Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1990, 413/S–21
Actes 21e Séminaire Lotharingien, p. 76–81

Partitionsreguläre Gleichungssysteme

Hanno Lefmann*

Im Zusammenhang mit Untersuchungen zu Fermats Vermutung über die Lösbarkeit der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ hat Schur 1916 den folgenden Satz bewiesen:

Theorem A [Sch 16] *Sei δ eine positive ganze Zahl. Dann gibt es zu jeder Färbung $\Delta\colon \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1,\ldots,\delta-1\}$ der positiven ganzen Zahlen mit δ vielen Farben Zahlen $x,y,z \in \mathbb{N}$ mit $x+y=z$, die bezüglich der Färbung Δ alle die gleiche Farbe haben, das heißt $\Delta(x)=\Delta(y)=\Delta(z)$.*

Van der Waerden untersuchte arithmetische Progressionen, und er bewies für diese den folgenden Partitionssatz:

Theorem B [vdW 27] *Sei δ eine positive ganze Zahl. Dann gibt es zu jeder Färbung $\Delta\colon \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1,\ldots,\delta-1\}$ arithmetische Progressionen $a, a+d, \ldots, a+kd$ von beliebiger endlicher Länge mit $\Delta(a)=\Delta(a+d)=\ldots=\Delta(a+kd)$.*

Brauer bemerkte hierzu in [Br 28], daß man erreichen kann, daß die Differenz der arithmetischen Progression $a+\lambda d$, $\lambda = 0,1,\ldots,k$, gleichgefärbt mit allen Termen der arithmetischen Progression ist. Nun lassen sich arithmetische Progressionen mit (k+1) Termen und ihren Differenzen durch das lineare Gleichungssystem $< x_{i+1} - x_i = x_0 \; ! \; i = 1,2,\ldots,k >$ beschreiben. Das Resultat von Brauer besagt damit, daß zu jeder Färbung der positiven ganzen Zahlen mit endlich vielen Farben eine monochromatische Lösung dieses Gleichungssystems existiert.

In diesem Zusammenhang stellte sich Rado die Frage, ob es noch andere Gleichungssysteme gibt, die bei einer beliebigen Färbung der Menge der positiven ganzen Zahlen mit endlich vielen Farben monochromatisch erfüllbar sind. Gleichungssysteme mit dieser Eigenschaft nennt man *partitionsregulär*.

Rado gelang in seiner Arbeit [Ra 33] eine Charakterisierung der partitionsregulären linearen Systeme über die Existenz bestimmter linearer Abhängigkeiten der Spaltenvektoren der zugehörigen Koeffizientenmatrix:

Definition *Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{v \times w}$ mit ganzzahligen Einträgen und mit den Spaltenvektoren $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{w-1}$ hat die Spalteneigenschaft genau, wenn es eine Partition $\{0,1,\ldots,w-1\} = I_0 \,\dot\cup\, I_1 \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, I_m$ der Menge der Spaltenindizes von A gibt, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

*IBM-Deutschland GmbH, Wissenschaftliches Zentrum, Tiergartenstraße 15, D-6900 Heidelberg

(i) $\sum_{i \in I_0} \mathbf{a_i} = \mathbf{0}$

(ii) *für* $j = 1, 2, \ldots, m$ *ist die Summe* $\sum_{i \in I_j} \mathbf{a_i}$ *eine rationale Linearkombination von früheren Spaltenvektoren* $\mathbf{a_k}$ *mit* $k \in I_0 \dot\cup I_1 \dot\cup \ldots \dot\cup I_{j-1}$.

