Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1990, 413/S–21
Actes 21^e Séminaire Lotharingien, p. 68–75

Extremalprobleme in Verbänden

HANNO LEFMANN, BIELEFELD

Innerhalb der kombinatorischen Extremaltheorie sind Probleme der folgenden Art von besonderem Interesse:

Sei $(\mathcal{P}(n), \cap, \cup)$ der Potenzmengenverband einer n-elementigen Menge. Gegeben sind

- nicht negative ganze Zahlen $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{t-1}$ und
- eine Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(n)$ von Mengen, so daß zu je zwei verschiedenen Mengen $F, F^* \in \mathcal{F}$ eine nicht negative ganze Zahl $i < t$ existiert mit $|F \cap F^*| = \mu_i$.

Gesucht wird die maximale Kardinalität $\max_{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(n)} |\mathcal{F}|$ derartiger Familien $\mathcal{F}$.

Sei zum Beispiel $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(n)$ eine Familie von Mengen, die paarweise disjunkt sind, also $t = 1$ und $\mu_0 = 0$. Dann ist offenbar $|\mathcal{F}| \leq 1 + n$, da jedes Element einer $\mathcal{P}(n)$ zugrundeliegenden n-elementigen Menge X höchstens einmal verwendet werden darf. Die Familie $\mathcal{F} = \{\emptyset\} \cup \{\{x\} | x \in X\}$ zeigt, daß diese obere Schranke auch scharf ist.

Ist nun t eine beliebige nicht negative ganze Zahl und $\mu_i = i$ für alle $i < t$, so erhält man

THEOREM 1 [FRANKL, WILSON 1981]: Seien n, t nicht negative ganze Zahlen. Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(n)$ eine Familie von Mengen, so daß für je zwei Mengen $F, F^* \in \mathcal{F}$ mit $F \neq F^*$ gilt $|F \cap F^*| < t$.
Dann ist

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}.$$

■

Die Familie $\mathcal{F}_t = \{F \in \mathcal{P}(n) | |F| \leq t\}$, die aus den ersten $(t+1)$ Niveaus in $\mathcal{P}(n)$ besteht, zeigt gerade, daß diese Schranke erreicht werden kann.

Darüberhinaus haben Frankl und Wilson gezeigt, daß bei beliebigen Werten der μ_i für die Kardinalität von $\mathcal{F}$ die gleiche obere Schranke gültig ist:

THEOREM 2 [FRANKL, WILSON 1981]: Seien n, t nicht negative ganze Zahlen. Seien $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{t-1}$ paarweise verschiedene nicht negative ganze Zahlen.

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(n)$ eine Familie von Mengen, so daß für je zwei Mengen $F, F^* \in \mathcal{F}$ mit $F \neq F^*$ ein $i < t$ existiert mit $|F \cap F^*| = \mu_i$. Dann ist

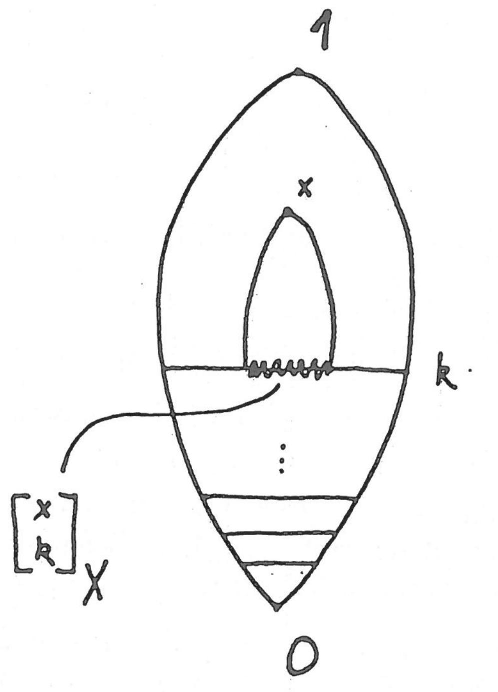
$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}.$$

