Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1988, 361/S-19
Actes 19e Séminaire Lotharingien de Combinatoire, p.85-96

EINFÜHRUNG IN DIE FORMALE BEGRIFFSANALYSE

VON

KARL ERICH WOLFF

Zur Entstehung der Formalen Begriffsanalyse

Die Entwicklung des begrifflichen Denkens, die wir im folgenden nur kurz bezüglich ihrer Bedeutung für die Formale Begriffsanalyse skizzieren, führte in ihren Anfängen von den als allgemeine Begriffe mit metaphysischer Realität gedachten **"Ideen"** PLATONs zur **aristotelischen Logik**, in der Begriffe zunächst durch Angabe eines *allgemeinen* Merkmals und dann - zur Abgrenzung gegen andere das allgemeine Merkmal erfüllende Begriffe - durch weitere unterscheidende Merkmale *definiert* werden. Auf die besondere Bedeutung der **"Logique de Port Royal"** von ARNAULD und NICOLE [1] (1662) verweist DUQUENNE [6], da dort bereits ganz klar zwischen **Begriffsinhalt** und **Begriffsumfang** unterschieden wird: "*Or dans ces idées universelles il y a deux choses qu'il est très important de bien distinguer,* ***la compréhension*** *et* ***l'étendue***."

Die weitere Entwicklung gipfelte zunächst in der **Algebraisierung** der Logik durch BOOLE [3] (1847) und der **Axiomatisierung** der Geometrie durch HILBERT um 1900, führte dann um 1940 durch BIRKHOFF [2] zur **Verbandstheorie** und schließlich zu der Auseinandersetzung zwischen den Extensionalisten um QUINE [15] (1953) und den Intensionalisten um CARNAP [5] (1947).

Eine Verbindung zwischen diesen Gegensätzen liefert nun die von R. WILLE [19] 1982 zur Restrukturierung ([12]) der Verbandstheorie eingeführte **"Formale Begriffsanalyse"**: In dieser Theorie wird ausgehend von Kreuztabellen, "Kontexte" genannt, eine an die philosophischen Ansätze angelehnte ***formale*** Definition des "Begriffs" als Mengenpaar (A,B) mit A als "Extension" und B als "Intension" gegeben, so daß die **hierarchische Ordnung "Unterbegriff - Oberbegriff"** für die Begriffe eines gegebenen Kontextes im Liniendiagramm eines Verbandes dargestellt werden kann.

In der Forschungsgruppe Begriffsanalyse der TH Darmstadt ist diese Theorie basierend auf Erfahrungen mit sehr verschiedenartigen Anwendungen weiterentwickelt worden (vgl. WILLE [22]). Dabei haben sich Beziehungen zu Problemen der **Datenevaluation**, der **Klassifikation**, der **Strukturierung von Wissen**, der **Meßtheorie** und der **Künstlichen Intelligenz** ergeben.

Kontexte, Begriffe, Begriffsverbände

Als einführendes Beispiel betrachten wir einige Eigenschaften reeller Zahlen wie *natürlich, ganz, rational, algebraisch,* usw., für die wir abkürzend die Bezeichnungen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ALG usw. verwenden.
In der folgenden mengensprachlichen Beschreibung dieser Situation startet man mit einer Menge G von "Gegenständen" (z.B.: der Menge der reellen Zahlen) und einer Menge M von "Merkmalen" (z.B.: {natürlich, ganz,...}) und notiert das Zutreffen eines Merkmals auf einen Gegenstand durch ein Kreuz "X" in einer Kreuztabelle. Dann erhält man einen "Kontext" im Sinne der von WILLE [19] angegebenen **Definition**:
Ein ***Kontext*** ist ein Tripel (G, M, I), wobei G und M Mengen sind und I eine binäre Relation zwischen G und M ist (d.h. $I \subseteq G \times M$); die Elemente von G heißen ***Gegenstände***, die von M ***Merkmale***, und $(g,m) \in I$ (bzw. gIm) wird gelesen: **"der Gegenstand g hat das Merkmal m"**.
Beispiel: Der Kontext "Reelle Zahlen":
Dieser Kontext besitzt nicht alle reellen Zahlen, sondern nur die folgenden sieben als Gegenstände. (Wie wir später sehen werden, liefert er aber bereits die volle "Merkmalslogik" der folgenden zehn Merkmale!)

