Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1990, 413/S–21
Actes 21[e] Séminaire Lotharingien, p. 60–66

Le dénombrement de structures asymétriques*

Gilbert LABELLE, UQAM

8 juin 1989

RÉSUMÉ — Nous introduisons une série indicatrice d'asymétrie $\Gamma_F = \Gamma_F(x_1, x_2, \ldots)$ permettant de dénombrer les structures asymétriques appartenant à une espèce F arbitraire. Tout comme la série indicatrice des cycles Z_F, la série Γ_F commute aux opérations de somme "+", de produit ".", de substitution "o" et de dérivation "′". Cependant, Γ_F est indépendante de Z_F.

ABSTRACT — We introduce an asymmetry indicatrix series $\Gamma_F = \Gamma_F(x_1, x_2, \ldots)$ enabling one to enumerate the asymmetric structures belonging to an arbitrary species F. As for the cycle indicatrix series Z_F, the series Γ_F commutes with the operations of sum "+", product ".", substitution "o", and derivation "′". However, Γ_F is independent of Z_F.

1 Introduction.

Le but du présent travail est de classifier et dénombrer les structures discrètes asymétriques, c'est-à-dire, les structures combinatoires dont le groupe d'automorphismes est réduit à la permutation identité de l'ensemble sous-jacent. Utilisons le langage de la théorie des espèces de structures [2] (voir aussi [9]) et posons la définition générale suivante

DÉFINITION 1 Soit F une espèce de structures et soit s une F–structure sur un ensemble fini U (i.e. $s \in F[U]$). On dit que s est ***asymétrique*** ssi $\mathrm{stab}(s) = \{\mathrm{id}_U\}$. En d'autres termes:

$$\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_U: F[\sigma](s) = s \Rightarrow \sigma = \mathrm{id}_U$$

où $F[\sigma]: F[U] \to F[U]$ désigne le morphisme de transport des F–structures sur U, le long de la permutation σ

La totalité des F–structures asymétriques constitue une sous-espèces $\overline{F}$ de F.

*Le présent travail constitue une version condensée sans démonstration de mon exposé au 21[e] Séminaire Lotharingien de Combinatoire (Thurnau, 1989). Un texte plus complet, incluant en outre tous les détails des démonstrations ainsi que des exemples supplémentaires paraîtra ailleurs [8].

DÉFINITION 2 a) Soit F une espèce de structures. La *partie plate* de F est la sous-espèce $\overline{F} \subseteq F$ définie, pour tout ensemble fini U, par

$$\overline{F}[U] = \{s \in F[U] \mid s \text{ est asymétrique}\}$$

et dont tous les transports $\overline{F}[\sigma]: \overline{F}[U] \to \overline{F}[V]$ sont donnés par les restrictions des transports $F[\sigma]: F[U] \to F[V]$ (où $\sigma: U \to V$ est une bijection arbitraire entre ensembles finis).

b) On dit que l'espèce F est *plate* ssi $\overline{F} = F$.

Désignons respectivement par X, E, L, C et S l'espèce des singletons, des ensembles, des ordres linéaires, des cycles orientés et des permutations. On vérifie facilement que

$$\overline{X} = X, \quad \overline{E} = 1 + X, \quad \overline{L} = L, \quad \overline{C} = X, \quad \overline{S} = 1 + X$$

où $1 = X^0$ est l'espèce de l'ensemble vide (i.e. $1[U] = \{U\}$ si $U = \emptyset$ et $1[U] = \emptyset$ si $U \neq \emptyset$). En particulier, les espèces X et L sont plates.