■

Derartige Probleme sollen nun in beliebigen endlichen Verbänden $(X, \wedge, \vee)$ mit Rangfunktion $rg : X \to \omega$ betrachtet werden. Für einen derartigen Verband $(X, \wedge, \vee)$ sei das minimale Element mit $\mathbf{0}$, das maximale mit $\mathbf{1}$ bezeichnet. Für nichtnegative ganze Zahlen k und Elemente $x \in X$ sei

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_X := \{y \in X | y \leq x \text{ und } rg(y) = k\}$$

der (untere) k-Schatten von x. Also ist $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{1} \\ k \end{smallmatrix}\right]_X$ gerade das k-te Niveau in $(X, \wedge, \vee)$.



Im folgenden seien alle Verbände endlich und mit Rangfunktion.

DEFINITION: Ein Verband $(X, \wedge, \vee)$ heißt *homogen* genau, wenn für jede nicht negative ganze Zahl k und alle $x, y \in X$ gilt

$$rg(x) = rg(y) \text{ impliziert } \left| \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_X \right| = \left| \begin{bmatrix} y \\ k \end{bmatrix}_X \right|.$$

Für homogene Verbände können somit verallgemeinerte Binomialkoeffizienten verwendet werden, also $\left| \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_X \right| = \binom{n}{k}_X$ für $n = rg(x)$.

Offenbar sind die folgenden Verbände homogen:

- Potenzmengenverbände $\mathcal{P}(n)$
- lineare Verbände $\mathcal{L}(n, q)$
- affine Verbände $\mathcal{A}(n, q)$
- Partitionsverbände $\Pi(n)$, wobei $\mathbf{0}$ die Partition ist, die genau aus einem Block besteht.
- Graham–Rothschild Verbände $\mathcal{GR}(A, n)$ der Parameterworte der Länge n über einem endlichen Alphabet A.

Die Graham–Rothschild Verbände haben als Elemente Parameterworte:

Seien k, n nicht negative ganze Zahlen und sei A eine endliche Menge. Für Parameter $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ mit $A \cap \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}\} = \emptyset$ besteht die Menge $[A]\binom{n}{k}$ der k-Parameterworte der Länge n über dem Alphabet A aus allen Abbildungen $f : \{0, 1, \ldots, n-1\} \to A \cup \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}\}$ für die gilt:

- $f^{-1}(\lambda_i) \neq \emptyset$ für alle $i < k$,
  d. h. f wirkt surjektiv auf der Menge der Parameter, und
- $min f^{-1}(\lambda_i) < min f^{-1}(\lambda_j)$ für alle $i < j < k$,
  d. h. die ersten Auftreten der Parameter sind hintereinander.

Für Parameterworte $f \in [A]\binom{n}{m}$ und $g \in [A]\binom{m}{k}$ ist die Komposition $f \cdot g \in [A]\binom{n}{k}$ definiert durch

$$(f \cdot g)(i) = \begin{cases} f(i) \text{ falls } f(i) \in A \\ g(j) \text{ falls } f(i) = \lambda_j. \end{cases}$$

Diese Komposition von Parameterworten induziert eine teilweise Ordnung $\leq$ auf $\cup_{k=0}^{n} [A]\binom{n}{k}$:

Für $f \in [A]\binom{n}{m}$ und $h \in [A]\binom{n}{k}$ ist $f \leq h$ genau, wenn ein $g \in [A]\binom{m}{k}$ existiert mit $f \cdot g = h$. Diese teilweise Ordnung auf $\cup_{k=0}^{n} [A]\binom{n}{k}$ liefert dann in natürlicher Weise den Graham–Rothschild Verband $\mathcal{GR}(A, n)$.

