Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1990, 413/S–21
Actes 21^e Séminaire Lotharingien, p. 55–59

Über freie partiell kommutative Monoide

Roman König

Eine vollständige und wesentlich erweiterte Version dieser Arbeit erscheint demnächst unter dem Titel "Graphs and free partially commutative monoids" in "Theoretical Computer Science". Daher beschränken wir uns hier auf die wesentlichen Aussagen, ohne die zugehörigen Beweise zu wiederholen.

Es sei A eine endliche Menge und $\theta \subseteq \binom{A}{2}$ eine Teilmenge der Menge aller zweielementigen Teilmengen von A. Das Paar $G = (A, \theta)$ heißt ein Graph und definiert das Monoid $M(G) = A^*/\{ab = ba \mid \{a, b\} \in \theta\}$, wobei A^* das freie Monoid über der Menge A ist. $M(G)$ heißt das durch G definierte *freie partiell kommutative Monoid.*

Auf der Menge aller Graphen definieren wir die folgenden Operationen: Für $G = (A, \theta)$ und $H = (B, \phi)$ sei

- $\overline{G} = (A, \binom{A}{2} - \theta)$ das *(Kanten-) Komplement* von G,
- $G \oplus H = (A + B, \theta + \phi)$ die *Summe* von G und H, wobei "+" für Mengen die disjunkte Vereinigung bedeutet,
- $G \otimes H = \overline{\overline{G} \oplus \overline{H}}$ das *Produkt* von G und H.

$\oplus$ und $\otimes$ sind kommutative und assoziative Operationen und es gilt

$$G \otimes H = (A + B, \theta + \phi + \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B\}).$$

Dann gilt für die entsprechenden freien partiell kommutativen Monoide

$$M(G \oplus H) = M(G) * M(H) \qquad \text{(freies Produkt)} \tag{1}$$

und

$$M(G \otimes H) = M(G) \times M(H) \qquad \text{(direktes Produkt).} \tag{2}$$

Die Menge $\mathcal{G}$ aller endlichen Graphen ist mit den Operationen $\oplus$ und $\otimes$ eine algebraische Struktur, wobei der leere Graph $\Phi = (\emptyset, \emptyset)$ für beide Operationen ein neutrales Element ist. Ein Graph G heißt *unzerlegbar*, wenn sowohl er selbst, als auch sein Komplement zusammenhängend ist. Dann ist $\mathcal{G}$ die freie $(\oplus, \otimes)$–Algebra, erzeugt von der Menge aller unzerlegbaren Graphen. Auf Grund der Gleichungen (1) und (2) genügt es, die algebraischen Eigenschaften derjenigen freien partiell kommutativen Monoide zu untersuchen, deren zugrundeliegender Graph unzerlegbar ist.

Ein Graph $H = (B, \phi)$ heißt ein *Untergraph* des Graphen $G = (A, \theta)$, wenn $B \subseteq A$ und $\phi \subseteq \theta$. Ein Untergraph von G der Form $(C, \binom{C}{2})$ heißt eine *Clique* von G. Die Clique C heißt maximal, wenn C in keiner von C verschiedenen Clique von G enthalten ist. Jeder Graph ist eindeutig charakterisiert durch Angabe des Systems seiner maximalen Cliquen. Cliquen des komplementären Graphen $\overline{G}$ heißen auch *Anticliquen* von G. Entsprechend ist jeder Graph auch charakterisierbar durch das System seiner maximalen Anticliquen. Offenbar wird durch jede Clique C das freie kommutative Monoid $C^{\oplus}$ über C definiert, während durch eine Anticlique L das freie Monoid L^* über L definiert wird: $M(C) = C^{\oplus}$ und $M(L) = L^*$.

Das System $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ aller maximalen Cliquen des Graphen G charakterisiert auch $M(G)$: Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $C_{ij} = C_i \cap C_j$. Dann ist $M(G)$ isomorph zum freien Produkt der Monoide $C_k^{\oplus}$, $(k = 1, \ldots, n)$, amalgamiert nach den Monoiden $C_{ij}^{\oplus}$, $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$.

Eine entsprechende Aussage gilt auch für das System $\{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ aller maximalen Anticliquen von $G = (A, \theta)$: $M(G)$ ist ein subdirektes Produkt der Monoide $L_1, L_2, \ldots, L_m$, und zwar das Untermonoid von $L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_m$, das erzeugt wird von den m-tupeln $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ mit $a \in A$, wobei für $k = 1, \ldots, m$

$$a_k = \begin{cases} a \;, falls\ a \in L_k \\ 1 \;, falls\ a \notin L_k \end{cases}$$

Der natürliche Morphismus von A^* auf $M(G)$ ist die homomorphe Fortsetzung der Zuordnung $a \mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Diese Darstellung der Elemente von $M(G)$ ist geeignet, um Repräsentantensysteme für $M(G)$ zu finden. Beispielsweise können FOATA's Normalform (siehe [1]) und die lexicographische Normalform (siehe [3]) auf einfache Weise aus dem entsprechenden k-tupel konstruiert werden. Eine weitere, die sog. LR-Normalform erhält man, wenn man die Vorgehensweise bei der Konstruktion der lexicographischen Normalform so abändert, daß man stets den am weitesten links stehenden Buchstaben betrachtet.

