

UN MODÈLE SYMÉTRIQUE POUR L'IDENTITÉ DE AL-SALAM-FIELDS (*)

PAR

JIANG ZENG †

RÉSUMÉ. — AL-SALAM et FIELDS ont proposé une extension symétrique de la formule classique de Pfaff-Saalschütz. Suivant la technique développée par FOATA, on propose ici un modèle combinatoire symétrique pour établir cette extension.

ABSTRACT. — AL-SALAM and FIELDS have proposed a symmetric extension of the classical Pfaff-Saalschütz formula. Following the technique developed by FOATA we give a symmetric combinatorial model to prove that extension.

Notons $(a)_n$ les factorielles montantes :

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1), \quad (n \geq 1)$$

et soit

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2 \end{matrix}; x \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1)_n (a_2)_n (a_3)_n x^n}{(b_1)_n (b_2)_n n!}$$

la série hypergéométrique avec trois paramètres au numérateur et deux au dénominateur. L'identité suivante, dans laquelle n et m sont des entiers positifs

$$(1) \quad \frac{(\gamma)_n (\gamma - \alpha - \beta)_n}{(\gamma - \alpha)_n (\gamma - \beta)_n} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, \alpha, \beta \\ \gamma + m, 1 - n - \gamma + \alpha + \beta \end{matrix}; 1 \right) \\ = \frac{(\gamma)_m (\gamma - \alpha - \beta)_m}{(\gamma - \alpha)_m (\gamma - \beta)_m} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -m, \alpha, \beta \\ \gamma + n, 1 - m - \gamma + \alpha + \beta \end{matrix}; 1 \right),$$

publiée récemment dans [Al-Fi] peut être déduite de la formule de SHEPARD [Sh] parue en 1912, en appliquant celle-ci deux fois. Notons que le cas

(*) Avec le soutien du P.R.C. mathématiques et informatique.

† Département de mathématique, Université Louis-Pasteur, 7, rue René-Descartes, F-67084 Strasbourg.

particulier $m = 2$ a été redécouvert par ANDERSEN [And, Roy] en 1953. La formule (1) se réduit évidemment à la célèbre formule de Pfaff-Saalschütz [Pf, Sa, Bai] lorsque $m = 0$:

$$(2) \quad {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, \alpha, \beta \\ \gamma, 1 - n - \gamma + \alpha + \beta \end{matrix}; 1\right) = \frac{(\gamma - \alpha)_n (\gamma - \beta)_n}{(\gamma)_n (\gamma - \alpha - \beta)_n}.$$

L'extension (1) due à AL-SALAM et FIELDS [Al-Fi] est intéressante, car elle fait apparaître une véritable symétrie à la fois en α, β et en n, m . Il est donc souhaitable de trouver un modèle combinatoire qui rende cette symétrie évidente. En fait, pour établir l'identité (1) il suffit de montrer que le premier membre de (1) est symétrique en (n, α) et (m, β) .

Comme la formule de Pfaff-Saalschütz a déjà été établie par diverses méthodes combinatoires (*cf.* [An, Ca-Fo, Fo, Ja-Ye]), il est naturel d'utiliser ces dernières techniques pour établir l'identité (1). Ceci fait l'objet de la présente note.

Il est à noter qu'il existe essentiellement deux manières de démontrer la formule (2) combinatoirement : on peut supposer que les paramètres sont entiers, comme dans [An, Ca-Fo], ce qui permet d'étendre les techniques de démonstrations au q -analogues (*cf.* [An-Br, Go, Ze]); on a alors besoin d'un argument de continuité pour établir la formule dans le cas général. On peut aussi considérer les paramètres comme de simples variables comme dans [Fo, Ja-Ye]. On obtient ainsi une démonstration réellement intrinsèque.

Signalons que ANDREWS et BRESSOUD [An-Br] ont déjà établi, d'une façon bijective, un q -analogue de l'identité de SHEPPARD, dans l'hypothèse où les paramètres sont des entiers. Enfin, JOICHI et STANTON [Jo-St] ont donné un principe général de démonstration "bijective" pour les identités classiques sur les séries hypergéométriques basiques. Ils ont insisté sur le fait que bien qu'une démonstration bijective pouvait toujours être obtenue à partir d'une preuve analytique, il était essentiel de trouver des démonstrations combinatoires originales rendant compte des symétries ou des régularités des formules étudiées.