Theorem C **[Ra 33]** *Sei* $A \in \mathbb{Z}^{v \times w}$ *eine Matrix. Dann sind äquivalent:*

(i) *Das System* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *ist partitionsregulär.*

(ii) *Die Matrix* A *hat die Spalteneigenschaft.*

Rados Theorem beinhaltet damit insbesondere die Sätze von Schur und van der Waerden. Darüberhinaus hat die dem System $< \sum_{i \in I} x_i = x_I \,!\, I \subseteq \{0, 1, \ldots, m\}, I \neq \emptyset >$ zugrundeliegende Matrix die Spalteneigenschaft, wie leicht einzusehen ist. Dieses liefert den folgenden Summensatz:

Korollar **[Ra 33, Fo 71, Sa 69]** *Seien* δ, m *positive ganze Zahlen. Dann gibt es zu jeder Färbung* $\Delta \colon \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, \delta - 1\}$ *positive ganze Zahlen* $x_0, x_1, \ldots, x_m$, *so daß alle deren nichtleere Summen (ohne Wiederholung) die gleiche Farbe bezüglich* Δ *haben.*

Während Rado die partitionsregulären linearen Gleichungssysteme durch eine Eigenschaft ihrer Matrizen charakterisierte, wählte Deuber in [De 73]einen anderen Weg. Er charakterisierte derartige Systeme durch ihre Lösungsmengen. Dazu führte er das Konzept der (m,p,c)-Mengen ein:

Definition *Sei* c *eine positive ganze Zahl und seien* m,p *nichtnegative ganze Zahlen. Eine Teilmenge* $M \subset \mathbb{N}$ *ist eine (m,p,c)-Menge genau, wenn positive ganze Zahlen* $x_0, x_1, \ldots, x_m$ *existieren, so daß gilt:*

$$M = \{cx_i + \sum_{j=i+1}^{m} \lambda_j x_j \,!\, 0 \leq i \leq m,\ -p \leq \lambda_j \leq p,\ i, \lambda_j \in \mathbb{Z}\}.$$

Eine (m,p,c)-Menge mit Generatoren $x_0, x_1, \ldots, x_m$ besteht also aus allen Elementen, die in der folgenden Liste auftreten:

$$\begin{array}{r} cx_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m \\ cx_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m \\ cx_2 + \ldots + \lambda_m x_m \\ \vdots \\ cx_m \end{array}$$

mit $-p \leq \lambda_j \leq p$, $\lambda_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Für diese (m,p,c)-Mengen zeigte Deuber den folgenden Partitionssatz:

Theorem D [De 73] *Seien δ, m, p, c positive ganze Zahlen. Dann existieren positive ganze Zahlen n,q,d , so daß für jede (n,q,d)-Menge N gilt:*

Zu jeder Färbung $\Delta : N \longrightarrow \{0,1,\ldots,\delta-1\}$ existiert eine (m,p,c)-Menge $M \subset N$, die monochromatisch bezüglich Δ gefärbt ist.

Diese (m,p,c)-Mengen erweisen sich als sehr nützlich bei der Analyse der partitionsregulären linearen Gleichungssysteme, da sie deren Lösungen approximieren und somit folgende Charakterisierung ermöglichen:

Theorem E [De 73] *Sei $A \in \mathbb{Z}^{v\times w}$ eine Matrix. Dann sind äquivalent:*

(i) *Das System $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist partitionsregulär.*

(ii) *Die Matrix A hat die Spalteneigenschaft.*

(iii) *Es existieren positive ganze Zahlen m,p,c so, daß jede (m,p,c)-Menge eine Lösung des Systems $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ enthält.*

Theorem E zeigt, daß (m,p,c)-Mengen die Lösungen von partitionsregulären homogenen linearen Gleichungssystemen umschliessen. Deuber bewies in [De 73] mit diesem Konzept insbesondere eine Vermutung von Rado über reguläre Mengen.

Darüberhinaus gehen (m,p,c)-Mengen an zentraler Stelle ein bei der Analyse unendlicher partitionsregulärer linearer Gleichungssysteme (vgl. [DH 88]), bei der kanonischen Situation - Färbungen der positiven ganzen Zahlen mit beliebig vielen Farben (vgl. [Le 86]) - sowie bei den im folgenden näher zu betrachtenden nichtlinearen Systemen. Für weitere Entwicklungen, die von Rados Arbeit [Ra 33] ausgingen, wird auf [De 89] verwiesen.