DEFINITION:: Sei t eine nicht negative ganze Zahl. Ein homogener Verband $(X, \wedge, \vee)$ hat die t *-Vandermonde Eigenschaft* genau, wenn für jede Wahl von ganzen Zahlen $0 \leq \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_t \leq rg(1)$ für die Determinante der verallgemeinerten Binomialkoeffizienten gilt

$$det \begin{pmatrix} \binom{\mu_0}{0}_X & \binom{\mu_0}{1}_X & \cdots & \binom{\mu_0}{t}_X \\ \binom{\mu_1}{0}_X & \binom{\mu_1}{1}_X & \cdots & \binom{\mu_1}{t}_X \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \binom{\mu_t}{0}_X & \binom{\mu_t}{1}_X & \cdots & \binom{\mu_t}{t}_X \end{pmatrix} \neq 0.$$

Potenzmengenverbände $\mathcal{P}(n)$ haben die t-Vandermonde Eigenschaft für jedes $t \leq n$, wie die folgende Identität unmittelbar zeigt:

$$det \begin{pmatrix} \binom{\mu_0}{0} & \binom{\mu_0}{1} & \cdots & \binom{\mu_0}{t} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \binom{\mu_t}{0} & \binom{\mu_t}{1} & \cdots & \binom{\mu_t}{t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot t!} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & \mu_0 & \mu_0^2 & \cdots & \mu_0^t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \mu_t & \mu_t^2 & \cdots & \mu_t^t \end{pmatrix}.$$

Es läßt sich zeigen, daß der Satz von Frankl und Wilson auf homogene Verbände, welche die Vandermonde Eigenschaft erfüllen, ausgedehnt werden kann:

THEOREM 3: Sei $(X, \wedge, \vee)$ ein homogener Verband, der für eine nicht negative ganze Zahl $t < rg(1)$ die s-Vandermonde Eigenschaft für $s = 0, 1, \ldots, t$ hat. Seien $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{t-1}$ paarweise verschiedene nicht negative ganze Zahlen.
Sei $\mathcal{F} \subseteq X$ eine Familie, so daß für alle $F, F^* \in \mathcal{F}$ mit $F \neq F^*$ ein $i < t$ existiert mit $rg(F \wedge F^*) = \mu_i$.
Dann gilt

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{t} \binom{rg(1)}{i}_X.$$

■

Für $\mu_i = i$ für alle $i < t$ zeigen die ersten $(t+1)$ Niveaus $\bigcup_{k=0}^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}_X$, daß diese Schranke angenommen werden kann.

Zum Nachweis der Vandermonde Eigenschaft von Verbänden ist das Konzept der verallgemeinerten Stirlingzahlen $S_k^n(\mathbf{a})$, welches von Voigt [1984] eingeführt wurde, geeignet:

Seien $A_0, A_1, A_2, \ldots$ endliche Mengen mit entsprechenden Kardinalitäten $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Für nicht negative ganze Zahlen k, n bezeichnet $S_k^n(a_0, a_1, \ldots)$ die Anzahl der Worte $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})$ der Länge n, so daß

- $\mathbf{w}$ genau k Marken enthält, etwa an den Positionen $0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_{k-1} < n$ und

– für die weiteren Einträge von $\mathbf{w}$ gilt:

$$\{w_i | 0 \le i < i_0\} \subseteq A_0$$
$$\{w_i | i_{k-1} < i < n\} \subseteq A_k$$
$$\{w_i | i_j < i < i_{j+1}\} \subseteq A_{j+1} \text{ für } j = 0, 1, \ldots, k-2.$$

Nach Definition der $S_k^n(\mathrm{a})$ erhält man unmittelbar

$$S_k^n(a_0, a_1, \ldots) = \sum_{0 \le i_0 < i_1 < \cdots < i_{k-1} < n} a_0^{i_0} \cdot a_1^{i_1 - i_0 - 1} \cdot \ldots \cdot a_k^{n - i_{k-1} - 1}.$$

BEISPIELE:

$S_k^n(1,1,1,\ldots) = \binom{n}{k}$	Binomialkoeffizienten
$S_k^n(1,q,q^2,\ldots) = \binom{n}{k}_q$	Gausskoeffizienten
$S_k^n(q,q^2,q^3,\ldots) = q^{n-k} \cdot \binom{n}{k}_q$	affine Gausskoeffizienten
$S_k^n(1,2,3,\ldots) = S_{k+1}^n$	Stirlingzahlen zweiter Art
$S_k^n(\|A\|,\|A\|+1,\|A\|+2,\ldots) = GR(\|A\|,k,n)$	Graham–Rothschild Zahlen

THEOREM 4: Sei $\mathrm{a} = (a_0, a_1, \ldots)$ eine Folge paarweise verschiedener positiver ganzer Zahlen. Für positive ganze Zahlen t und ganze Zahlen $0 \le \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_t$ gilt dann

$$det \begin{pmatrix} S_0^{\mu_0}(\mathrm{a}) & S_1^{\mu_0}(\mathrm{a}) & \ldots & S_t^{\mu_0}(\mathrm{a}) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ S_0^{\mu_t}(\mathrm{a}) & S_1^{\mu_t}(\mathrm{a}) & \ldots & S_t^{\mu_t}(\mathrm{a}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

■

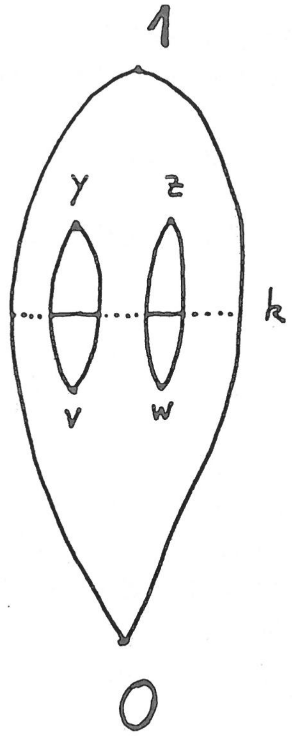
Dieses Resultat zeigt, daß Theorem 3 neben Potenzmengenverbänden $\mathcal{P}(n)$ anwendbar ist auf lineare Verbände $\mathcal{L}(n,q)$, affine Verbände $\mathcal{A}(n,q)$, Partitionsverbände $\Pi(n)$ und Graham–Rothschild Verbände $\mathcal{GR}(A,n)$.

Es sollen nun uniforme Familien $\mathcal{F} \subseteq X$, d.h. $rg(F) = rg(F^*)$ für alle $F, F^* \in \mathcal{F}$, mit vorgegebenen Schnitteigenschaften behandelt werden.

DEFINITION: Ein Verband $(X, \wedge, \vee)$ ist *vollständig homogen* genau, wenn

- $(X, \wedge, \vee)$ homogen ist und
- für jede nicht negative ganze Zahl k und alle $v, w, y, z \in X$ mit $v \le y, w \le z$ und $rg(v) = rg(w), rg(y) = rg(z)$ gilt:

$$|\{x \in \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}_X | v \le x \le y\}| = |\{x \in \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}_X | w \le x \le z\}|.$$



THEOREM 5: Sei $(X, \wedge, \vee)$ ein vollständig homogener Verband, der für eine nicht negative ganze Zahl $t < rg(1)$ die t-Vandermonde Eigenschaft hat. Seien $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{t-1}$ paarweise verschiedene nicht negative ganze Zahlen.
Sei $\mathcal{F} \subseteq X$ eine uniforme Familie, i.e. $\mathcal{F} \subseteq \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}_X$ für ein $k \leq rg(1)$, so daß für alle $F, F^* \in \mathcal{F}$ mit $F \neq F^*$ ein $i < t$ existiert mit $rg(F \wedge F^*) = \mu_i$. Dann gilt

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{rg(1)}{t}_X.$$

■

Dieses Resultat wurde für Potenzmengenverbände $\mathcal{P}(n)$ von Ray-Chaudhuri und Wilson [1975] und für lineare Verbände $\mathcal{L}(n, q)$ von Frankl und Graham [1985] bewiesen. Nach Theorem 4 ist es ebenso für den Verband $\mathcal{A}(n, q)$ der affinen Unterräume anwendbar.
Für Potenzmengenverbände gaben Frankl und Wilson die folgende Verallgemeinerung von Theorem 5 an:

THEOREM 6 [FRANKL, WILSON 1981]: Sei p eine Primzahl und seien $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{t-1} \in \mathbb{Z}_p$ Reste modulo p. Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(n)$ eine uniforme Familie von Mengen, so daß gilt:
- Für jede Menge $F \in \mathcal{F}$ und jede nicht negative ganze Zahl $j < t$ ist $|F| \not\equiv \mu_j \mod p$, und
- Für alle $F, F^* \in \mathcal{F}$ mit $F \neq F^*$ existiert eine nicht negative ganze Zahl $i < t$ mit $|F \cap F^*| \equiv \mu_i \mod p$.

Dann ist

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{t}.$$

■

Dieses Resultat liefert eine interessante Anwendung in der Ramseytheorie. Die Ramseyzahl $r(k)$ ist die kleinste positive ganze Zahl n, so daß jeder Graph auf n Punkten einen vollständigen Subgraphen auf k Punkten oder einen leeren Subgraphen auf k Punkten enthält.

Die Zahl $r(k)$ existiert nach dem Theorem von Ramsey und als Schranken sind bekannt

$$c \cdot k \cdot 2^{\frac{k}{2}} \leq r(k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \sim c^* \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot 4^k$$

Diese Resultate gehen auf Erdös [1947] und Szekeres [1935] zurück. Abgesehen von Konstanten gelang es, nur die obere Schranke für $r(k)$ auf $k^{-\frac{1}{2}+c'/\log k} \cdot \binom{2k-2}{k-1}$ zu verbessern (Rödl [1986], Thomason [1987]). Das genaue Wachstum von $r(k)$ ist jedoch bis heute nicht bekannt. Erdös zeigte die untere Schranke für $r(k)$ mit probabilistischen Methoden und in der Folge bestand großes Interesse an konstruktiven guten unteren Schranken. Frankl und Wilson [1981] gaben eine derartige superpolynomielle Schranke an:

Seien p, n positive ganze Zahlen, wobei p eine Primzahl ist. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit
- Punktmenge $V = \left[{1 \atop p^2-1}\right]_{\mathcal{P}(n)}$ und
- Kantenmenge $E = \{\{v, v^*\} \in [V]^2 \mid |v \cap v^*| \equiv -1 \mod p\}$.

Mit Theorem 6 folgt, daß G weder einen leeren noch einen vollständigen Subgraphen auf $\binom{n}{p-1}$ Punkten enthält. Für $n = p^3$ ergibt sich nun

$$r(k) \geq exp\left((1 + o(1)) \cdot \frac{log^2 k}{log\, log k}\right)$$

und damit eine superpolynomielle untere Schranke für $r(k)$.

Literatur:

P. Erdös
1947 Some remarks on the theory of graphs, Bull. AMS 53, 247–249.

P. Erdös und G. Szekeres
1935 A combinatorial problem in geometry, Comp. Math. 2, 464–470.

P. Frankl und R.L. Graham
1985 Intersection theorems for vector spaces, Europ. J. Comb. 6, 183–187.

P. Frankl und R.M. Wilson
1981 Intersection theorems with geometric consequences, Combinatorica 1, 357–368.

D.K. Ray-Chaudhuri und R.M. Wilson
1975 On t-designs, Osaka J. Math. 12, 737–744.

V. Rödl
1986 Upper bounds on Ramsey number $R(k,l)$, manuscript.

A. Thomason
1987 An upper bound for some Ramsey numbers, preprint.

B. Voigt
1984 A common generalization of binomial coefficients, Stirling numbers and Gaussian coefficients, Supplemento ai rendiconti del circolo mathematico di Palermo, Ser. II, 3, 339–359.

Adresse:
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 8640
D-4800 Bielefeld
Deutschland