

Geometrische Ornamente in der islamischen Kunst

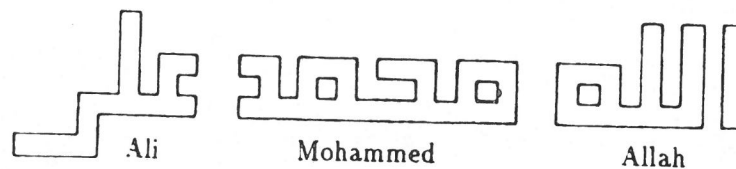
Wolfgang Müller

Dieser Artikel ist eine gekürzte Fassung des Vortrags, den ich innerhalb des Rahmenprogramms für das 21. Lotharingische Kombinatorikseminar im Schloß Thurnau am 8. Mai 1989 gehalten habe. Darin wurden zwei Typen von geometrischen Ornamenten in der islamischen Kunst angesprochen: Kalligraphische Ornamente und Rosettenornamente.

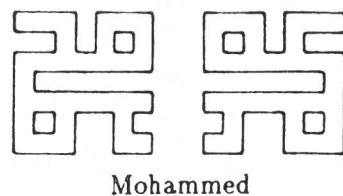
1 Kalligraphische Ornamente.

Eine Variante der arabischen Schrift ist besonders zur Bildung von scheinbar rein geometrischen Ornamenten geeignet, nämlich der quadratische kufische Duktus (engl.: squared kufi). Die Außenwände vieler Moscheen, Minarette und Koranschulen sind von solchen Ornamenten überzogen. Beispiele hierfür liefern die Freitags- und die Schah-Moschee in Isfahan (siehe [W], S. 65, 134) und die Bibi-Khanim-Moschee, die Ulug-Beg- und Schir-Dor-Medrese in Samarkand (siehe [BS], Abb. 10, 14, 30, 40). Es ist bedauerlich, daß sowohl in Büchern als auch von Reisegruppenbegleitern der Schriftcharakter dieser Ornamente teils aus Unkenntnis, teils aber auch aus weltanschaulichen Gründen verschwiegen wird.

Die islamischen Künstler haben zu dieser Schmuckform gegriffen, da (siehe [F], Bd. 1, S. 32) weder Allah noch sein Prophet bildlich dargestellt werden dürfen. Zur Bildung von periodischen Ornamenten werden nicht nur Namen wie "Allah", "Mohammed" oder "Ali" verwendet,



sondern auch islamische Glaubensgrundsätze wie "Kein Gott außer Allah", "Mohammed ist der Gesandte Gottes" (siehe [A], Bd. 4, Pl. XXXI und S. 222; [P], Bd. 1, S. 323; [M], Fig. 5) oder weitere kurze Koranverse. Hierbei dürfen die Buchstaben gedehnt, ihre Richtung auch innerhalb eines Wortes geändert, oder die Worte sogar gespiegelt werden:



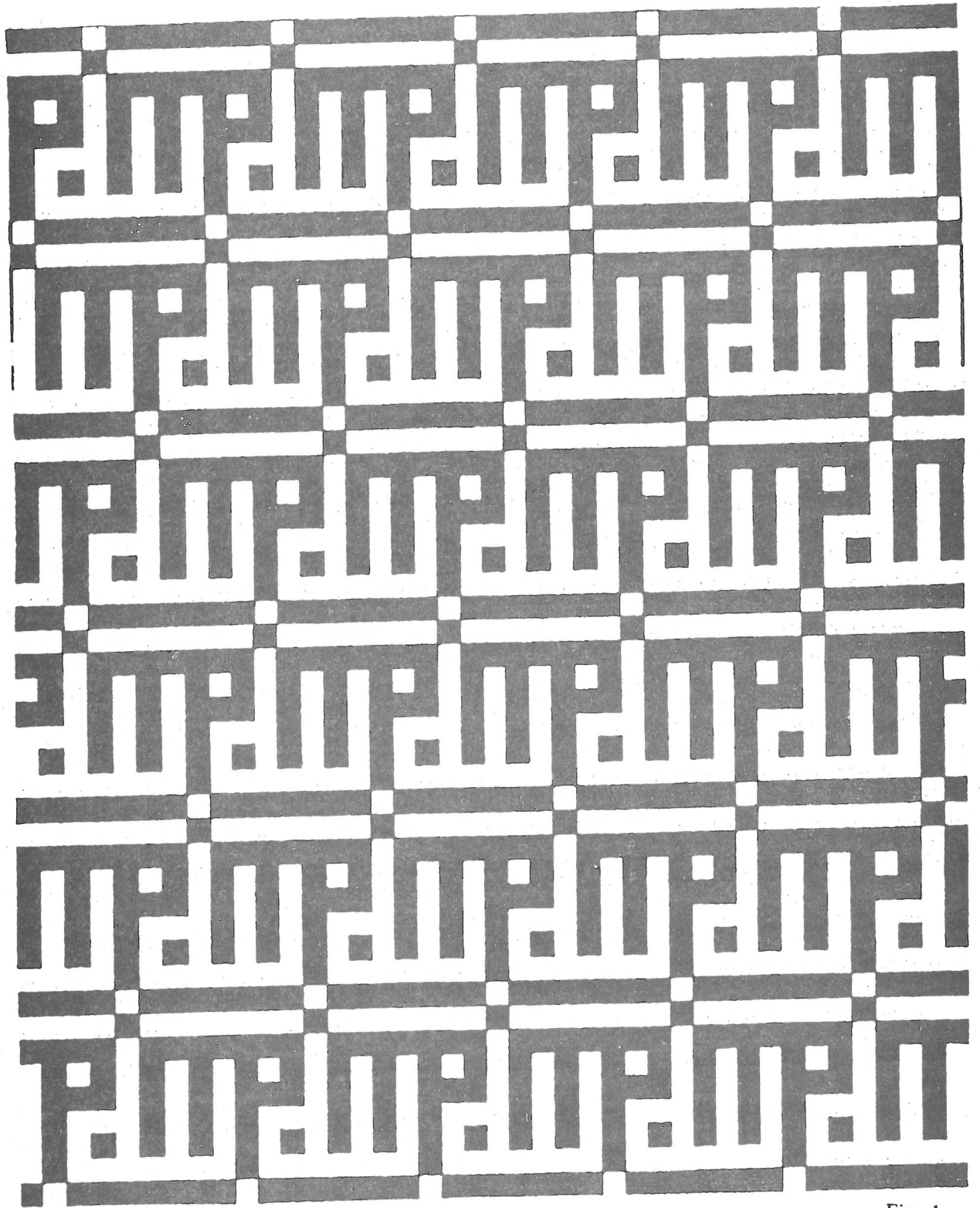


Fig. 1

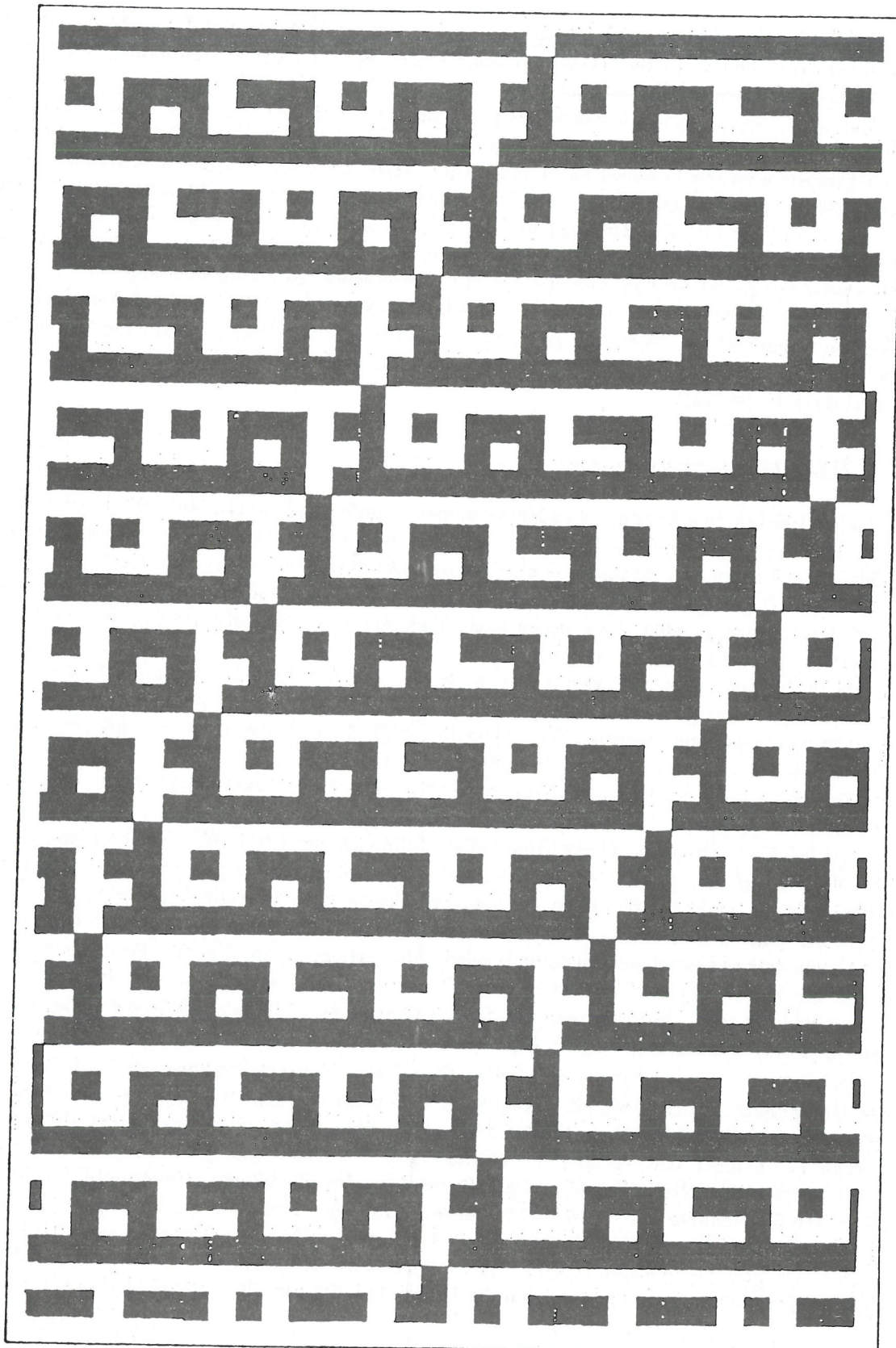


Fig. 2

Die beiden Flächenornamente in Fig. 1 und Fig. 2 zeigen, daß diese Art der arabischen Schrift die Möglichkeit bietet, die Buchstaben so anzuordnen, daß die Zwischenräume der Buchstaben wieder sinnvolle Worte bilden können.

Das erste, motiviert durch das Streifenornament Nr. 35 aus [H], wird erzeugt von dem Namen "Allah"; dabei ist der Anfangsbuchstabe, das Alif, ober- bzw. unterhalb quer gelegt. Die Zwischenräume formen in weißer Farbe in gleicher Weise, aber um 180° gedreht, diesen Namen. Somit gestattet das Ornament über die Translation hinaus Inversionen als Symmetrioperationen (eine Inversion ist hier eine Drehung um den Winkel 180° gefolgt von der Farbvertauschung "schwarz \leftrightarrow weiß"; siehe [SK], S. 43), und ist daher vom Symmetrietyp $p\bar{1}$ (siehe [SK], chap. 8). Das zweite Ornament wird auf dieselbe Art mit dem Namen "Mohammed" gebildet.