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}^-$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}^+$	$\mathbb{Q}^-$	$\mathbb{Q}$	IRR	ALG	TRANS	$\mathbb{R}$
1	X		X	X		X		X		X
-1		X	X		X	X		X		X
1/2				X		X		X		X
-1/2					X	X		X		X
$\sqrt{2}$							X	X		X
π							X		X	X
e							X		X	X

Zur Einführung des Begriffs "Begriff" eines Kontextes (G,M,I) verwenden wir folgende Bezeichnungen: Für $A \subseteq G$ und $B \subseteq M$ sei

$$A' := \{m \in M \mid gIm \text{ für alle } g \in A\},$$
$$B' := \{g \in G \mid gIm \text{ für alle } m \in B\}.$$

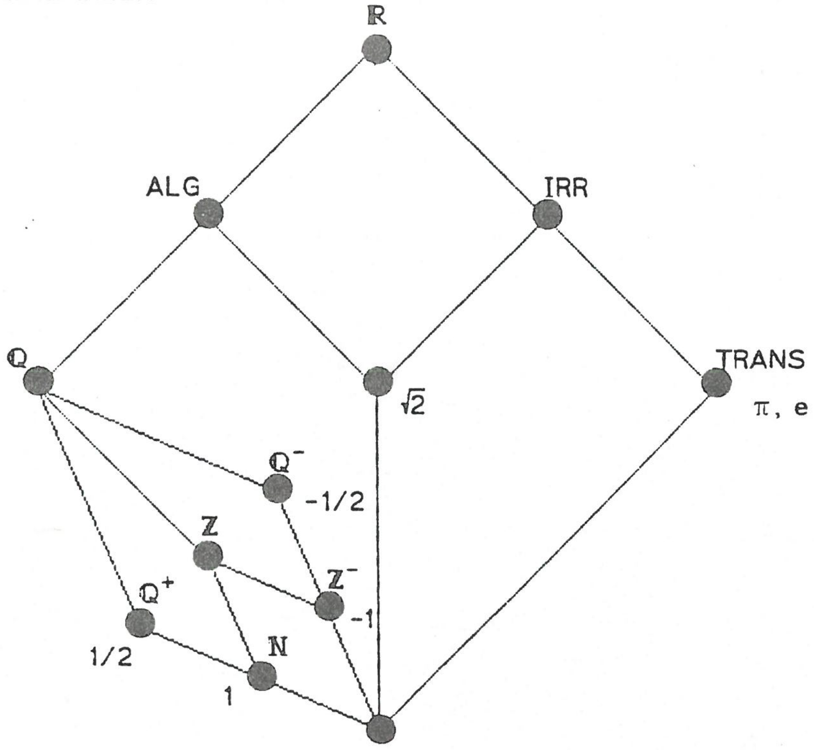
Beispiel: $\{\pi\}' = \{\mathrm{IRR}, \mathrm{TRANS}, \mathbb{R}\}$, $\{\pi\}'' = \{\pi, e\}$, $\{\pi\}''' = \{\pi\}'$.
Die durch $A \longrightarrow A'$ und $B \longrightarrow B'$ beschriebenen Abbildungen bilden eine ***Galois-Verbindung*** zwischen den Potenzmengen von G und M:
(1) Aus $A_1 \subseteq A_2$ folgt $A_1' \supseteq A_2'$ für $A_1, A_2 \subseteq G$,
(1') aus $B_1 \subseteq B_2$ folgt $B_1' \supseteq B_2'$ für $B_1, B_2 \subseteq M$,
(2) $A \subseteq A''$ und $A' = A'''$ für $A \subseteq G$,
(2') $B \subseteq B''$ und $B' = B'''$ für $B \subseteq M$,
woraus man unmittelbar erkennt, daß die Abbildung $A \longrightarrow A''$ $(A \subseteq G)$ ein ***Hüllenoperator*** auf der Potenzmenge von G ist, d.h. für $A, A_1, A_2 \subseteq G$ gilt:
(3) $A \subseteq A''$,
(4) aus $A_1 \subseteq A_2$ folgt $A_1'' \subseteq A_2''$,
(5) $A'''' = A''$.

