Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1990, 413/S–21
Actes 21^e Séminaire Lotharingien, p. 141–146

Über die Möbiuszahl des Verbands der Untergruppe einer endlichen auflösbaren Gruppe

Volkmar Welker
Universität Erlangen
Mathematisches Institut
Bismarckstr. 1 1/2
D-8520 Erlangen
West-Germany

12. Juni 1989

Die Menge der Untergruppen einer Gruppe G bilden bekanntlich einen Verband, den wir im folgenden mit $\Lambda(G)$ bezeichnen wollen. Für eine endliche auflösbare Gruppe G wird in dieser Note ein Weg aufgezeigt, um die Möbiuszahl $\mu(\Lambda(G))$ aus der genauen Kenntnis der Hauptfaktoren von G zu bestimmen. Beweise sollen hier nicht gegeben werden. Die von uns bestimmte Formel für $\mu(\Lambda(G))$ stellt eine gewisse Präzisierung der Formel von Kratzer und Thévenaz [4] dar, die ein einfaches Korollar unserer Formel ist.

1 Das Poset der Konjugationsklassen

Im ersten Schritt werden wir zeigen, daß es genügt statt der Untergruppen $H \leq G$ die Konjugationsklassen der Untergruppen zu betrachten.

Definition 1.1 *Sei G eine Gruppe.*

- $[H] := \{ H^g \mid g \in G \}$ *bezeichnet die Konjugationsklasse der Untergruppe* H.

- $\Gamma(G)$ *bezeichnet das Poset der Konjugationsklassen* $[H]$ *von Untergruppen* $H \leq G$. *Die partielle Ordnung ist definiert durch*

$$[H] \leq [H'] :\Leftrightarrow \ \exists\, g \in G \ : \ H^g \leq H'.$$

Für eine beliebige Gruppe G ist $\Gamma(G)$ im allgemeinen kein Verband. Sei zum Beispiel $G = A_5$, dann existiert der Schnitt von $[A_4]$ und $[S_3]$ in $\Gamma(G)$ nicht. Ist G jedoch endlich auflösbar, so ist uns kein Gegenbeispiel bekannt. Sei im folgenden G immer eine endliche und auflösbare Gruppe. Mit $\mu(\Gamma(G))$ bezeichnen wir im folgenden die Möbiuszahl des Posets $\Gamma(G)$. Überraschend ist nun folgende Beziehung zwischen $\mu(\Lambda(G))$ und $\mu(\Gamma(G))$.

Formel 1.2 *(Hawkes,T., et al., [3])*

$$\mu(\Lambda(G)) = |G'| \cdot \mu(\Gamma(G))$$

2 C-Gruppen im Verband der Untergruppen

In diesem Schritt soll nun gezeigt werden, daß es genügt, sich bei der Bestimmung von $\mu(\Gamma(G))$ auf Konjugationsklassen von Untergruppen zu beschränken, für die das Intervall $[H,G] := \{\ H \mid H \leq U \leq G\ \}$ komplementär ist, das heißt $\forall\, U \in [H,G]\ \exists\, U' \in [H,G]$ mit $U \cap U' = H$ und $< U, U' >= G$.

Definition 2.1 *Eine Untergruppe* $H \leq G$ *heißt C-Gruppe, falls das Intervall* $[H,G]$ *komplementär ist.*

Eine andere mehr gruppentheoretische Definition von C-Gruppen gibt der folgende Satz. Dazu sei ab jetzt $\mathcal{R} : 1 = N_0 < \cdots < N_k = G$ eine feste Hauptreihe und $I = \{1, \ldots, k\}$ die Indexmenge der Hauptfaktoren N_i/N_{i-1} von G.

Satz 2.2 *(Hauck,P.,Kurzweil,H., [5])*

1. *Eine Untergruppe* $H \neq G$ *von* G *ist genau dann eine C-Gruppe, wenn es eine Indexmenge* $J \subseteq I$ *und Komplemente* M_i *der Hauptfaktoren* N_i/N_{i-1} *gibt, so daß* $H = \bigcap_{j \in J} M_j$.

