

KONSTRUKTION AUFLÖSBARER FAST-BLOCKPLÄNE MIT HILFE EINES COMPUTERS

UTE VOGEL

Im Jahre 1968 wurde im Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques Nr. 260, 1968, S. 32 das folgende Problem gestellt :

24 Teilnehmer einer Tagung möchten 8 Tage lang zusammen an Tischen für je 4 Personen zu Mittag essen.

Kann man einen Sitzplan so aufstellen, daß jede Person mit jeder anderen wenigstens einmal zusammen am Mittagstisch sitzt ?

Dieses Sitzplan-Problem führt auf den Begriff des Fast-Blockplanes, einer Inzidenzstruktur, die von G. Pickert und K. E. Wolff in den Arbeiten [Pic, 70] bzw. [Wol, 73] definiert und untersucht worden ist.

Im folgenden wird eine Eigenschaft der Parallelismen von Fast-Blockplänen hergeleitet, die bei der Konstruktion auflösbarer Fast-Blockpläne mit Hilfe eines Backtracking-Algorithmus die Laufzeit erheblich herabsenkt .

Sei $\mathcal{J} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ein Inzidenzstruktur ($\mathcal{P} \cap \mathcal{B} = \emptyset$). Die betrachteten Inzidenzstrukturen \mathcal{J} seien stets endlich, d.h. es gelte $v = |\mathcal{P}| \in \mathbb{N}$ und $b = |\mathcal{B}| \in \mathbb{N}$, wobei \mathbb{N} die Menge der positiven ganzen Zahlen bezeichnet.

Für $P \in \mathcal{P}$ sei

$$(P) = \{ C \in \mathcal{B} \mid \forall p \in P : p \perp C \}$$

und $[P] = |(P)|$ die *Verbindungszahl* von P . Analog sei für $B \in \mathcal{B}$

$$(B) = \{ p \in \mathcal{P} \mid \forall C \in \mathcal{B} : p \perp C \}$$

und $[B] = |(B)|$ die *Schnittzahl* von B .

Für die Menge $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathcal{P}$ schreibt man statt $(\{p_1, \dots, p_n\})$ auch einfach (p_1, \dots, p_n) und entsprechend für die Verbindungszahl $[p_1, \dots, p_n]$, analog für $\{C_1, \dots, C_m\} \subset \mathcal{B}$.

Sei $\mathcal{J} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ eine Inzidenzstruktur. Ein *Parallelismus* von $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ist eine Äquivalenzrelation \parallel auf $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$, die dem "Parallelenaxiom"

$$\forall p \in \mathcal{P} \quad \forall B \in \mathcal{B} \quad \exists_1 C \in \mathcal{B} : p \perp C \wedge C \parallel B$$

genügt. Die Äquivalenzklassen heißen *Parallelen*scharen. Inzidenzstrukturen, die einen Parallelismus besitzen, werden *auflösbar* genannt.

FAST-BLOCKPLÄNE

Eine *taktische Konfiguration* ist eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, für die gilt:

$$\exists k, r \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathcal{P} : [p] = r \quad \wedge \quad \forall B \in \mathcal{B} : [B] = k .$$

Im Falle $r = k$ nennt man die taktische Konfiguration *symmetrisch* (STK).

Eine taktische Konfiguration $\mathfrak{J} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ heißt *zerlegbar*, wenn eine Äquivalenzrelation $\sim \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ existiert, die eine Zerlegung der Punktmenge in $m > 1$ Klassen von je $n > 1$ Elementen derart induziert, daß

$$\begin{aligned} \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}_0 \quad \forall p, q \in \mathcal{P} : & (p \sim q \wedge p \neq q \Rightarrow [p, q] = \lambda_1) \\ & \wedge (p \not\sim q \Rightarrow [p, q] = \lambda_2) \end{aligned}$$

gilt.