Ebenso ist natürlich die Abbildung $B \longrightarrow B''$ ($B \subseteq M$) ein Hüllenoperator auf der Potenzmenge von M.
Die mehrfache Anwendung der "***Ableitungsabbildung***" $T \longrightarrow T'$ ($T \subseteq G$ oder $T \subseteq M$) liefert also $T \longrightarrow T' \longrightarrow T'' \longrightarrow T''' = T'$.
Die Paare (A'',A') für $A \subseteq G$ sind genau die "Begriffe" im Sinne der folgenden

Definition:
(A,B) heißt ein ***Begriff*** des Kontextes (G, M, I), falls $A \subseteq G$, $B \subseteq M$ und $A' = B$, $B' = A$.
A heißt der ***Umfang*** und B der ***Inhalt*** des Begriffs (A,B).

Im Kontext "Reelle Zahlen" ist z.B $\{1, -1\}$ der Umfang und $\{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, ALG, \mathbb{R}\}$ der Inhalt des Begriffs, den man erhält, wenn man die Ableitungsabbildung zweimal auf das Merkmal $\mathbb{Z}$ anwendet, also $(\{\mathbb{Z}\}', \{\mathbb{Z}\}'')$ bildet. Die Paare (B',B'') mit $B \subseteq M$ sind ebenfalls genau die Begriffe.
$\mathfrak{B}(G, M, I)$ bezeichne die Menge aller Begriffe von (G, M, I).
In $\mathfrak{B}(G, M, I)$ wird ein Begriff (A_1,B_1) ein ***Unterbegriff*** eines Begriffes (A_2,B_2) – und (A_2,B_2) ein ***Oberbegriff*** von (A_1,B_1) – genannt, in Zeichen
$\mathbf{(A_1,B_1) \leq (A_2,B_2)}$, falls $A_1 \subseteq A_2$ (d.h. $B_2 \subseteq B_1$).
Die Ordnung $(\mathfrak{B}(G, M, I), \leq)$ ist ein Verband, der der ***Begriffsverband*** $\underline{\mathfrak{B}}\mathbf{(G, M, I)}$ des Kontextes (G, M, I) genannt wird.
Der Begriffsverband des Kontextes "Reelle Zahlen" wird durch das folgende Liniendiagramm beschrieben:

REELLE ZAHLEN



Wie liest man ein solches Liniendiagramm?
Die Begriffe des Kontextes werden durch kleine Kreise dargestellt und ein Begriff ist Unterbegriff eines anderen Begriffs genau dann, wenn ein aufsteigender Linienzug von dem den Unterbegriff darstellenden Kreis zu dem den Oberbegriff darstellenden Kreis führt.
Das Liniendiagramm ist folgendermaßen beschriftet (vgl. WILLE [20]):
Der Name des Gegenstandes g wird etwas unterhalb des Kreises des **Gegenstandsbegriffes** $\gamma g := (\{g\}'', \{g\}')$ notiert, während der Name des Merkmals m etwas oberhalb des Kreises des **Merkmalsbegriffes** $\mu m := (\{m\}', \{m\}'')$ notiert wird.
Das beschriftete Liniendiagramm enthält die volle Information des Kontextes, denn es gilt: $g\, I\, m$ genau dann, wenn $\gamma g \leq \mu m$.
Im obigen Beispiel hat etwa der Gegenstand $g = -1/2$ die Merkmale $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}$, ALG und $\mathbb{R}$, aber nicht das Merkmal IRR , da von dem Kreis von γg zwar aufsteigende Linienzüge zu den Kreisen von $\mu\mathbb{Q}^-$, $\mu\mathbb{Q}$, μALG, $\mu\mathbb{R}$ existieren, aber kein aufsteigender Linienzug zu dem Kreis von μIRR vorhanden ist.
Aus dem beschrifteten Liniendiagramm erhält man daher auch leicht den Umfang bzw. den Inhalt eines Begriffs als die Menge aller Gegenstände bzw. Merkmale, deren Namen an dem Kreis des Begriffs oder an Kreisen stehen, die von dem Kreis des Begriffs durch einen ab- bzw. aufsteigenden Linienzug erreichbar sind.
So erkennt man im Liniendiagramm des Kontextes "Reelle Zahlen" z.B für den bereits oben erwähnten Begriff $\mu\mathbb{Z}$ den Umfang $\{-1, 1\}$ und den Inhalt $\{ \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \text{ALG}, \mathbb{R} \}$.