Ein weiteres solches Beispiel wird durch das Ineinandergreifen der Namen "Mohammed" und "Ali" im Ornament Nr. 86 aus [H] geliefert. Ebenso ist das Medaillon in [M], Fig. 6 mit dem Namen "Ali" von dieser Art; es findet sich auch über dem Portal des Karavansaray Sultanhani bei Aksaray in der Türkei.

2 Rosettenornamente.

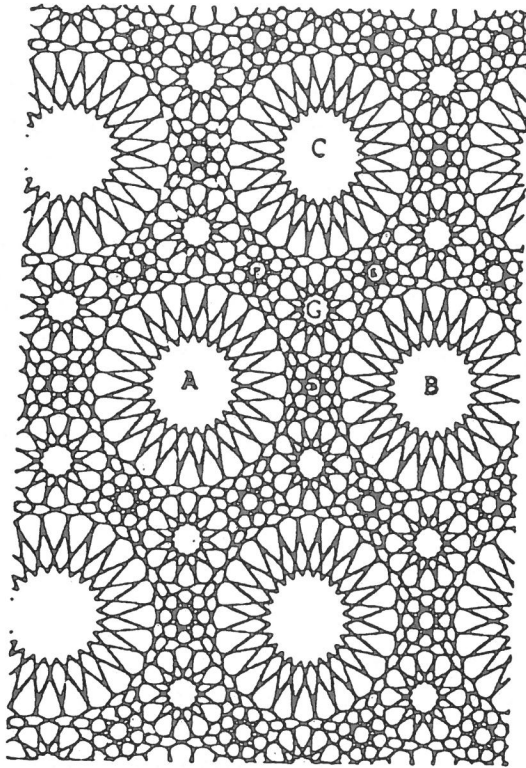
Seit über 100 Jahren gibt es die etwa 200 Ornamente umfassende Sammlung [Bou] von J. Bourgoïn, der im Vorderen Orient in Moscheen, Koranschulen und Karavansarayen nach periodischen Flächenornamenten gesucht hat. Da diese Ornamente durch die 17 Symmetriegruppen (siehe [SK], chap. 7) nur sehr grob klassifiziert werden können, z.B. gehören nach [MM] 39 % davon zur Symmetriegruppe $p6m$, erscheint es wünschenswert, diese Klassifikation zu verfeinern, was auch in [GS], S. 263 ausgedrückt wird.

Da in Ebenenornamenten global nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Drehungen auftreten, aber oft lokal Drehungen größerer Ordnung möglich sind, könnten diese Ordnungen zur Unterscheidung mit herangezogen werden. Wie schon in [MM], S. 59 bemerkt wird, sind die Bereiche höherer Symmetrie meist um die Drehpunkte des Flächenornaments plaziert, deren Lage in der Symmetriekarte des Ornaments markiert wird. Einen Überblick darüber gibt bei den 17 Symmetriegruppen Fig. 149 in [SK].