Un exemple plus élaboré est fourni par l'espèce $A = X \cdot E(A)$ des arborescences. En dressant la liste des types d'isomorphie des arborescences sur $n \leq 5$ points on obtient les premiers termes de la décomposition atomique de cette espèces [7] (voir aussi [6]):

$$\begin{aligned} A = {} & X + X^2 + (X^3 + XE_2) + (2X^4 + X^2E_2 + XE_3) \\ & + (3X^5 + 3X^3E_2 + X^2E_3 + X \cdot (E_2 \circ X^2) + XE_4) + \cdots \end{aligned}$$

où E_k est l'espèce des ensembles de cardinalité k. Cette décomposition atomique peut aussi s'obtenir par des procédés combinatoires itératifs [5]. Un examen détaillé montre que la décomposition atomique de la sous-espèce $\overline{A} \subseteq A$ est donnée par la série

$$\overline{A} = X + X^2 + X^3 + 2X^4 + 3X^5 + \cdots \in \mathbb{N}[[X]].$$

En fait Harary et Prins [1] ont montré que

$$\overline{A} = \overline{A}(X) = \sum_{n \geq 1} a_n X^n = X \cdot \prod_{k \geq 1} (1 + X^k)^{a_k}$$

ce qui permet de calculer récursivement les coefficients $a_n \in \mathbb{N}$

Plus généralement, nous nous proposons de calculer $\overline{F}$ lorsque l'espèce F est donnée implicitement par une équation combinatoire, ou encore sous la forme d'une décomposition atomique [11] (voir aussi [6] et [10])

$$\begin{aligned} F = {} & a + bX + cX^2 + dE_2 + eX^3 + fXE_2 + \cdots \\ & \in \mathbb{N}[[X, E_2, E_3, C_3, E_4, E_4^{\pm}, E_2 \circ E_2, \ldots]] = \mathbb{N}(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

où $\mathcal{A}$ est la liste dénombrable de toutes les espèces atomiques.

2 Série indicatrice d'asymétrie.

La principale difficulté dans le calcul de $\overline{F}$ pour une espèce arbitraire F provient du fait que l'opération $F \mapsto \overline{F}$ ne commute pas aux opérations combinatoires usuelles de la théorie des espèces (sauf la somme et le produit).

THÉORÈME 3 *L'opération $F \mapsto \overline{F}$ définit un homomorphisme surjectif (projection)*

$$\mathbb{N}[[\mathcal{A}]] \twoheadrightarrow \mathbb{N}[[X]]$$

donné par $\overline{F}$ = somme des termes de la forme $f_n X^n$ dans la décomposition atomique de F. Les égalités et inclusions combinatoires suivantes sont satisfaites

(i) $\overline{F+G} = \overline{F} + \overline{G}, \quad \overline{F \cdot G} = \overline{F} \cdot \overline{G}, \quad \overline{\overline{F}} = \overline{F}.$

(ii) $\overline{G \circ F} = \overline{G \circ \overline{F}} \supseteq \overline{F} \circ \overline{G}.$

(iii) $\overline{F'} \supseteq \overline{F}'.$

Ces inclusions sont strictes en général.

Pour vérifier que les inégalités (ii) et (iii) sont strictes en général, il suffit de prendre les cas particuliers

$$G = E_2,\ F = X + X^2 \text{ pour (ii);} \qquad F = E_2 \text{ pour (iii).}$$

Afin de pallier à la difficulté liée à la non-commutation de $F \mapsto \overline{F}$ devant les opérations combinatoires "$\circ$" et "$'$", nous introduisons un nouvel outil: la série indicatrice d'asymétrie $\Gamma_F = \Gamma_F(x_1, x_2, \ldots)$ d'une espèce F. Cette série à une infinité de variables joue dans le contexte des structures asymétriques, un rôle analogue à celui que la série indicatrice des cycles $Z_F = Z_F(x_1, x_2, \ldots)$ joue dans le contexte du dénombrement des types d'isomorphie de structures (théorie de Pólya). Avant de définir la série Γ_F remarquons d'abord que l'opération $F \mapsto \overline{F}$ peut être définie dans le contexte des espèces "multisortes" $F = F(T_1, T_2, \ldots)$ définies sur des ensembles comportant plusieurs sortes T_1, T_2, ... de points. Les transports de structures doivent préserver les sortes [2]. On vérifie que

$\overline{F}$ = la somme des monômes de la forme $c_{n_1,n_2,\ldots} T_1^{n_1} T_2^{n_2} \cdots$ dans la décomposition atomique multisorte de F.