La démonstration combinatoire de (1) proposée ici est de même nature que celle donnée par FOATA [Fo] en 1983 pour la formule (2) : d'une part, les paramètres α, β, γ sont de simples variables, et d'autre part, une fois la formule exprimée sous forme polynomiale (*cf.* (3) ci-dessous), on évalue directement une fonction génératrice de structures finies de deux façons différentes. En fait, on établit une bijection, préservant le poids, entre deux structures dont l'une possède une symétrie évidente en (n, α) et (m, β) , et l'autre a clairement pour fonction génératrice le premier membre de (3). Ce qui suffit pour établir (3).

Chassons les dénominateurs dans (1) et posons $d = \gamma - \alpha - \beta$. On est

conduit à l'identité polynomiale :

$$(3) \quad (\alpha + d)_n (\beta + d)_n \sum_k \binom{m}{k} (\alpha)_k (\beta)_k (\alpha + \beta + d + n + k)_{m-k} (d)_{m-k} \\ = (\alpha + d)_m (\beta + d)_m \sum_k \binom{n}{k} (\alpha)_k (\beta)_k (\alpha + \beta + d + m + k)_{n-k} (d)_{n-k}.$$

Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinal n et m respectivement. Rappelons d'abord que le polynôme générateur de l'ensemble des injections σ de A dans $A + B$ par le nombre de cycles, noté $\text{cyc } \sigma$, est donnée par (cf. [Fo-St])

$$(4) \quad \sum_{\sigma} a^{\text{cyc } \sigma} = (a + m)_n.$$

Une *injection tricolore* de A dans $A + B$ est définie comme étant un couple (σ, f_{σ}) , où σ est une injection de A dans $A + B$ et f_{σ} une application de l'ensemble des cycles de σ dans $\{1, 2, 3\}$. Par commodité, pour chaque cycle c de σ , on appelle $f_{\sigma}(c)$ la couleur de c . Lorsque $B = \emptyset$, le couple (σ, f_{σ}) est dit *permutation tricolore* de A . Soit $\text{cyc}_i(\sigma, f_{\sigma})$ le nombre de cycles de (σ, f_{σ}) ayant la couleur i ($i = 1, 2, 3$). Si l'on associe à (σ, f_{σ}) le poids

$$(5) \quad W((\sigma, f_{\sigma})) = \alpha^{\text{cyc}_1(\sigma, f_{\sigma})} d^{\text{cyc}_2(\sigma, f_{\sigma})} \beta^{\text{cyc}_3(\sigma, f_{\sigma})},$$

il est alors facile, d'après (4), d'établir l'identité

$$(6) \quad \sum_{(\sigma, f_{\sigma})} W((\sigma, f_{\sigma})) = (\alpha + \beta + d + m)_n,$$

où la sommation est étendue à toutes les injections tricolores de A dans $A + B$.

Considérons maintenant l'ensemble $Q[A, B; 1, 2, 3]$ de tous les couples $((\sigma, f_{\sigma}), (\tau, g_{\tau}))$ de permutations tricolores de $A + B$ ayant les propriétés suivantes :

- (i) tous les cycles de (σ, f_{σ}) (resp. (τ, g_{τ})) de couleur 1 sont entièrement contenus dans A (resp. B);
- (ii) tous les cycles de (σ, f_{σ}) (resp. (τ, g_{τ})) de couleur 3 sont entièrement contenus dans B (resp. A);
- (iii) les restrictions τ_A et τ_B de τ à A et B sont elles-mêmes deux permutations.