Die allgemeine Beziehung zwischen Kontexten und Verbänden beschreibt der von WILLE [19] angegebene

Hauptsatz über Begriffsverbände:

Für einen Kontext (G, M, I) ist die Ordnung $(\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I), \leq)$ ein vollständiger Verband, in dem sich Infimum und Supremum folgendermaßen beschreiben lassen:

$$\bigwedge_{t\in T} (A_t , B_t) = (\bigcap_{t\in T} A_t , (\bigcup_{t\in T} B_t)''),$$

$$\bigvee_{t\in T} (A_t , B_t) = ((\bigcup_{t\in T} A_t)'', \bigcap_{t\in T} B_t) .$$

Ein vollständiger Verband V ist genau dann isomorph zu $\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$, wenn Abbildungen $\gamma: G \longrightarrow V$, $\mu: M \longrightarrow V$ existieren, so daß
γG supremum-dicht in V, (d.h. $V = \{ \bigvee X \mid X \subseteq \gamma G \}$) und
μM infimum-dicht in V ist, (d.h. $V = \{ \bigwedge X \mid X \subseteq \mu M \}$) und
$g\, I\, m \iff \gamma g \leq \mu m$ für alle $g \in G$, $m \in M$.
Insbesondere ist V isomorph zum Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(V, V, \leq)$.

Bestimmung aller Begriffe von (G, M, I)

Zur Bestimmung aller Begriffe eines endlichen Kontextes (G, M, I) kann man für jede Teilmenge $A \subseteq G$ das Paar (A'', A') berechnen. Wesentlich eleganter ist der Algorithmus NEXT EXTENT von B. GANTER [8], der alle Begriffsumfänge (und damit alle Begriffe) von (G, M, I) dadurch berechnet, daß er unter Verwendung der natürlichen Ordnung auf $G = \{1,2,\ldots,n\}$ die dadurch gegebene lexikographische Ordnung auf der Menge aller (charakteristischen Funktionen der) Begriffsumfänge von (G, M, I) durchläuft. Dieser Algorithmus benutzt von der Abbildung $A \longrightarrow A''$ $(A \subseteq G)$ nur die Eigenschaften eines Hüllenoperators und kann deshalb auch zur Berechnung beliebiger Hüllensysteme verwendet werden, was bei der Bestimmung einer "minimalen vollständigen Liste von Implikationen" (im nächsten Abschnitt) wesentlich benutzt wird.