In [1] wurde gezeigt, wie sich die MÖBIUS-Funktion $\mu(G)$ von $M(G)$ berechnet:

$$\mu(G) = \sum (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n,$$

wobei die Summe über alle Cliquen $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ von G läuft. Insbesondere ist $\mu(G)$ ein Polynom in $\mathbb{Z}\langle\langle M(G)\rangle\rangle$. Den Operationen $\oplus$ und $\otimes$ entsprechen auf der Ebene der MÖBIUS-Funktion die besonders einfachen Operationen

$$\mu(G \oplus H) = \mu(G) + \mu(H) - 1$$

und

$$\mu(G \otimes H) = \mu(G) \cdot \mu(H).$$

Man kann sich daher wieder auf den Fall der unzerlegbaren Graphen beschränken.

Nun läßt sich die Äquivalenz der folgenden Aussagen beweisen:

1. $\mu(G)$ ist irreduzibel

2. $M(G)$ ist direkt irreduzibel

3. $\overline{G}$ ist zusammenhängend.

Dabei spielt es keine Rolle, ob die Irreduzibilität von $\mu(G)$ in $\mathbb{Z}\langle\langle A^*\rangle\rangle$, $\mathbb{Z}\langle\langle M(G)\rangle\rangle$ oder $\mathbb{Z}\langle\langle A^{\oplus}\rangle\rangle$ gefordert wird. $M(G)$ heißt direkt irreduzibel, wenn $M(G)$ nur als triviales direktes Produkt dargestellt werden kann.

Es sei $G = (A, \theta)$ ein beliebiger Graph. Eine partielle Ordnung $\leq$ auf A heißt eine *Ordnung auf dem Graphen G*, wenn jede Clique von G eine Kette in der partiellen Ordnug $(A, \leq)$ ist. Die partielle Ordnung heißt *perfekt*, wenn jede Clique eine Kette und jede Anticlique eine Antikette ist. Offenbar hat jeder Graph eine Ordnung (z.B. jede totale Ordnung auf A), aber nicht jeder Graph hat eine perfekte Ordnung (z.B. hat kein ungerader Zyklus mit mindestens fünf Punkten eine perfekte Ordnung). Es läßt sich leicht zeigen, daß die Graphen mit perfekter Ordnung genau die transitiv orientierbaren Graphen (siehe [4]) sind.

Die MÖBIUS-Funktion ist die Inverse in $\mathbb{Z}\langle\langle M(G)\rangle\rangle$ zur charakteristischen Funktion $\zeta(G) = \sum_{m \in M(G)} m$ von $M(G)$. Nun sei N ein von A erzeugtes Monoid mit einem surjektiven Morphismus von N auf $M(G)$ und T ein Repräsentantensystem für $M(G)$ in N. Wir fassen T als Abbildung auf, die jedem Element von $M(G)$ seinen Repräsentanten in N zuordnet. Die lineare Fortsetzung dieser Abbildung auf $\mathbf{Z}\langle\langle M(G)\rangle\rangle$ ordnet jedem $f \in \mathbf{Z}\langle\langle M(G)\rangle\rangle$ einen Repräsentanten $T(f) \in \mathbf{Z}\langle\langle N\rangle\rangle$ zu. Dann gilt offenbar $\mu(G) \cdot T(\zeta(G)) = 1$ in $\mathbf{Z}\langle\langle M(G)\rangle\rangle$.

Wir sagen, $\mu(G)$ besitze ein *Lifting* nach N, wenn es ein Repräsentantensystem T gibt, so daß die Inverse $(T(\mu(G)))^{-1}$ von $T(\mu(G))$ in $\mathbf{Z}\langle\langle N\rangle\rangle$ eine charakteristische Funktion ist. Dann ist insbesondere der Träger dieser Funktion ein Repräsentantensystem von $M(G)$ in N. DIEKERT [2] hat gezeigt, daß $\mu(G)$ genau dann ein Lifting nach A^* hat, wenn der Graph G eine perfekte Ordnung besitzt. Mit Hilfe einer geeigneten Involution auf der Menge aller Faktorisierungen eines beliebigen $m \in M(G)$ kann man nun das allgemeinere Resultat zeigen:

Es sei $G = (A, \theta)$ ein geordneter Graph und $\phi = \{\{a,b\},\{b,c\} \mid a < b < c \text{ und } \{a,c\} \notin \theta\}$. Dann gilt für den Graphen $H = (A, \phi)$:

1. $\mu(G)$ besitzt ein Lifting nach $M(H)$.
2. Wenn $\mu(G)$ ein Lifting nach N besitzt, dann ist N ein homomorphes Bild von $M(H)$.

Für den Fall, daß die Ordnung perfekt ist, erhält man $\phi = \emptyset$ und DIEKERTs Resultat folgt.

Literatur

[1] P. Cartier, D. Foata: Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements. Lect. Notes in Math. No. 85, Springer 1969

[2] V. Diekert: Transitive Orientations, Möbius Functions, and Complete Semi-Thue Systems for Free Partially Commutative Monoids. Actes du Sém. Lotharingien de Combinatoire, Session 19, (V. Strehl ed.), 1988, pp. 116 – 117.

[3] C. Duboc: Commutations dans les monoïdes libres: Un cadre théorique pour l'étude du parallélisme. Thèse, LITP, Paris 1986

[4] M. C. Golumbic: Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs. Academic Press, New York, 1986

Adresse: Institut für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung (I), Martensstraße 3, D–8520 Erlangen.
e-mail koenig@informatik.uni-erlangen.de