DÉFINITION 4 Soit $F = F(X)$ une espèce (unisorte) et soit T_1, T_2, ... une suite dénombrable de sortes de singletons. La *série indicatrice d'asymétrie* de F est l'unique série

$$\Gamma_F = \Gamma_F(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, \ldots]]$$

définie par la relation

$$\overline{F(T_1 + T_2 + \cdots)} = \Gamma_F(T_1 + T_2 + \cdots, T_1^2 + T_2^2 + \cdots, \ldots).$$

En d'autres termes, Γ_F exprime la fonction symétrique $\overline{F(T_1 + T_2 + \cdots)}$ dans la base des sommes de puissances $p_n(T_1, T_2, \ldots) = T_1^n + T_2^n + \cdots$, $n \geq 1$.

La proposition suivante résume les propriétés fondamentales satisfaites par les séries Γ_F.

PROPOSITION 5 *Soient $G = G(X)$ et $F = F(X)$ deux espèces de structures, $F(0) = 0$. La partie plate $\overline{G \circ F}$ de l'espèce $G \circ F$ est donnée par la formule*

$$\overline{G \circ F} = \Gamma_G(\overline{F}(X), \overline{F}(X^2), \overline{F}(X^3), \ldots),$$

le membre de droite étant interprété en tant que $\mathbb{Q}$-espèce (i.e. $\mathbb{Q}$-combinaison linéaire d'espèces). De plus, l'opération $F \mapsto \Gamma_F$ commute aux opérations combinatoires "$+$", "$\cdot$", "$\circ$" et "$'$":

$$\Gamma_{F+G} = \Gamma_F + \Gamma_G, \quad \Gamma_{F \cdot G} = \Gamma_F \cdot \Gamma_G, \quad \Gamma_{G \circ F} = \Gamma_G \circ \Gamma_F, \quad \Gamma_{F'} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Gamma_F$$

où $\Gamma_G \circ \Gamma_F$ désigne la substitution pléthystique de la série Γ_F dans la série Γ_G.

Avant de passer aux applications, il est intéressant de noter que la série Γ_F *est indépendante* de la série indicatrice des cycles Z_F au sens suivant:

$$\Gamma_F \textit{ n'est pas fonction de } Z_F \textit{ seulement.}$$

En effet, prenons les deux espèces non-isomorphes

$$F = 2E_3 + X^3 \quad \text{et} \quad G = 2X \cdot E_2 + C_3.$$

On vérifie que $Z_F = Z_G$ tandis que $\Gamma_F \neq \Gamma_G$.

3 Quelques applications.

3.1 À partir de la définition de Γ_F il est possible de démontrer que pour les espèces X, E, L, C et S mentionnées plus haut on a les formules explicites

$$\Gamma_X = x_1, \qquad \Gamma_E = \exp(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x_n + \cdots),$$
$$\Gamma_L = \frac{1}{1-x_1}, \quad \Gamma_C = \sum_{n\geq 1} \frac{\mu(n)}{n} \log \frac{1}{1-x_n}, \quad \Gamma_S = \frac{1-x_2}{1-x_1}.$$

3.2 En invoquant la proposition 5 ainsi que l'inversion de Möbius, on en déduit les résultats suivants concernant la partie plate de diverses sortes d'assemblées de structures (ainsi que des espèces décrivant les membres de ces assemblées):

a) Assemblées asymétriques:

$$G = E \circ F \Rightarrow \begin{cases} \overline{G}(X) = \exp(\overline{F}(X) - \frac{1}{2}\overline{F}(X^2) + \frac{1}{3}\overline{F}(X^3) - \cdots) \\ \overline{F}(X) = \Lambda(X) + \Lambda(X^2) + \Lambda(X^4) + \cdots \\ \quad \text{où } \Lambda(X) = \sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log \overline{G}(X^k) \end{cases}$$