D'après la définition ci-dessus, chaque élément de $Q[A, B; 1, 2, 3]$ est en même temps un élément de $Q[B, A; 3, 2, 1]$ et vice versa. D'où

$$(7) \quad Q[A, B; 1, 2, 3] = Q[B, A; 3, 2, 1].$$

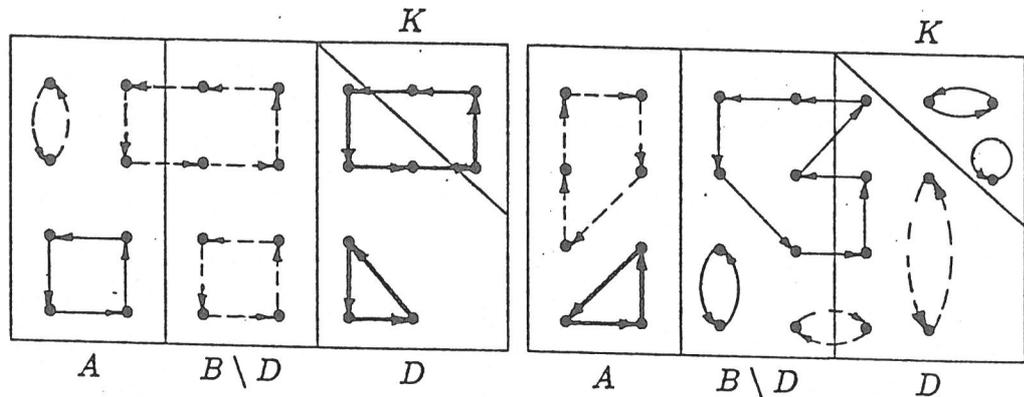


Fig. 1

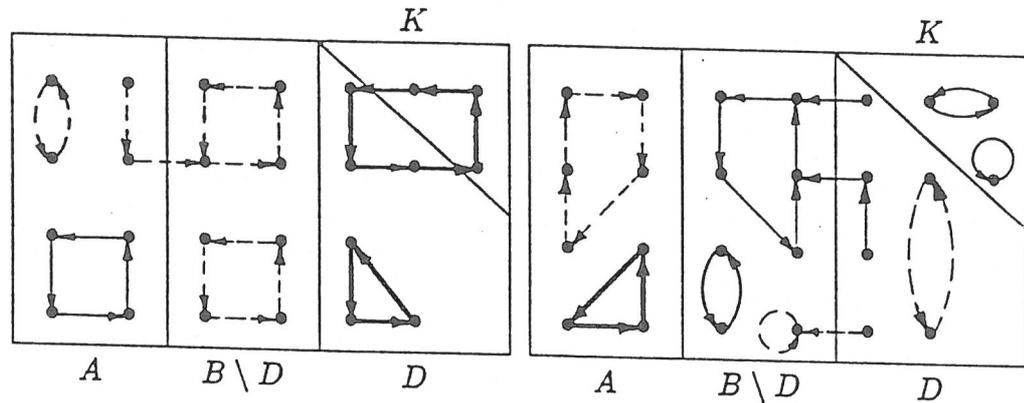


Fig. 2

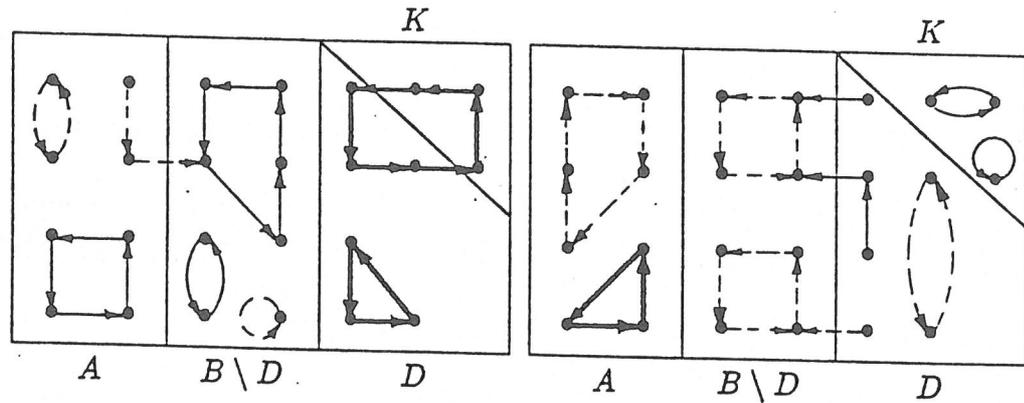


Fig. 3

De façon équivalente, si l'on munit chaque couple $((\sigma, f_\sigma), (\tau, g_\tau))$ de la fonction-poids