Während die endlichen partitionsregulären linearen Systeme charakterisiert sind, ist über partitionsreguläre nichtlineare Systeme wenig bekannt. So fragten Erdös und Graham in [EG 80], ob überhaupt ein reziprokes Schur Analogon gelte, das heißt, ob die Gleichung $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ partitionsregulär ist. Es läßt sich nun zeigen, daß diese Gleichung partitionsregulär ist. Allgemein gilt sogar, daß derartige partitionsreguläre Systeme wiederum durch die Spalteneigenschaft charakterisiert sind:

Theorem F [Le 89] *Sei $A \in \mathbb{Z}^{v\times w}$ eine Matrix. Dann sind äquivalent:*

(i) *Das System $A(x_0^{-1}, x_1^{-1}, \ldots, x_{w-1}^{-1})^t = \mathbf{0}$ ist partitionsregulär.*

(ii) *Die Matrix A hat die Spalteneigenschaft.*

Nach dem Satz von Brauer [Br 28] ist das lineare Gleichungssystem $< x_{i+1} - x_i = x_0 \; ! \; 1,2,\ldots,k >$, welches arithmetische Progressionen mit ihren Differenzen beschreibt, partitionsregulär. Es folgt somit mit Theorem F, daß auch das System $< \frac{1}{x_{i+1}} - \frac{1}{x_i} = \frac{1}{x_0} \,!\, i = 1, 2, \ldots, k >$ partitionsregulär ist und damit erhält man:

Korollar [Le 89] *Sei δ eine positive ganze Zahl und sei $\mathbb{N}^{-1} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ die Menge der reziproken positiver ganzer Zahlen.*

Dann gibt es zu jeder Färbung $\Delta : \mathbb{N}^{-1} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, \delta - 1\}$ arithmetische Progressionen $a, a + d, \ldots, a + kd$ in $\mathbb{N}^{-1}$ von beliebiger endlicher Länge, so daß gilt $\Delta(a) = \Delta(d) = \Delta(a + \lambda d)$ für $\lambda = 1, 2, \ldots, k$.

Theorem F läßt sich verallgemeinern auf Gleichungssysteme, bei denen die Exponenten der Variablen x_i die Kehrwerte von 0 verschiedener ganzer Zahlen sind:

Theorem G [Le 89]: *Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und sei $A \in \mathbb{Z}^{v \times w}$ eine Matrix. Dann sind äquivalent:*

(i) *Das System $A(x_0^{\frac{1}{k}}, x_1^{\frac{1}{k}}, \ldots, x_{w-1}^{\frac{1}{k}})^t = 0$ ist partitionsregulär.*

(ii) *Die Matrix A hat die Spalteneigenschaft.*

Mit Theorem G folgt insbesondere, daß die Gleichung $x^{\frac{1}{k}} + y^{\frac{1}{k}} = z^{\frac{1}{k}}$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ partitionsregulär ist, da nach dem Satz von Schur die Matrix (1,1,-1) partitionsregulär ist.

In Theorem G haben in den betrachteten Gleichungssystemen alle Variablen den gleichen Exponenten, und diese Systeme sind somit homogen, i.e. jedes ganzzahlige Vielfache einer Lösung ist wieder eine Lösung. Im inhomogenen Fall, wenn verschiedene Exponenten der Variablen auftreten, werden die partitionsregulären Systeme nicht durch die Spalteneigenschaft allein charakterisiert, sondern es kommt eine zusätzliche Eigenschaft hinzu:

Theorem H [Le 89] *Seien k,l positive ganze Zahlen und seien $A \in \mathbb{Z}^{u \times v}$ und $B \in \mathbb{Z}^{u \times w}$ Matrizen. Dann sind äquivalent:*

(i) *Das System $A(x_0^{\frac{1}{k}}, x_1^{\frac{1}{k}}, \ldots, x_{v-1}^{\frac{1}{k}})^t + B(y_0^{-\frac{1}{l}}, y_1^{-\frac{1}{l}}, \ldots, y_{w-1}^{-\frac{1}{l}})^t = 0$ ist partitionsregulär.*

(ii) *Es existiert eine positive ganze Zahl $a \in \mathbb{N}$ mit*
$A(a^{\frac{1}{k}}, \ldots, a^{\frac{1}{k}})^t + B(a^{-\frac{1}{l}}, \ldots, a^{-\frac{1}{l}})^t = 0$
oder
beide Matrizen A und B haben die Spalteneigenschaft.