b) Assemblées circulaires asymétriques:

$$G = C \circ F \Rightarrow \begin{cases} \overline{G}(X) = \sum_{k\geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log \frac{1}{1-\overline{F}(X^k)} \\ \overline{F}(X) = 1 - \exp\left(-\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\overline{G}(X^k)\right) \end{cases}$$

c) Assemblées permutées asymétriques:

$$G = S \circ F \Rightarrow \begin{cases} \overline{G}(X) = \frac{1-\overline{F}(X^2)}{1-\overline{F}(X)} \\ \overline{F}(X) = 1 - \frac{1}{\overline{G}(X)\overline{G}(X^2)\overline{G}(X^4)\cdots} \end{cases}$$

Il est intéressant de noter la grande simplicité des deux dernières égalités. Comme exemple d'application considérons les espèces End (des endofonctions) et A (des arborescences). Puisque $End = S \circ A$, on en tire immédiatement les relations remarquables suivantes entre les parties plates $\overline{End}$ et $\overline{A}$:

$$\overline{End} = \frac{1-\overline{A}(X^2)}{1-\overline{A}(X)} \quad \text{et} \quad \overline{G}(X) = 1 - \frac{1}{\overline{End}(X)\overline{End}(X^2)\overline{End}(X^4)\cdots}$$

3.3 La proposition 5 peut aussi être utilisée pour déterminer explicitement Γ_{A_R} et $\Gamma_{\mathcal{A}_R}$ pour les espèces A_R et $\mathcal{A}_R$ des arborescences et des arbres R–enrichis au sens de [4]. Il suffit pour celà d'appliquer l'opérateur Γ aux deux membres des égalités combinatoires suivantes et d'invoquer, de façon analogue à [5], l'inversion ∞–dimensionnelle de Good:

$$A_R = X \cdot R(A_R) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_R = X \cdot R(A_{R'}) + E_2(A_{R'}) - A_{R'}^2.$$

La deuxième de ces formules constitue une extension au cas R enrichi, d'une formule analogue $\mathcal{A} = A + E_2(A) - A^2$ due à P. Leroux [12] qui relie les espèces A et $\mathcal{A}$ des arborescences et arbres ordinaires (i.e. E–enrichis).

3.4 Dans le cas des espèces moléculaires [10,11] $M = X^n/H$, $H \leq \mathfrak{S}_n$, n fixé, on peut montrer que Γ_M est le polynôme en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obtenu comme suit

$$\overline{M(T_1 + T_2 + \cdots)} = \Gamma_M(T_1 + T_2 + \cdots, T_1^2 + T_2^2 + \cdots, \ldots, T_1^n + T_2^n + \cdots)$$

où la fonction symétrique $\overline{M(T_1 + T_2 + \cdots)}$ est donnée explicitement, en fonction des sous-groupes $H \leq \mathfrak{S}_n$, par la formule

$$\overline{M(T_1 + T_2 + \cdots)} = \sum_{n_1+n_2+\cdots=n} c_{n_1,n_2,\ldots}(H) T_1^{n_1} T_2^{n_2} \cdots$$

où

$$c_{n_1,n_2,\ldots}(H) = \#\{\tau \underline{\in} \mathfrak{S}_{n_1,n_2,\ldots} \backslash \mathfrak{S}_n / H \mid (\tau H \tau^{-1}) \cap \mathfrak{S}_{n_1,n_2,\ldots} = \{\mathrm{id}\}\}.$$

La notation $\tau \underline{\in} K\backslash G/H$ signifiant que τ parcourt un système de représentants des classes bilatérales $K\tau H$ de G. Ce dernier résultat peut être obtenu directement en travaillant à l'intérieur de la théorie des espèces ou encore, en adaptant au présent contexte certains théorèmes généraux concernant des actions de groupes (voir, par exemple A. Kerber [3]).