$$\begin{aligned}
 (8) \quad W(((\sigma, f_\sigma), (\tau, g_\tau))) &= W((\sigma, f_\sigma))W((\tau, g_\tau)) \\
 &= \alpha^{\text{cyc}_1(\sigma, f_\sigma)} d^{\text{cyc}_2(\sigma, f_\sigma)} \beta^{\text{cyc}_3(\sigma, f_\sigma)} \alpha^{\text{cyc}_1(\tau, g_\tau)} d^{\text{cyc}_2(\tau, g_\tau)} \beta^{\text{cyc}_3(\tau, g_\tau)},
 \end{aligned}$$

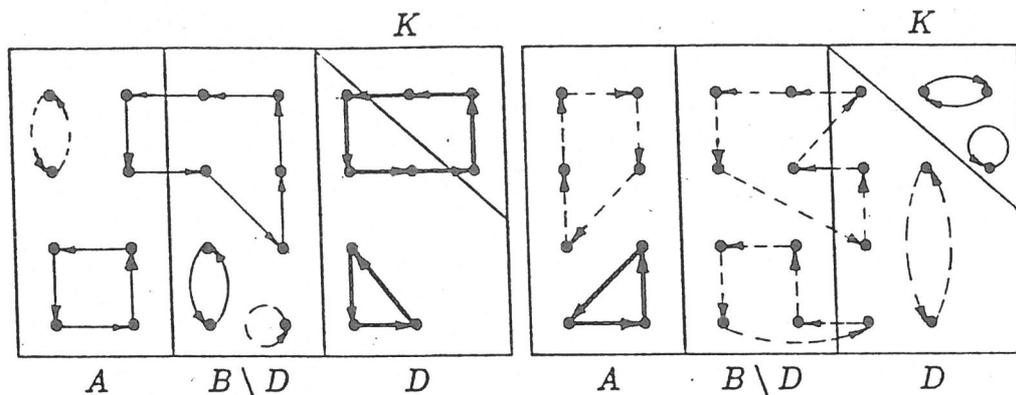


Fig. 4

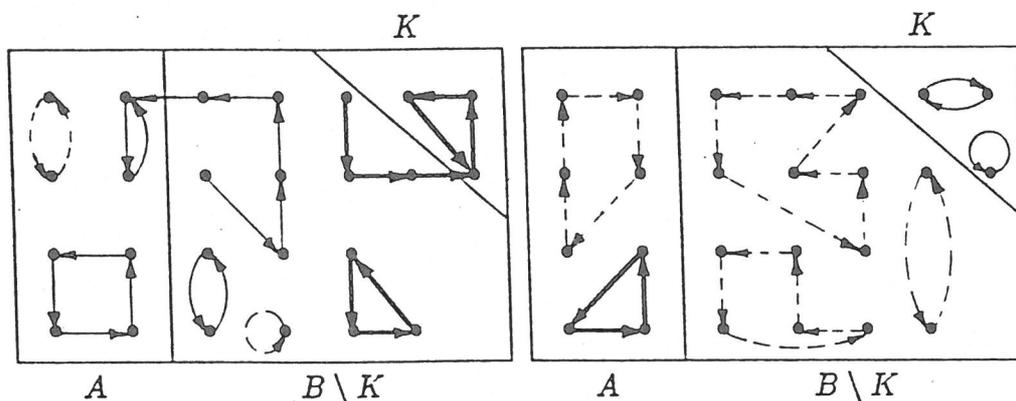


Fig. 5

alors le polynôme générateur $F(A, B; \alpha, d, \beta)$ de $Q[A, B; 1, 2, 3]$ par la fonction-poids ci-dessus est symétrique en (A, α) et (B, β) , à savoir

$$(9) \quad F(A, B; \alpha, d, \beta) = F(B, A; \beta, d, \alpha).$$

On construit maintenant une bijection pour obtenir une expression explicite — le premier membre de (3) — de $F(A, B; \alpha, d, \beta)$. Pour cela, partons d'un couple $((\sigma, f_\sigma), (\tau, g_\tau))$ de $Q[A, B; 1, 2, 3]$; soient D l'union de tous les cycles de (σ, f_σ) de couleur 3 (par définition, $D \subset B$) et K l'union de tous les cycles de (τ, g_τ) de couleur 1 entièrement contenus dans D .