Nach [Pic, 70] und [Wol, 73] wird eine taktische Konfiguration, die den Bedingungen

$$(FB1) \quad \forall p, q \in \mathcal{P} : [p, q] \geq 1$$

$$\text{und} \quad (FB2) \quad r \cdot (k - 1) = v$$

genügt, als *Fast-Blockplan* bezeichnet. Für Fast-Blockpläne gelten die folgenden Parameterbedingungen (vgl. [Wol, 73] 1.3) :

$$(1) \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad \exists_1 \tilde{p} \in \mathcal{P} \setminus \{p\} : [p, \tilde{p}] = 2 ,$$

$$(2) \quad \forall p, \tilde{p}, q \in \mathcal{P} : p \neq q \neq \tilde{p} \wedge [p, \tilde{p}] = 2 \Rightarrow [p, q] = 1 ,$$

$$(3) \quad \forall B, C \in \mathcal{B} : B \neq C \Rightarrow [B, C] \leq 2 .$$

(1) und (2) zufolge sind Fast-Blockpläne mit $v > 2$ zerlegbare taktische Konfigurationen mit $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $m = \frac{v}{2}$ und $n = 2$. Da zwei Punkte eines Blockplanes stets dieselbe Verbindungszahl besitzen, stellen Fast-Blockpläne i.a. keine Blockpläne dar.

Ist der Fast-Blockplan $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ auflösbar und bezeichnet s die Anzahl der Blöcke einer Parallelschar, so gilt offenbar $v = s \cdot k$.

Sei $\mathfrak{F} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$ ein auflösbarer Fast-Blockplan mit $v > 2$. Dann existieren mindestens zwei Parallelscharen $S_1, S_2 \subseteq \mathfrak{B}$ derart, daß für je zwei Böcke B, C dieser Parallelscharen $[B, C] \leq 1$ gilt (vgl. [Vog, 89](2.19)).

Für einen Fast-Blockplan $\mathfrak{F} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$, dessen Blockmenge \mathfrak{B} zwei disjunkte Teilmengen S_1, S_2 mit den Eigenschaften

$$\bigcup_{B \in S_i} (B) = \mathfrak{P}, \quad |S_i| = s \text{ für } i \in \{1, 2\} \text{ und } \forall B_1 \in S_1, B_2 \in S_2 : [B_1, B_2] \leq 1$$

enthält, wird die Inzidenzstruktur $(\mathfrak{P}, S_1 \cup S_2, I|_{\mathfrak{P} \times S_1 \cup S_2})$ als *Startkonfiguration* $\mathfrak{J}_{\mathfrak{F}}$ von \mathfrak{F} bezeichnet.

Eine Startkonfiguration eines Fast-Blockplanes stellt eine taktische Konfiguration mit $r=2$ dar. Ist der Fast-Blockplan \mathfrak{F} auflösbar und gilt $v > 2$, so können stets zwei Parallelscharen als S_1 und S_2 gewählt werden.

Der realisierte Algorithmus erweitert eine gegebene Startkonfiguration durch sukzessive Konstruktion weiterer Parallelscharen zu einem auflösbaren Fast-Blockplan. Um zu den vorgegebenen Parametern alle auflösbaren Fast-Blockpläne zu konstruieren, muß das Verfahren auf alle möglichen Startkonfigurationen dieses Fast-Blockplanes angesetzt werden. Zur Bestimmung der Startkonfigurationen betrachtet man symmetrische taktische Konfigurationen, denn jede Startkonfiguration $\mathfrak{J}_{\mathfrak{F}} = (\mathfrak{P}, S_1 \cup S_2, I|_{\mathfrak{P} \times S_1 \cup S_2})$ eines Fast-Blockplanes $\mathfrak{F} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I_{\mathfrak{F}})$ definiert durch $\mathfrak{J} = (S_1, S_2, I)$ mit

$$B_1 I B_2 \approx (B_1) \cap (B_2) \neq \emptyset \quad \text{für } B_1 \in S_1 \text{ und } B_2 \in S_2$$

eine symmetrische taktische Konfiguration mit $v' = b' = |S_1|$ und $r' = k' = k$.

