

* Deux séries formelles S et T en les variables $\sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1$ sont égales à

(k) l'ordre k : $S = T$, si les restrictions de S et T aux monômes de degré $\leq k$ sont identiques.

k est appelé *ordre de l'égalité* $S = T$.

On va prouver par récurrence que :

$$\forall k \geq 0, \text{ on a : } (H_k) \quad \forall i \geq 1 \quad B_i = \tilde{B}_{i-1} \quad (k)$$

$$* k = 0 : \quad \forall i \geq 1 \quad B_i^{(0)} = \tilde{B}_{i-1}^{(0)} = 0$$

Evident par les équations du Théorème 6.

$$* \text{ On suppose que pour } k \text{ donné : } \forall i \geq 1 \quad B_i^{(k)} = \tilde{B}_{i-1}^{(k)} \quad (H_k)$$

* On prouve que (H_{k+1}) est vraie.

a. Soit $i \geq 2$:

$$B_i = \varphi_1 - \omega_1 + \frac{\omega_1}{1 - \frac{X_i}{1+X_i} - \frac{Y_i}{1+Y_i} - \frac{Z_i}{1+Z_i}} \quad \text{et} \quad \tilde{B}_{i-1} = \varphi_1 - \omega_1 + \frac{\omega_1}{1 - \frac{\tilde{X}_{i-1}}{1+\tilde{X}_{i-1}} - \frac{\tilde{Y}_{i-1}}{1+\tilde{Y}_{i-1}} - \frac{\tilde{Z}_{i-1}}{1+\tilde{Z}_{i-1}}}$$

$$i \geq 2 \text{ donc } i-1 \geq 1, \text{ donc, par } (H_k) : B_{i-1}^{(k)} = \tilde{B}_{i-2}^{(k)}$$

$$\text{Donc : } X_i = \frac{\delta_1 B_{i-1}^{(k+1)}}{1 - \sigma_1 B_{i-1}^{(k+1)}} = \frac{\delta_1 \tilde{B}_{i-2}^{(k+1)}}{1 - \sigma_1 \tilde{B}_{i-2}^{(k+1)}} = \tilde{X}_{i-1}$$

$$\text{De même : } Y_i = \frac{\delta_1 \tilde{B}_{i-2}^{(k+1)}}{1 - \sigma_1 \tilde{B}_{i-2}^{(k+1)}} = \tilde{Y}_{i-1} \quad \text{et} \quad Z_i = \frac{\delta_1 \tilde{B}_{i-2}^{(k+1)}}{1 - \sigma_1 \tilde{B}_{i-2}^{(k+1)}} = \tilde{Z}_{i-1}$$

Donc : $B_i^{(k+2)} = \tilde{B}_{i-1}^{(k+2)}$, l'ordre de l'égalité étant augmentée d'une unité par rapport à $(k+1)$ à cause de la présence de ω_1 dans les formules donnant B_i et \tilde{B}_{i-1} .

$$\text{On a donc prouvé que : } \forall i \geq 2 \quad B_i^{(k+2)} = \tilde{B}_{i-1}^{(k+2)}$$

b. Soit $i = 1$:

$$(H_k) \Rightarrow B_1^{(k)} = \tilde{B}_0^{(k)} \quad \text{et} \quad B_2^{(k)} = \tilde{B}_1^{(k)}$$

Or Ω_0, Σ_0 et Δ_0 sont de valuation (degré minimum d'un monôme) supérieure ou égale à 1.