3.5 Le tableau suivant, obtenu avec la collaboration de J. Labelle, donne le polynôme Γ_A pour toutes les espèces atomiques A vivant sur les cardinalités $n \leq 4$. La notation utilisée pour les espèces atomiques est celle de [10] et [11].

POLYNÔME INDICATEUR D'ASYMÉTRIE
des espèces atomiques portées par $n \leq 4$ points

	A	$\Gamma(x_1, x_2, x_3, \ldots)$
$n = 1$	X	x_1
$n = 2$	E_2	$\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2$
$n = 3$	E_3	$\frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{3}x_3$
$n = 3$	C_3	$\frac{1}{3}x_1^3 - \frac{1}{3}x_3$
$n = 4$	E_4	$\frac{1}{24}x_1^4 - \frac{1}{4}x_1^2x_2 + \frac{1}{3}x_1x_3 + \frac{1}{8}x_2^2 - \frac{1}{4}x_4$
$n = 4$	$E_4^{\pm}$	$\frac{1}{12}x_1^4 - \frac{1}{3}x_1x_3 - \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}x_4$
$n = 4$	$E_2 \circ E_2$	$\frac{1}{8}x_1^4 - \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{1}{8}x_2^2 + \frac{1}{4}x_4$
$n = 4$	P_4^{bic}	$\frac{1}{4}x_1^4 - \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}x_4$
$n = 4$	C_4	$\frac{1}{4}x_1^4 - \frac{1}{4}x_2^2$
$n = 4$	$E_2 \circ X^2$	$\frac{1}{2}x_1^4 - \frac{1}{2}x_2^2$

Bibliographie

[1] HARARY (Frank) et PRINS (Geert).— The number of homeomorphically irreductible trees and other species, *Acta Mathematica* vol. **101**, (1959), 141–162.

[2] JOYAL (André).— Une théorie combinatoire des séries formelles, *Adv. in Math.* vol. **42**, (1981), 1–82.

[3] KERBER (Adalbert).— Enumeration under finite group action: symmetry classes of mapping, in "Combinatoire Énumérative, Proc., Montréal, Québec, 1985" (G. Labelle et P. Leroux, Éd.), *Lect. Notes in Math.*, vol. **1234**, Springer-Verlag, (1986), 160–176.

[4] LABELLE (Gilbert).— Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange, *Adv. in Math.* vol. **42**, (1981), 217–247.

[5] LABELLE (Gilbert).— Some new computational methods in the theory of species, in "Combinatoire Énumérative, Proc., Montréal, Québec, 1985" (G. Labelle et P. Leroux, Éd.), *Lect. Notes in Math.*, vol. **1234**, Springer-Verlag, (1986), 192–209.

[6] LABELLE (Gilbert).— On the generalized iterates of Yeh's combinatorial $\mathbb{K}$-species, *J. Comb. Theor. Ser. A*, vol. **50**, no. 2, (1989), 235–258.

[7] LABELLE (Gilbert).— Dérivées directionnelles et développements de Taylor combinatoires, *Discr. Math.*, (à paraître).

[8] LABELLE (Gilbert).— On asymmetric structures, (à paraître).

[9] LABELLE (Jacques).— Applications diverses de la thérie combinatoire des espèces de structures, *Ann. Sci. Math. Québec* vol. **7** no. 1, (1983), 59–94.

[10] LABELLE (Jacques).— Quelques espèces sur des ensembles de petite cardinalité, *Ann. Sci. Math. Québec* vol. **9** no. 1, (1985), 31–58.

[11] LABELLE (Jacques) et YEH (Yeong-Nan).— The Relation between Burnside Rings and Combinatorial Species, *J. Comb. Theor. Ser. A*, vol. **50**, no. 2, (1989), 269–284.

[12] LEROUX (Pierre). — Methoden der Anzahlbesttimmung für einige Klassen von Graphen, *Bayreuther Math. Schriften*, Heft **26**, (1988), 1–36.

Address:
Département de Mathématiques
Université du Québec á Montréal
Case Postale 8888, Succ. "A"
Montréal P.Q. H3C 3P8
Canada