Umgekehrt erhält man aus jeder symmetrischen taktischen Konfiguration $\mathfrak{J} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$ mit den Parametern $|\mathfrak{P}| = s$ und $[p] = k$ für $p \in \mathfrak{P}$ durch

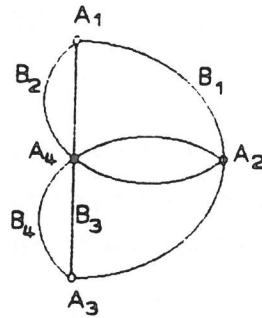
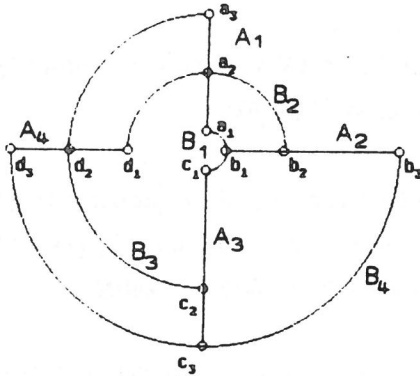
$$\mathfrak{P}' \approx I, \quad \mathfrak{B}' \approx \mathfrak{P} \cup \mathfrak{B} \text{ sowie } I' \approx \{((x, y), z) \mid x = z \vee y = z\} \subseteq \mathfrak{P}' \times \mathfrak{B}'$$

eine auflösbare taktische Konfiguration $(\mathfrak{P}', \mathfrak{B}', I')$ mit $v' = s \cdot k$, $k' = k$, $r' = 2$ und den beiden Parallelscharen $S_1 \approx \mathfrak{P}$, $S_2 \approx \mathfrak{B}$.

FAST-BLOCKPLÄNE

Außerdem liefert eine STK $\mathfrak{J} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$ mittels $p I^c B \Leftrightarrow \neg(p I B)$ wieder eine STK $\mathfrak{J}^c = (\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I^c)$ mit den Parametern $v_c = v$ und $k_c = v - k$.

Beispiel : Transformation einer Startkonfiguration in die STK \mathfrak{J} und \mathfrak{J}^c



$$A_1 \circ B_4$$

$$A_4 \circ B_1$$

$$A_3 \circ B_2$$

$$A_2 \circ B_3$$

Startkonfiguration $\mathfrak{J}_{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{P}_{\mathfrak{B}}, \mathfrak{B}_{\mathfrak{B}}, \epsilon)$
eines Fast-Blockplanes \mathfrak{B}
mit $k_{\mathfrak{B}} = 3$, $r_{\mathfrak{B}} = 6$ und $s_{\mathfrak{B}} = 4$.

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{B}} = \{ a_i, b_i, c_i, d_i \mid i \in \{1, 2, 3, 4\} \},$$

$$S_1 = \{ \{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\}, \{c_1, c_2, c_3\}, \{d_1, d_2, d_3\} \}$$

$$= \{ A_1, A_2, A_3, A_4 \}$$

$$S_2 = \{ \{a_1, b_1, c_1\}, \{a_2, b_2, d_1\}, \{a_3, c_2, d_2\}, \{b_3, c_3, d_3\} \}$$

$$= \{ B_1, B_2, B_3, B_4 \}$$

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{B}} = S_1 \cup S_2.$$

STK $\mathfrak{J} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$
 $v = b = s = 4,$
 $k = r = k_{\mathfrak{B}} = 3$

$$\mathfrak{P} = S_1$$

$$\mathfrak{B} = S_2$$

$$A_i I B_j \Leftrightarrow (A_i) \cap (B_j) \neq \emptyset$$

STK $\mathfrak{J}^c = (\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I^c)$
 $v_c = b_c = 4,$
 $k_c = r_c = 1,$