On déduit donc des expressions de B_0 et B_1 données dans les équations (*) et (**) que :

$$B_1^{(k+2)} = \tilde{B}_0^{(k+2)}$$

$$\text{On a donc prouvé : } \forall i \geq 1 \quad B_i^{(k+2)} = \tilde{B}_{i-1}^{(k+2)} \quad (H_{k+2})$$

Ceci conclut la preuve des équations 3. du Théorème 7 : $\forall i \geq 1 \quad B_i = \tilde{B}_{i-1}$

iii. *Preuve de l'équation 2. du Théorème 7 :*

$$B_0 = \varphi_0 - \omega_0 + \frac{\omega_0}{1 - \frac{\delta_0 B_0}{1 - \sigma_0 B_0} - \frac{\delta_0 \tilde{B}_0}{1 - \sigma_0 \tilde{B}_0}} \quad \text{Ceci est évident à partir des équations 2. et 3. du Théorème 6 et de l'équation 3. du Théorème 7 : } B_1 = \tilde{B}_0 \text{ prouvée au point ii ci-dessus.}$$

iv. *Preuve de l'équation 1. du Théorème 7 :*

$$\Theta = \frac{1}{1 - \frac{\rho B_0}{1 + \rho B_0} - \frac{\rho \tilde{B}_0}{1 + \rho \tilde{B}_0}} \quad \text{Ceci est évident à partir de l'équation 1. du Théorème 6 et de l'équation 3. du Théorème 7 : } B_1 = \tilde{B}_0 \text{ prouvée au point ii ci-dessus.}$$

v. *Preuve de l'équation 4. du Théorème 7 :*

$$B_0 = \varphi_0 + \sigma_0 B_0^2 + (B_0 + \tilde{B}_0)(\omega_0 \delta_0 - \varphi_0 \sigma_0) \\ + B_0^2 \tilde{B}_0 (\delta_0^2 - \sigma_0^2) + B_0 \tilde{B}_0 [\sigma_0 + (\delta_0 - \sigma_0)(2 \omega_0 \delta_0 - \varphi_0 \sigma_0 - \delta_0 \varphi_0)]$$

Ceci se déduit de l'équation 2. du Théorème 7, par simplification immédiate.

CONCLUSION

L'équation du Théorème 5 est la première du genre faisant apparaître la série génératrice R_0 des cartes planaires pointées comme composée de la série génératrice Θ d'une sous-famille de la famille des arbres bien étiquetés (elle-même exprimable en fonction de R_0 par l'équation 1. du Théorème 7) et de fonctions rationnelles de la série génératrice des mots de Dyck.

A cette occasion, sont apparus de nouveaux paramètres sur les arbres bien étiquetés. Il serait intéressant de voir leur interprétation sur les cartes planaires pointées.

Inversement, cette série génératrice $\Theta(\rho, \sigma_0, \sigma_1, \varphi_0, \varphi_1, \delta_0, \delta_1, \omega_0, \omega_1)$ de la famille F_0 a pu être exprimée en fonction de B_0 .

Ces résultats, relativement techniques, montrent que tout n'est pas encore totalement compris dans le domaine pourtant bien étudié des cartes planaires pointées.

REFERENCES

- [AJ91] ARQUES D. & JACQUES I., 1991.
Une équation de convolution associée aux noeuds d'un graphe pour la résolution de problèmes d'évolution.
Article en préparation.
- [Ar85] ARQUES D., 1985.
Énumération et codage des cartes et hypercartes planaires pointées.
Calcul formel sur les fractions multicontinues.
Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Haute Alsace.
- [Ar86] ARQUES D., 1986.
Les hypercartes planaires sont des arbres très bien étiquetés.
Discrete Mathematics, N° 58, North-Holland, 11-24.
- [CF69] CARTIER P. & FOATA D., 1969.
Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements.
Lecture Notes in Mathematics, N° 85, Springer-Verlag, Berlin, 1-88.
- [CV81] CORI R. & VAUQUELIN B., 1981.
Planar maps are well labeled trees.
Canadian Journal of Mathematical, Volume 33, N° 5, 1023-1042.
- [Tu68] TUTTE W. T., 1968.
On the enumeration of planar maps.
Bull. Amer. Math. Soc., Volume 74, 64-74.
- [Vi85] VIENNOT G. X., 1985.
Heaps of pieces. I : Basic definitions and combinatorial lemmas.
Lecture Notes in Mathematics, N° 1234, Combinatoire énumérative, Springer-Verlag, Berlin, 321-350.