2. *Ist* $H = \bigcap_{j \in J} M_j$ *wie unter 1., so deckt* H *jeden Hauptfaktor mit* $j \neq J$ *und meidet jeden anderen. Insbesondere ist* J *durch* H *bestimmt.*

Mit $\Delta(G) := \{ [H] \mid H$ C-Gruppe oder $H = 1 \}$ bezeichnen wir das Poset der Konjugationsklassen der C-Gruppen in G. Unser Ziel ist es nun die Möbiuszahl von $\Delta(G)$ mit der von $\Gamma(G)$ in Beziehung zu setzen und $\Delta(G)$ als Poset direkt zu zerlegen.

3 Die ω-Krone in G

Für die Untersuchung von $\Delta(G)$ müssen wir die Hauptfaktoren von G nach ihren G-Modultypen trennen.

Definition 3.1

- $\Omega(G)$ *bezeichnet die Menge der* G*-Modultypen von Hauptfaktoren von* G.
- $I_\omega \subseteq I$ *bezeichnet die Menge der Indizes* i *der Hauptfaktoren* N_i/N_{i-1} *von Typ* $\omega \in \Omega(G)$.
- *Für eine C-Gruppe* $H = \bigcap_{j \in J} M_j$ *in der Darstellung von Satz 2.2 bezeichnet* $\omega(H) := \bigcap_{j \in J \cap I_\omega} M_i$ *einen* ω*-Anteil von* G, *für* $\omega \in \Omega(G)$.
- *Sei* $C_\omega = C_G(\omega)$ *der Zentralisator von* ω *in* G. *Sei* $I_\omega^C \subseteq I_\omega$ *die Menge der Indizes von Hauptfaktoren* N_i/N_{i-1} *vom Typ* ω *die komplementiert sind und ist* M_i *ein Komplement. Wenn wir* $R_\omega := C_\omega \cap \bigcap_{i \in I_\omega^C} M_i$ *setzen, dann heißt* C_ω/R_ω *die* ω*-Krone von* G *und* $\Sigma_\omega(G)$ *bezeichnet den Verband der* G*-Untermoduln von* C_ω/R_ω.

Die folgenden Aussagen zeigen nun, wie $\Delta(G)$ in Teilverbände zerlegt werden kann, die den Hauptfaktortypen $\omega \in \Omega(G)$ entsprechen.

Lemma 3.2 *(Gaschütz, W., Satz 3.2,3.3 [2]) Sei* N *ein Normalteiler von* G *mit* $C_\omega \geq N \geq R_\omega$, *so ist* C_ω/R_ω *ein direktes Produkt von* G*-Moduln vom Type* ω, *und alle Komplemente von* C_ω/N *in* G *sind konjugiert.*

Korollar 3.3 *Ist* $H \neq G$ *eine C-Gruppe, so ist der* ω*-Anteil von* H *bis auf Konjugation bestimmt.*

Lemma 3.4 *Zwei C-Gruppen* H *und* H' *sind genau dann konjugiert, wenn ihre* ω*-Anteile konjugiert sind.*

4 Die Zerlegung von $\Delta(G)$

Mit den im vorigen Abschnitt vorgestellten Hilfsmitteln ist es nun möglich die gewünschte Formel herzuleiten. Maßgebendes Hilfsmittel stellt dabei der folgende Satz dar.

Satz 4.1 *Ist $\mathcal{E}= \{[M_1], \ldots ,[M_k]\}$ eine Menge von Konjugationsklassen von maximalen Untergruppen, so sind die maximalen Elemente von $\{ \bigcap_{i=1}^k M_i' \mid M_i' \in [M_i] \}$ konjugierte C-Gruppen.*

Dies zeigt die Wohldefiniertheit der folgenden Abbildung.

Korollar 4.2 *Ist für eine Untergruppe H von G, $C(H)$ die Menge der minimalen C-Gruppen $U \geq H$, dann ist die Abbildung*

$$- : \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma(G) & \to & \Gamma(G) \\ [H] & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} [U] & \text{für } U \in C(H) & H \neq 1 \\ [1] & & H = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ein Abschlußoperator und $\overline{\Gamma(G)} 0 \Delta(G)$. Insbesondere gilt $\mu(\Gamma(G)) = \mu(\Delta(G))$.

Ist 1 keine C-Gruppe, so hat $\Delta(G) - \{[1]\}$ ein kleinstes Element. Eg gilt also folgendes Korollar.