Für Systeme $A(x_0^k, x_1^k, \ldots, x_{w-1}^k)^t = 0$ mit ganzzahligen Exponenten k, wobei $k \neq 0, 1, -1$, ist hinsichtlich Partitionsregularität wenig bekannt. Die partitionsregulären Systeme können nicht durch die *Spalteneigenschaft*, wie sie bei linearen

Systemen auftritt, charakterisiert werden. Überträgt man nämlich den Begriff der Partitionsregularität in naheliegender Weise auf Färbungen der reellen Zahlen (vgl. [Ra 43]), so läßt sich zeigen, daß die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ in der Menge $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ partitionsregulär ist, jedoch nicht in $\mathbb{N}$, da ja bekanntermaßen diese Gleichung nicht einmal in $\mathbb{N}$ lösbar ist. Ebenso ist die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ partitionsregulär. Andererseits ist jedoch nicht bekannt, ob diese auch in $\mathbb{N}$ partitionsregulär ist. Natürlich lassen sich verschiedene in $\mathbb{N}$ partitionsreguläre quadratische Gleichungen $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = 0$ leicht angeben, etwa solche, die mit hinreichend langen arithmetischen Progressionen $a + \lambda d$ und dem c-fachen ihrer Differenz cd lösbar sind. Eine Charakterisierung der partitionsregulären Gleichungen ist zwar für $\mathbb{R}$ bekannt, jedoch nicht für $\mathbb{N}$.

Literatur

[Br 28] Brauer, A.: Über Sequenzen von Potenzresten. Sitzungber. Preuß. Akad. Wiss. Math. Phy. Kl., 1928, 9-16.

[De 73] Deuber, W.: Partitionen und lineare Gleichungssysteme. Math. Z. 133 , 1973, 109-123.

[De 89] Deuber, W.: Developements based on Rado's Dissertation "Studien zur Kombinatorik". 12th British Combinatorial Conference.

[DH 87] Deuber, W. und Hindman, N.: Partitions and sums of (m,p,c)-sets. J. Combin. Theory Ser. A 45, 1987, 300-302.

[EG 80] Erdös, P. und Graham, R.L.: Old and new problems and results in combinatorial number theory. L'Enseigment Mathematique Monographie No. 28, Geneve, 1980.

[Fo 71] Folkman, J.: s. Graham, R.L. und Rothschild, B.L. : Ramsey's theorem for n-parameter sets. Trans. AMS 159, 1971, 257 - 292.

[Le 86] Lefmann, H.: A canonical version for partition regular systems of equations. J. Combin. Theory Ser. A 41, 1986, 95-104.

[Le 89] Lefmann, H.: On partition regular systems of equations. preprint. Bielefeld, 1989.

[Ra 33] Rado, R.: Studien zur Kombinatorik. Math. Z. 36, 1933, 424-480.

[Ra 43] Rado, R.: Note on combinatorial analysis. Proc. London Math. Soc. 48, 1943, 122-160.

[Sa 69] Sanders, J.: A generalization of Schur's theorem. Dissertation. Yale University.1969.

[Sch 16] Schur, I.: Über die Kongruenz $x^n + y^n \equiv z^n \pmod p$. J. Ber. d. Dt. Math.-Verein, 1916, 114-117.

[vdW 27] van der Waerden, B.L.: Beweis einer Baudetschen Vermutung. Nieuw Arch. Wisk. 15, 1927, 212-216.