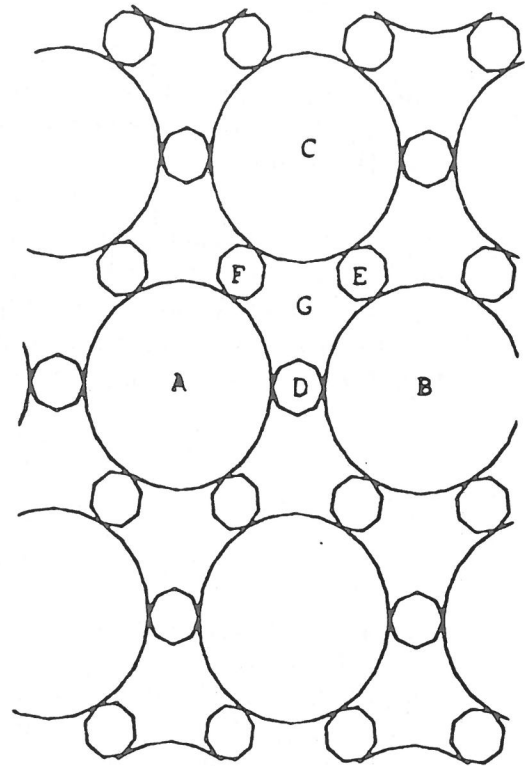
Wir fassen ein Ornament \mathcal{O} aus [Bou] auf als Teilmenge der Ebene \mathbb{R}^2 , die aus allen Punkten besteht, die auf den gezeichneten Linienzügen und ihren periodischen Fortsetzungen liegen. Jedem solchen Ornament \mathcal{O} ordnen wir eine periodische Parkettierung $P(\mathcal{O}) = \{F_i | i \in I\}$ der Ebene mit punktsymmetrischen abgeschlossenen Feldern F_i zu, deren Mittelpunkte Drehpunkte des Ornaments \mathcal{O} sind; dabei sollen die lokalen Symmetriegruppen, d.h. die Symmetriegruppen $S(\mathcal{O} \cap F_i)$ von $\mathcal{O} \cap F_i$, möglichst hohe Ordnung haben. Diese Zuordnung wird im allgemeinen nicht eindeutig sein. So bieten sich für das Ornament Nr. 140 aus [Bou], siehe Fig. 3, drei verschiedene Parkettierungen $P(\mathcal{O})$, $P'(\mathcal{O})$ und $P''(\mathcal{O})$ an.

Betrachten wir zunächst ein Ornament \mathcal{O} mit der Symmetriegruppe $p6m$. Die 6-zähligen Drehpunkte von \mathcal{O} bilden ein hexagonales Gitter (Die Klassifikation der Gitter behandelt Klemm in [K], Satz 7.7). Diese Punkte können als Eckpunkte (= vertices) einer Hilfsparkettierung P^* , nämlich der regulären Parkettierung (3^6) – Bezeichnung wie in [GS], Fig. 2.1.5 – mit gleichseitigen Dreiecken D_j^* , aufgefaßt werden. Die 2-zähligen Drehpunkte von \mathcal{O} sind die Seitenmittelpunkte der Dreiecke D_j^* und die 3-zähligen Drehpunkte von \mathcal{O} ihre (Innkreis- bzw. Umkreis-) Mittelpunkte. Die Felder F_i der Parkettierung $P(\mathcal{O})$ werden so gewählt, daß sie ihre Mittelpunkte in diesen Drehpunkten haben, wobei höchstens drei Kongruenzklassen von Feldern entstehen sollen: Die Felder um die Eckpunkte, die um die Seitenmittelpunkte und die