Implikationen

Oft bemerkt man in einem Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ zwischen zwei Merkmalsmengen $A, B \subseteq M$ die Beziehung, daß jeder Gegenstand mit den Merkmalen von A auch alle Merkmale von B hat, d.h. daß $A' \subseteq B'$ gilt. Man sagt dann **"A impliziert B (in $\mathbb{K}$)"** oder "(A,B) ist eine (in $\mathbb{K}$ gültige) Implikation" und schreibt dafür auch " $A \xrightarrow{\mathbb{K}} B$ ". Im Kontext "Reelle Zahlen" gilt z.B die Implikation $\{ \mathbb{Q} \} \xrightarrow{\mathbb{K}} \{ \mathrm{ALG} \}$, da jede Zahl des Kontextes (bekanntlich sogar jede reelle Zahl) mit dem Merkmal $\mathbb{Q}$ auch das Merkmal ALG besitzt. (Auf die Beziehung zwischen dem Kontext "Reelle Zahlen" und dem größeren Kontext $\mathbb{K}_0$, der dieselben Merkmale, aber *alle* reellen Zahlen als Gegenstände (und die übliche Inzidenz) besitzt, werden wir später eingehen.)
Im Liniendiagramm erkennt man eine Implikation zwischen zwei einelementigen Merkmalsmengen $\{ m \} \xrightarrow{\mathbb{K}} \{ n \}$ an der Beziehung $\mu m \leq \mu n$. Für beliebige Teilmengen $A,B \subseteq M$ gilt $A \xrightarrow{\mathbb{K}} B$ genau dann, wenn $\bigwedge\{\mu m \mid m \in A\} \leq \bigwedge\{\mu n \mid n \in B\}$, wobei $\bigwedge\{\mu m \mid m \in A\}$ das Infimum, also den größten gemeinsamen Unterbegriff, aller Begriffe μm mit $m \in A$ bezeichnet.
Man kann zeigen, daß für Kontexte mit endlich vielen Merkmalen die Menge aller Implikationen bereits den Begriffsverband bestimmt. Unter allen ***vollständigen*** Mengen von Implikationen — das sind solche, aus denen sich alle Implikationen des gegebenen Kontextes als ***Folgerungen*** (vgl. GANTER [8]) ergeben — haben DUQUENNE und GUIGUES [6,7] 1984 eine minimale Menge, die "DUQUENNE-GUIGUES-Basis" angegeben, die mit dem von GANTER [8] angegebene "Hüllen-Algorithmus" erzeugt werden kann. Damit hat man die Grundlage für das von BURMEISTER [4] implementierte interaktive Implikationenprogramm.

Das interaktive Implikationenprogramm

Mit diesem Programm kann man - grob gesprochen - die "wesentlichen" Beziehungen zwischen endlich vielen "interessanten" Merkmalen für (meist unendlich viele) Objekte eines großen Wissensbereiches interaktiv aus einem Experten (-team) herausholen und in einem endlichen Kontext und dessen Begriffsverband darstellen.
Genauer gesagt kann man mit diesem Programm interaktiv den Begriffsverband eines "großen" Kontextes $\mathbb{K}_0 = (G_0, M, I_0)$ mit endlicher Merkmalsmenge M, aber eventuell unendlicher Gegenstandsmenge G_0 konstruieren. Dabei wird eine endliche Teilmenge $G \subseteq G_0$ und ein endlicher Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ mit $I = I_0 \cap (G \times M)$ so konstruiert, daß der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ isomorph ist zu $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_0)$.
Mit diesem Programm ist auch der Kontext "Reelle Zahlen" aus dem Kontext $\mathbb{K}_0$ mit denselben Merkmalen, aber *allen* reellen Zahlen als Gegenständen konstruiert worden, wobei "$g\ I_0\ m$" die übliche Inzidenz "g hat das Merkmal m" bezeichnet.
Man startet dazu nach Eingabe der $|M|$ Merkmalsnamen mit einer endlichen Teilmenge $G \subseteq G_0$ und gibt den Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I_0 \cap (G \times M))$ ein (, den man als Experte kennt). Dann liefert der GANTERsche Hüllenalgorithmus eine in $\mathbb{K}$ gültige Implikation (aus der "DUQUENNE-GUIGUES-Basis" von $\mathbb{K}$) und fordert den Experten auf, die Gültigkeit dieser Implikation in $\mathbb{K}_0$ zu prüfen:
Falls diese Implikation in $\mathbb{K}_0$ gültig ist, wird sie in einer Liste $\mathcal{L}$ notiert, andernfalls muß der Experte ein Gegenbeispiel $g \in G_0$ zu dieser Implikation finden, sodann das Gegenbeispiel g zur aktuellen Gegenstandsmenge G hinzufügen und für jedes Merkmal $m \in M$ mit $g\ I_0\ m$ diese (ihm als Experten bekannte) Inzidenz durch Ankreuzen angeben. In dem so aktualisierten Kontext $\mathbb{K}$ wird nun die nächste Implikation (aus der DUQUENNE-GUIGUES-Basis von $\mathbb{K}$) ebenso geprüft, bis alle Implikationen der DUQUENNE-GUIGUES-Basis (des jeweils aktuellen Kontextes) geprüft sind. Dann ist der Begriffsverband $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K})$ isomorph zu $\underline{\mathfrak{B}}(\mathbb{K}_0)$.
Daher zeigt das Liniendiagramm des Kontextes $\mathbb{K}$ bereits die volle "Merkmalslogik" zwischen den Merkmalen von M , obwohl nur wenige Gegenstände als trennende Gegenbeispiele diese Merkmale unterscheiden. Die Anzahl der Gegenstände von $\mathbb{K}$ ist aber oft größer als die Minimalzahl von trennenden Gegenbeispielen. Zum Beispiel ist im Kontext "Reelle Zahlen" einer der beiden Gegenstände π, e überflüssig.
Diese redundanten Gegenstände lassen sich jedoch leicht durch "Reduktion" des Kontextes beseitigen. Im Kontext "Reelle Zahlen" ist etwa $G \setminus \{e\}$ eine ***minimale Menge von trennenden Gegenbeispielen***.