Dans la figure 1, on représente $A + B$ par un rectangle, (σ, f_σ) et (τ, g_τ) par leurs graphes sur deux rectangles identiques, respectivement à gauche et à droite. La partition $(A, B \setminus D, D)$ est représentée par trois tranches verticales et l'ensemble K apparaît dans le coin supérieur droit de chaque rectangle. Enfin, les cycles de couleur 1, 2 et 3 sont représentés respectivement par les flèches fines, pointillées et épaisses. Les passages successifs de la figure 1 à la figure 5 sont décrits comme suit :

(i) chaque fois qu'une flèche a son origine, disons v , dans $B \setminus D$ du rectangle de gauche (resp. de droite) et son but dans A (resp. $D \setminus K$), elle est supprimée et remplacée par une flèche de même origine et de même couleur dont le but est le premier itéré de v qui soit de nouveau dans $B \setminus D$. Appelons Φ cette transformation;

(ii) dans la figure 2, soit Γ_g (resp. Γ_d) le graphe du rectangle de gauche (resp. de droite) entièrement contenu dans $B \setminus D$. On remplace alors Γ_g par Γ_d et Γ_d par Γ_g ;

(iii) appliquons maintenant l'inverse de la transformation Φ décrite plus haut à la figure 3, c'est-à-dire que chaque fois qu'une flèche, disons f , a son origine dans $B \setminus D$ du rectangle de gauche (resp. de droite) et que son but est commun avec un chemin, disons c , dont l'origine est forcément dans A (resp. $D \setminus K$), elle est supprimée et remplacée par une flèche de même origine et de même couleur dont le but est l'origine de c . On remplace ensuite la couleur de chaque flèche de c par celle de f ;

(iv) finalement, dans le rectangle de gauche de la figure 4, chaque fois qu'une flèche a son origine, disons v , dans A (resp. K) et son but dans $B \setminus D$ (resp. $D \setminus K$), elle est supprimée et remplacée par une flèche de même origine et de même couleur dont le but est le premier itéré de v qui soit de nouveau dans A (resp. K).

Après avoir effectué les quatre transformations ci-dessus, dans les deux rectangles de gauche et de droite de la figure 5, on obtient deux graphes qui représentent respectivement deux triplets $(\sigma_A, \sigma_{B \setminus K}, \sigma_K)$ et $(\tau_A, \tau_{B \setminus K}, \tau_K)$, où σ_A (resp. τ_A) est une permutation tricolore de A dont les cycles sont de couleur 1 ou 2 (resp. 2 ou 3), σ_K (resp. τ_K) est une permutation tricolore de K dont les cycles sont uniquement de couleur 3 (resp. 2), et enfin $\sigma_{B \setminus K}$ est une injection tricolore de $B \setminus K$ dans $A + B$ et $\tau_{B \setminus K}$ est une permutation tricolore de $B \setminus K$ dont les cycles sont uniquement de couleur 2.

Par ailleurs, on remarque que chaque transformation de (i)—(iv) préserve le nombre total de cycles de chaque couleur et est réversible. On a ainsi établi une bijection préservant le poids entre $Q[A, B; 1, 2, 3]$ et l'ensemble de tous les 6-uplets $(\sigma_A, \sigma_{B \setminus K}, \sigma_K, \tau_A, \tau_{B \setminus K}, \tau_K)$ dont chaque élément est déjà décrit plus haut. Par conséquent, leurs polynômes générateurs sont égaux

$$(10) \quad F(A, B; \alpha, d, \beta) \\ = \sum W(\sigma_A)W(\tau_A)W(\tau_{B \setminus K})W(\tau_K)W(\tau_{B \setminus K})W(\tau_K).$$