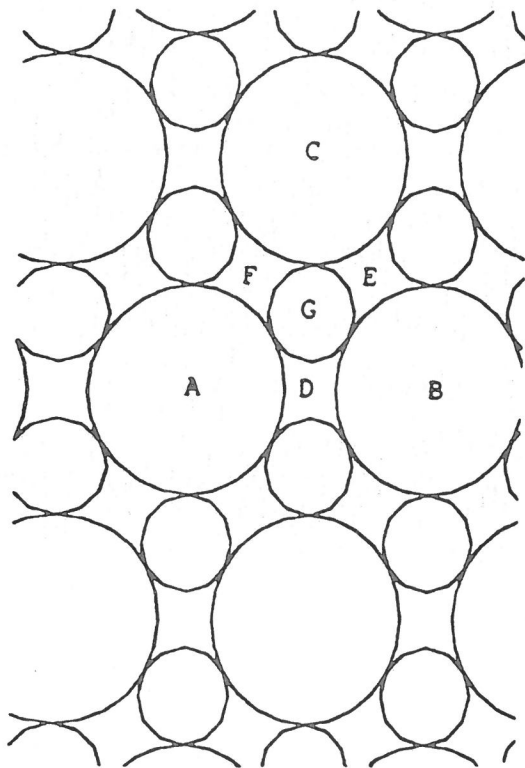
GEOMETRISCHE ORNAMENTE IN DER ISLAMISCHEN KUNST



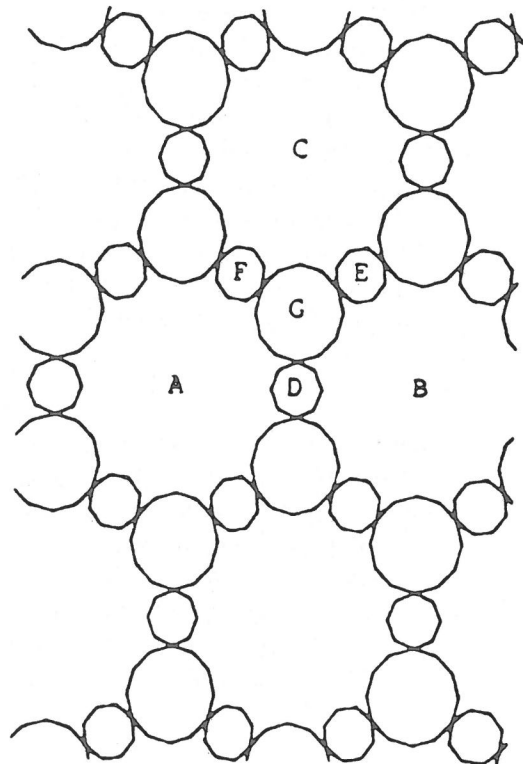
[Bou, Nr. 140]
p6m



$P(6)$
(24·m, 8·m, 3·m)



$P(6)$
(24·m, 2·m, 12·m)



$P(6)$
(6·m, 8·m, 12·m)

Fig. 3

um die Dreiecksmittelpunkte. Diese Kongruenzklassen seien in der entsprechenden Reihenfolge mit $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ bezeichnet und mit F_0, F_1, F_2 Repräsentanten davon, falls keine der Klassen leer ist. Das Tripel

$$LS(\mathcal{O}) := (S(\mathcal{O} \cap F_0), S(\mathcal{O} \cap F_1), S(\mathcal{O} \cap F_2))$$

von lokalen Symmetriegruppen - hier sind alle Diedergruppen - nennen wir den "lokalen Symmetriotyp" von \mathcal{O} . Im Falle $\mathcal{F}_i = \emptyset$ schreiben wir "0" für die entsprechende Komponente in $LS(\mathcal{O})$. Die Parkettierung $P(\mathcal{O})$ läßt sich immer so wählen, daß 6 bzw. 2 bzw. 3 Teiler der Ordnung der Drehungsuntergruppe von $S(\mathcal{O} \cap F_0)$ bzw. $S(\mathcal{O} \cap F_1)$ bzw. $S(\mathcal{O} \cap F_2)$ ist. Falls diese drei Zahlen alle echte Teiler sind, d.h.

$$|S(\mathcal{O} \cap F_0)| > 6 \cdot 2, |S(\mathcal{O} \cap F_1)| > 2 \cdot 2, |S(\mathcal{O} \cap F_2)| > 3 \cdot 2,$$

so gilt mit den Bezeichnungen aus [SK], chap. 3,

$$S(\mathcal{O} \cap F_0) \cong 12 \cdot m, \quad S(\mathcal{O} \cap F_1) \cong 4 \cdot m, \quad S(\mathcal{O} \cap F_2) \cong 6 \cdot m,$$

wie man sich leicht überlegen kann.