$$\mathfrak{P}_c = \mathfrak{P}$$

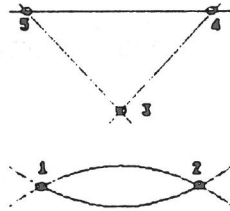
$$\mathfrak{B}_c = \mathfrak{B}$$

$$A_i I_c B_j \Leftrightarrow \neg(A_i I B_j)$$

Im folgenden werden taktische Konfigurationen $(\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$, in denen eine Punktmenge $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$ existiert so, daß $(\mathfrak{P}', \mathfrak{B}; I')$ mit $\mathfrak{B}' \approx \bigcup_{p \in \mathfrak{P}'} (p)$ sowie $I' \approx I|_{\mathfrak{P}' \times \mathfrak{B}}$ eine taktische Konfiguration darstellt, reduzibel genannt, anderenfalls irreduzibel.

Die in einer reduziblen taktischen Konfiguration enthaltenen irreduziblen taktischen Konfigurationen nennt man Teilkonfigurationen.

Beispiel :



Die symmetrische taktische Konfiguration

$$\mathfrak{J} = (\{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$\{(\{1,2\}, 1), (\{1,2\}, 2), (\{3,4\}, 1), (\{3,5\}, 1), (\{4,5\}, 1)\}, I)$$

mit $p \perp (B, n) \cong p \in B$

ist reduzibel und zerfällt in die zwei Teilkonfigurationen

mit $\mathfrak{P}_1 = \{1, 2\}$ und $\mathfrak{P}_2 = \{3, 4, 5\}$.

Kennt man die Anzahl $\zeta(v, k)$ der irreduziblen STK mit den Parametern v und k , die nicht zueinander isomorph sind, so kann nach Satz 2.10 aus [Vog.89] die Anzahl $\sigma(v, k)$ aller untereinander nichtisomorphen STK berechnet werden.

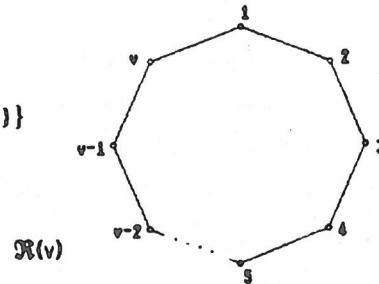
Für $k=1$ ist lediglich die STK mit $v=b=1$ irreduzibel, und es gilt $\zeta(v, 1)=0$ für $v > 1$, woraus man $\sigma(v, 1) = 1$ für $v \geq 1$, d.h. es existiert stets -bis auf Isomorphie- nur eine STK mit $k=1$ und $v \geq 1$.

Im Fall $k=2$ ist jede irreduziblen STK mit $v \geq 2$ Punkten isomorph zu der STK $\mathfrak{R}(v) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$ mit

$$\mathfrak{P} \cong \{p_1, \dots, p_v\},$$

$$\mathfrak{B} \cong \{(\{p_i, p_{i+1}\} | i = 1, \dots, v-1)\} \cup \{(p_1, p_v)\}$$

und $I \cong \epsilon$.



Insbesondere ist also $\zeta(v, 2)=1$ für $v \geq 2$.

Beispiele :

1) Mögliche Startkonfigurationen eines Fast-Blockplanes \mathfrak{J} mit $k=3$ und $r=6$

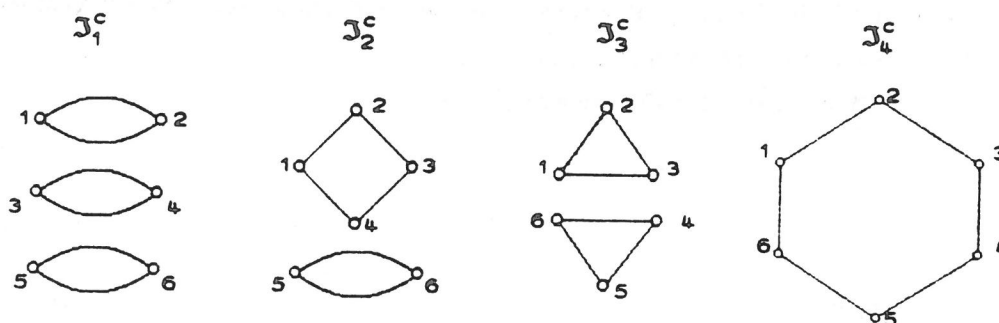
\mathfrak{J} besitzt (FB2) zufolge $v = 6 \cdot (3-1) = 12$ Punkte. Jede Parallelschar besteht daher aus $s = \frac{v}{k} = 4$ Blöcken.