Or d'après (6), on trouve immédiatement que

$$(11) \quad \sum W(\sigma_A) = (\alpha + d)_n,$$

$$(12) \quad \sum W(\tau_A) = (\beta + d)_n,$$

et que pour chaque sous-ensemble K fixé de B , de cardinal k ,

$$(13) \quad \sum W(\sigma_{B \setminus K}) = (\alpha + \beta + d + n + k)_{m-k},$$

$$(14) \quad \sum W(\tau_{B \setminus K}) = (d)_{m-k},$$

$$(15) \quad \sum W(\sigma_K) = (\beta)_k,$$

$$(16) \quad \sum W(\tau_K) = (\alpha)_k.$$

En reportant (11), (12), (13), (14), (15) et (16) dans (10) et sachant qu'il y a effectivement $\binom{m}{k}$ tels sous-ensembles K , on trouve bien l'expression du premier membre de (3). Par conséquent, la formule (3) exprime simplement que $F(A, B; \alpha, d, \beta)$ est symétrique en (A, α) et (B, β) . Ceci est déjà établi dans (9).

Remarque. — Une extension de la formule de AL-SALAM-FIELDS est donnée dans [Zen].

BIBLIOGRAPHIE

- [Al-Fi] AL-SALAM (W.A.) and FIELDS (J.L.). — An identity for Double Hypergeometric Series (Problem 85-24 proposed by SRIVASTAVA (H.M.), *SIAM Review*, t. 28, 1986, p. 576-578.
- [An] ANDREWS (G.E.). — Identities in combinatorics I : on sorting two ordered sets, *Discrete Math.*, t. 11, 1975, p. 97-106.
- [And] ANDERSEN (Erik Sparre). — Two Summation Formulae for Product Sums of Binomial Coefficients, *Math. Scand.*, t. 1, 1953, p. 261-262.
- [An-Br] ANDREWS (George E.) and BRESSOUD (David). — Identities in Combinatorics III : Further aspects of ordered set sorting, *Discrete Math.*, t. 49, 1984, p. 223-237.
- [Bai] BAILEY (W.N.). — *Generalized Hypergeometric Series*. — Cambridge Univ. Press, 1935.
- [Ca-Fo] CARTIER (Pierre) et FOATA (Dominique). — *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*. — Berlin, Springer-Verlag, 1969 (*Lecture Notes in Math.*, 85).
- [Fo] FOATA (Dominique). — Une démonstration combinatoire de l'identité de Pfaff-Saalschütz, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 297, 1983, p. 221-224.
- [Fo-St] FOATA (Dominique) and STREHL (Volker). — Combinatorics of Laguerre polynomials, *Enumeration and Design* [Waterloo, June-July 1982 : D.M. Jackson and S.A. Vanstone, eds.], p. 123-140. — Toronto, Academic Press, 1984.
- [Gou] GOULDEN (I.). — A combinatorial proof of the q -Saalschütz identity, *Discrete Math.*, t. 57, 1985, p. 39-44.
- [Jo-St] JOICHI (J.T.) and STANTON (Dennis). — Bijective proofs of basic hypergeometric series identities, *Pacific J. Math.*, t. 127, 1987, p. 103-120.

- [La-Ye] LABELLE (Jacques) and YEH (Yeong-Nan). — Combinatorial proofs of symmetry formulas for the generalized hypergeometric series, Rapport de recherche n° 41, Math.-Info., Univ. Québec à Montréal, 1987, à paraître dans *J. Math. Anal. and Appl.*
- [Pfa] PFAFF (J.F.). — Observationes analyticae ad L Euleri institutiones calculi integralis, vol IV. Supplem. II et IV, *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, t. 11, 1797, p. 37–57.
- [Ro] ROY (R.). — Binomial identities and hypergeometric series, *Amer. Math. Monthly*, t. 94, 1987, p. 37–46.
- [Sa] SAALSCHÜTZ (L.). — Eine Summationsformel, *Z. für Math. u. Phys.*, t. 35, 1890, p. 186–188.
- [Sh] SHEPPARD (W.F.). — Summation of the Coefficients of Some Terminating Hypergeometric Series, *Proc. London Math. Soc.*, t. 10, 1912, p. 462–478.
- [Zei] ZEILBERGER (D.). — A q -Foata proof of the q -Saalschütz identity, *Europ. J. Combinatorics*, t. 8, 1987, p. 461–463.
- [Zen] ZENG (Jiang). — Une extension d'une formule de Ramanujan-Bailey, submitted for publication.