Korollar 4.3 *Ist ein Hauptfaktor von G nicht komplementiert, so gilt*

$$\mu(\Lambda(G)) = \mu(\Gamma(G)) = \mu(\Delta(G)) = 0.$$

Sei daher G im folgenden eine endliche auflösbare Gruppe, in der alle Hauptfaktoren komplementiert sind.

Definition 4.4

$$\Delta_\omega(G) := \{ \bigcap_{j \in J} M_j \mid J \subseteq I_\omega \text{ und } M_i \text{ komplementiert } N_i/N_{i-1} \}$$

Aus Satz 4.1 folgt nun die Surjektivität der Abbildung im folgenden Lemma.

Lemma 4.5 *Die Abbildung*

$$\phi : \begin{cases} \Delta_\omega(G) & \rightarrow & \Sigma_\omega(G) \\ [H] & \mapsto & C_\omega \cap H/R_\omega \end{cases}$$

ist ein Verbandsisomorphismus. Insbesondere $\mu(\Delta_\omega(G)) = \mu(\Sigma_\omega(G))$.

Lemma 3.5 und Satz 4.1 geben nun die gewünschte Zerlegung von $\Delta(G)$.

Lemma 4.6

$$\Delta(G) = \times_{\omega \in \Omega(G)} \Delta_\omega(G)$$

Insbesondere gilt $\mu(\Delta(G)) = \prod_{\omega \in \Omega(G)} \Delta_\omega(G)$.

Die beiden vorhergehenden Lemmata haben unser Problem nun auf die Bestimmung von $\mu(\Sigma_\omega(G))$ reduziert. Ein allgemeiner Satz von K. Morita [1] liefert nun folgendes Korollar.

Korollar 4.7 *Sei* $\omega \in \Omega(G)$ *ein* $\mathbb{F}_{p_\omega}$ *Vektorraum, und sei die* ω*-Krone* C_ω/R_ω *ein direktes Produkt von* k_ω *Moduln vom Typ* ω. *In diesem Fall ist* $\Sigma_\omega(G)$ *isomorph zum Verband der Untervektorräume eines* k_ω *dimensionalen Vektorraums über* $\mathbb{F}_{p_\omega^{n_\omega}}$. *Insbesondere*

$$\mu(\Sigma_\omega(G)) = (-1)^{k_\omega} \cdot p_\omega^{\,n_\omega \cdot \binom{k_\omega}{2}}.$$

Nun sind wir in der Lage die Formel für $\mu(\Lambda(G))$ anzugeben.

Formel 4.8 *Sei* $k = \sum_{\omega \in \Omega(G)} k_\omega$ *die Länge einer Hauptreihe von* G, *dann gilt*

$$\mu(\Lambda(G)) = (-1)^k \cdot |G'| \cdot \prod_{\omega \in \Omega(G)} p_\omega^{\,n_\omega \cdot \binom{k_\omega}{2}}.$$

Beachtet man nun, daß für exzentrische Hauptfaktoren N_i/N_{i-1} die Länge der Konjugationsklassen von Komplementen gleich der Ordnung des Hauptfaktors ist, so erhält man das Ergebnis von Kratzer und Thévenaz [4].

Korollar 4.9 *(Kratzer, C.,Thévenaz, J., Theorem 2.6, [4]) Sei m_i die Anzahl der Komplemente des Hauptfaktors N_i/N_{i-1} in G, dann gilt*

$$\mu(\Lambda(G)) = (-1)^k \cdot \prod_{i=1}^{k} m_i$$

Literatur

[1] Curtis,C.W.,Reiner,I.,Methods of Representation Theory I, New York, 1987

[2] Gaschütz, W., Präfrattinigruppen, Archiv Math. 13, 1962, S. 418-426

[3] Hawkes, T., Isaacs,I.M., Özaydin,M., On the Möbius Function of a finite Group, preprint, 1986

[4] Kratzer, C.; Thévenaz, J., Function de Möbius d'un groupe fini et anneau de Burnside, Comment. Math. Helv. 59, 1984, S. 425-438

[5] Hauck,P.,Kurzweil, H., Präfrattinigruppen im Verband der Untergruppen, preprint, 1989