Als Beispiele sind in Fig. 3 die lokalen Symmetriotypen für die drei gewählten Parkettierungen zu dem Rosettenornament [Bou], Nr. 140 angegeben. Weiter können die Ornamente [Bou], Nr. 1, 2, 5, 12, 14, 38 unmittelbar auch als die zugehörige Parkettierung angesehen werden, deren lokaler Symmetriotyp der folgenden Liste entnommen werden kann. Bei den meisten Ornamenten aus [Bou] ist $P(\mathcal{O})$ als Vergrößerung von \mathcal{O} wählbar, d.h. daß jeweils mehrere Felder von \mathcal{O} ein Feld in $P(\mathcal{O})$ bilden.

Um die Abhängigkeit des lokalen Symmetriotyps von der gewählten Parkettierung etwas zu mildern, könnte man über eine lexikographische Anordnung der lokalen Symmetriotypen den Parkettierungen den Vorzug geben, die bei einem festen Ornament den maximalen lokalen Symmetriotyp liefern. Auch der Flächeninhalt der Felder könnte in Betracht gezogen werden.

Ganz ähnlich können wir jetzt bei Ornamenten mit der Symmetriegruppe $S(\mathcal{O}) \cong p4m$ verfahren. Die Fundamentalbereiche sind Quadrate, die so gelegt werden, daß die Ecken der Quadrate 4-zählige Drehpunkte sind. Da dann auch die Mittelpunkte der Quadrate 4-zählige Drehpunkte sind, gibt es zwei Möglichkeiten für die Wahl des quadratischen Gitters bzw. der Hilfsparkettierung $P^* \simeq (4^4)$. Zu \mathcal{O} und P^* suchen wir nun eine periodische Parkettierung $P(\mathcal{O})$, deren Felder punktsymmetrisch um die Eckpunkte, die Seitenmittelpunkte und die Quadratmittelpunkte von P^* angeordnet sind und höchstens in drei Kongruenzklassen zerfallen. Damit läßt sich der lokale Symmetriotyp wie oben definieren. Die Forderung

$$|S(\mathcal{O} \cap F_0)| \geq |S(\mathcal{O} \cap F_2)|$$

läßt oft nur eine Möglichkeit für das quadratische Gitter zu.

Die folgende Liste ordnet die Ornamente in [Bou] mit den Symmetriegruppen $p6m$ bzw. $p4m$ nach ihren lokalen Symmetriotypen:

Lokaler Symmetriotyp	Nummer der Ornamente in [Bou]
$p6m: (6 \cdot m, \quad 0, \quad 3 \cdot m)$	12
$(6 \cdot m, \quad 0, \quad 6 \cdot m)$	1
$(6 \cdot m, \quad 0, \quad 9 \cdot m)$	108
$(6 \cdot m, \quad 2 \cdot m, \quad 0)$	13