Eine Startkonfiguration von \mathfrak{J} definiert somit eine STK \mathfrak{J} mit 4 Punkten und $k=3$. Aus dieser gewinnt man wie oben angegeben die STK \mathfrak{J}^c mit $v=4$ und $k=1$. Wegen $\sigma(v, 1) = 1$ für $v \geq 1$ ist \mathfrak{J}^c eindeutig bestimmt, also auch die Startkonfiguration \mathfrak{J} . Diese Startkonfiguration kann durch Konstruktion weiterer Parallelscharen nicht zu einem Fast-Blockplan erweitert werden. Somit kann kein auflösbarer Fast-Blockplan mit $k=3$ und $r=4$ existieren.

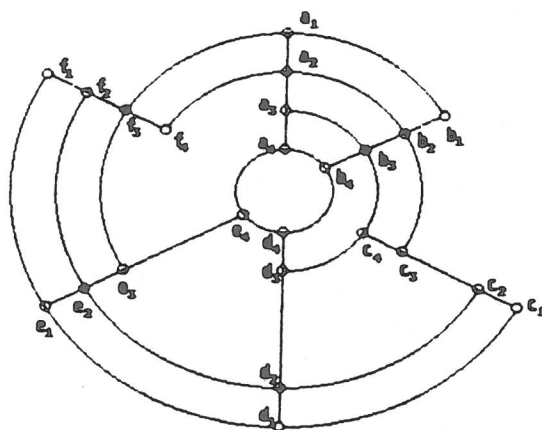
FAST-BLOCKPLÄNE

2) Startkonfigurationen eines Fast-Blockplanes \mathfrak{F} mit $k = 4$ und $r = 8$

Ein Fast-Blockplan mit diesen Parametern beschreibt das eingangs erwähnte Sitzplan-Problem. Wegen $v = 24$ besteht jede Parallelschar aus $s = 6$ Blöcken. Aus einer Startkonfiguration von \mathfrak{F} erhält man daher eine STK \mathfrak{J} mit 6 Punkten und $k = 4$. Der Übergang zur STK \mathfrak{J}^c liefert die Parameter $v_c = 6$ und $k_c = 2$. Damit kann die Anzahl der nichtisomorphen dieser STK mit Hilfe von $\sigma(6,2) = 4$ berechnet werden.



Die STK \mathfrak{J}_3^c führt z. B. zu der folgenden Startkonfiguration:



Somit existieren für den Fast-Blockplan \mathfrak{F} lediglich vier Startkonfigurationen. Ob eine dieser Startkonfigurationen zum Fast-Blockplan \mathfrak{F} erweitert werden kann, konnte aufgrund der hohen Zeitbedarfs des verwendeten Backtracking-Algorithmus noch nicht festgestellt werden.

Literatur :

**[Pic, 70] G. Pickert: Remarques sur une classe de structures géométriques finies.
Séminaire d'algèbre non commutative, Conférence n° 14 du 3 mars 1970.**

**[Wol, 73] K. E. Wolff : Fast-Blockpläne.
Mitt. math. Sem. Giessen 102 (1973).**

**[Vog, 89] U. Vogel: Algorithmen zur Konstruktion auflösbarer Fast-Block-
pläne mit Hilfe eines Computers.
Diplomarbeit, TU Clausthal, 1989.**

**Anschrift
Institut für Informatik
der Technischen Universität
Clausthal-Zellerfeld
Erzstr. 1**

**D-3392 Clausthal-Zellerfeld
Germany**