SU ALCUNE RECENTI GENERALIZZAZIONI DEL TEOREMA DI SHIRSHOV

Giuseppe Pirillo

Un ben noto teorema di Shirshov dice che ogni parola sufficientemente lunga su un alfabeto finito contiene o un fattore che é "n-diviso" o un fattore che é una p-esima potenza.

Usando le proprietá delle parole di Lyndon, in [5] é presentata una dimostrazione molto elegante di questo teorema che, con tecniche analoghe, é esteso in [6] alle parole infinite a destra.

Lo scopo di questo lavoro é di dare un breve cenno su un'estensione del teorema di Shirshov alle parole bi-infinite, presentata in [2] e [3].

Ci riferiamo a [1] per la terminologia riguardante il monoide libero (lettera, parola, fattore, ordine lessicografico (indicato con $<$), parola n-divisa,...); ci riferiamo a [2] e [3] per le definizioni di parola infinita a destra, parola infinita a sinistra, parola bi-infinita, relazione lessicografica forte (indicata con $<<$), parola ω-divisa, parola uniformemente ricorrente. Infine se E é un insieme di parole (finite o infinite) allora indichiamo con F(E) l'insieme dei fattori degli elementi di E. Se E={m}, dove m é una parola (finita o infinita), scriviamo semplicemente F(m).

I lemmi seguenti sono tutti dimostrati in [2] e [3].

Lemma 1. *Sia A un alfabeto finito. Se $E \subset A^+$ é infinito, allora esiste una parola bi-infinita b tale che ogni fattore di b é fattore di un'infinitá di elementi di E. In particolare, se s é una parola infinita su A allora esiste una parola bi-infinita (ed, a fortiori, infinita a destra o a sinistra) b tale che $F(b) \subset F(s)$.*

Lemma 2. *Se s é una parola infinita su un alfabeto finito allora esiste una parola bi-infinita ed uniformemente ricorrente b tale che $F(b) \subset F(s)$.*

Lemma 3. *Sia t una parola bi-infinita ed uniformemente ricorrente e sia* $w \in F(t)$. *Se t non é periodica allora esistono due parole, diciamo u e v, diverse fra loro ma con la stessa lunghezza, tali che wu e wv* $\in F(t)$.

Lemma 4. *Sia t una parola bi-infinita, uniformemente ricorrente e non periodica. Allora esistono infiniti fattori di t, diciamo* w_i, $(i \in Z)$, *tali che*

$$w_i >> w_j$$

se $i < j$.

Lemma 5. *Sia t una parola bi-infinita, uniformemente ricorrente e non periodica. Allora esiste una fattorizzazione*

$$t = \ldots u_{-n} \ldots u_0 \ldots u_n \ldots$$

tale che

$$u_i >> u_j$$

se $i < j$.

Lemma 6. *Se* $x_1 >> x_2 >> \ldots >> x_n$ *allora* $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ *é una fattorizzazione n-divisa.*

Dai lemmi precedenti segue immediatamente il seguente teorema.

Teorema 1. *Se s é una parola infinita su un alfabeto finito A e se* A^+ *é ordinato lessicograficamente allora esiste una parola bi-infinita t tale che* $F(t) \subset F(s)$ *e t é periodica o* ω*-divisa.*

Il Teorema 1 contiene come casi particolari il teorema di Shirshov ed il risultato di [6].

Poiché la dimostrazione del Teorema 1 é elementare, c'é ora una dimostrazione di questo tipo anche per il teorema di Restivo e Reutenauer [4].

BIBLIOGRAFIA

1. M. Lothaire, Combinatorics on words, Addison-Wesley, 1983.

2. J. Justin e G.Pirillo, Théorème de Shirshov et ω-permutabilité des semi-groupes, LITP-Univ. Paris VII, 89-22.

3. J. Justin e G. Pirillo, Shirshov's Theorem and ω-Permutability of Semigroups, in corso di stampa su Advances in Mathematics.

4. A. Restivo e C. Reutenauer, On the Burnside Problem for Semigroups, J. of Algebra, 89(1984) 102-104.

5. C. Reutenauer, Mots de Lyndon et Théorème de Shirshov, Ann. Sc. Math. 10, 2(1986) 237-245:

6. S. Varricchio, Factorizations of Free Monoids and Unavoidable Regularities, Dipartimento di Matematica, Universitá di Roma "La Sapienza",Novembre 1988, in corso di stampa su Theoretical Computer Science.

GIUSEPPE PIRILLO
IAGA-IAMI C.N.R.
viale Morgagni, 67/A
50134 - FIRENZE (Italia)