GEOMETRISCHE ORNAMENTE IN DER ISLAMISCHEN KUNST

	(6 · m,	2 · m,	3 · m)	4,5,11,16,17,18,21,22,23,32,35,40,100
	(6 · m,	2 · m,	6 · m)	2,6,20,25,26,33,38,39,84
	(6 · m,	2 · m,	12 · m)	113
	(6 · m,	4 · m,	3 · m)	14,15
	(6 · m,	4 · m,	6 · m)	104
	(6 · m,	6 · m,	3 · m)	19
	(6 · m,	8 · m,	3 · m)	31,37,107
	(6 · m,	∞,	3 · m)	24
	(12 · m,	0,	3 · m)	68,89
	(12 · m,	2 · m,	3 · m)	36,72,74,78,79,81,82,85,86,87,96,99
	(12 · m,	2 · m,	6 · m)	41,69,75,76,80,88,98,105,114,141
	(12 · m,	2 · m,	9 · m)	73,120,121,122,123,124,125
	(12 · m,	2 · m,	15 · m)	128
	(12 · m,	4 · m,	3 · m)	93
	(12 · m,	4 · m,	6 · m)	90,92,110
	(12 · m,	8 · m,	3 · m)	91
	(12 · m,	10 · m,	3 · m)	161
	(18 · m,	2 · m,	9 · m)	136
	(18 · m,	2 · m,	12 · m)	137
	(24 · m,	2 · m,	6 · m)	139
	(24 · m,	2 · m,	12 · m)	140
p4m:	(8 · m,	0,	4 · m)	42,43,44,48,49,60,64
	(8 · m,	2 · m,	4 · m)	53,55,67,148,163
	(8 · m,	2 · m,	8 · m)	45,47,54,56,59,119,143,144,145,146
	(8 · m,	6 · m,	4 · m)	66,106,127,154
	(8 · m,	8 · m,	4 · m)	46,58,151
	(12 · m,	2 · m,	4 · m)	70,71,77,95
	(12 · m,	2 · m,	8 · m)	83,115,116,117,118
	(12 · m,	4 · m,	4 · m)	94
	(12 · m,	10 · m,	4 · m)	158,159
	(16 · m,	0,	4 · m)	57,129,130
	(16 · m,	2 · m,	4 · m)	149,152
	(16 · m,	2 · m,	8 · m)	65,153
	(16 · m,	2 · m,	12 · m)	131,132,133,134,135
	(16 · m,	10 · m,	4 · m)	160,162
	(20 · m,	2 · m,	12 · m)	138
	(24 · m,	2 · m,	8 · m)	150

Eine weitere Möglichkeit, solche Rosettenornamente zu charakterisieren, besteht darin, Zeichenanweisungen zu geben: Ausgehend von einer Hilfsparkettierung P^* wird die Art der punktsymmetrischen Figuren $\mathcal{O} \cap F_i$, z.B. Polygon, Stern, Rose, die um die Drehpunkte von \mathcal{O} zu zeichnen sind, beschrieben. Dies wird zusammen mit der Vervollständigung eines aus reinen Rosetten bestehenden Ornaments – damit ist das Ausfüllen der zunächst auftretenden Lücken gemeint – in einem künftigen Aufsatz geschehen.

Literatur

- [A] d'Avennes, P., *L'art arabe*. Morel, Paris 1877. Nachdruck 4 Bde. Eastern Art, Beirut 1973
- [Bou] Bourgoïn, J., *Arabic Geometrical Pattern and Designs*. Dover Publ., New York 1973. Nachdruck der Ausgabe von 1879
- [BS] Bulatova, V., Shishkina, G. u.a., *Samarkand*. Taschkent 1986
- [F] Franz, H.G., *Palast, Moschee und Wüstenschloß*. Akad.Dr. u. Verl.Anst., Graz 1984
- [GS] Grünbaum, B., Shephard, G.C., *Tilings and patterns*. Freeman and Co., New York 1987
- [H] Humbert, C., *Ornamente Bd. 2, 1001 islamische Motive*. Callwey, München 1980
- [K] Klemm, M., *Symmetrien von Ornamenten und Kristallen*. Springer, Berlin u.a. 1982
- [M] Mamedov, Kh.S., *Crystallographic patterns*. Comp. & Maths. with Appls. vol. 12B, 511-529, 1986
- [MM] Makovicky, E., Makovicky, M., *Arabic geometrical patterns – a treasury for crystallographic teaching*. Neues Jahrbuch für Mineralogie, Monatshefte No. 2, 58-68, (1977)
- [P] Paccard, A., *Le Maroc et l'artisanat traditionnel islamique dans l'architecture. Tome 1 et 2*. Editions atelier 74, Bonlieue, Annecy 1983
- [SK] Shubnikov, A.V., Koptsik, V.A., *Symmetry in science and art*. Plenum Press, New York u.a. 1977
- [W] Würfel, K., *Isfahan*. Raggi Verl., Küsnacht – Zürich 1974

Anschrift des Autors:

Mathematisches Institut
Universität Bayreuth
Postfach 10 12 51
8580 Bayreuth