Demonstration des Implikationenprogramms

Wir demonstrieren nun, wie mit dem Implikationenprogramm aus den zehn oben angegebenen Merkmalen der Kontext "Reelle Zahlen" und damit die "Merkmalslogik" dieser Merkmale entsteht:

Zunächst werden die Nummern (oder Namen) der Merkmale eingegeben, dann wählen wir als Start etwa die Gegenstandsmenge G = {1, −1, π, e} und geben durch Ankreuzen für jeden dieser Gegenstände an, welche der gegebenen Merkmale auf ihn zutreffen. Dann fragt das Implikationenprogramm, ob folgende Implikationen in dem Kontext $\mathbb{K}_0$ aller reellen Zahlen und der gegebenen Merkmale gültig sind:

1. Implikation: $\Rightarrow \mathbb{R}$,

d.h.: $\emptyset \to \{\mathbb{R}\}$ (in $\mathbb{K}_0$), womit gefragt wird, ob jeder Gegenstand von $\mathbb{K}_0$ das Merkmal $\mathbb{R}$ hat, was wir mit JA beantworten. Dann folgt die

2. Implikation: TRANS, $\mathbb{R} \Rightarrow$ IRR,

d.h.: ist jede transzendente reelle Zahl irrational, was wir mit JA beantworten.

3. Implikation: ALG, $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Diese Implikation des aktuellen Kontextes ist aber natürlich nicht in $\mathbb{K}_0$ gültig. Zur Begründung unserer Antwort "NEIN" werden wir vom Implikationenprogramm aufgefordert, ein Gegenbeispiel anzugeben. Wir wählen als neuen Gegenstand $g_5 = \sqrt{2}$ und kreuzen die für $\sqrt{2}$ zutreffenden Merkmale in einer neuen Kontextzeile an.

4. Implikation: IRR, ALG, TRANS, $\mathbb{R} \Rightarrow$ Rest (d.h. alle übrigen Merkmale von M), was wir mit JA beantworten, da sich die Merkmale ALG und TRANS (in $\mathbb{K}_0$) widersprechen.

5. Implikation: $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Z}$, ALG ,

wozu wir das Gegenbeispiel $g_6 = 1/2$ und die zugehörige neue Kontextzeile eingeben.

6. Implikation: $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \Rightarrow$ ALG , was wir mit JA beantworten.

7. Implikation: $\mathbb{Q}$, IRR, ALG, $\mathbb{R} \Rightarrow$ Rest ; Antwort: JA.

8. Implikation: $\mathbb{Q}^-, \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, ALG , was wir mit NEIN, dem Gegenbeispiel $g_7 = -1/2$ und dessen neuer Kontextzeile beantworten.

9. Implikation: $\mathbb{Q}^-, \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Q}$, ALG ; Antwort: JA.

10. Implikation: $\mathbb{Q}^+, \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Q}$, ALG; Antwort: JA.

11. Implikation: $\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}$, ALG, $\mathbb{R} \Rightarrow$ Rest ; Antwort: JA.

12. Implikation: $\mathbb{Z}, \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Q}$, ALG; Antwort: JA.

13. Implikation: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}$, ALG, $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Z}^-$; Antwort: JA.

14. Implikation: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}$, ALG, $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{N}$; Antwort: JA.

15. Implikation: $\mathbb{Z}^-, \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Z}, \mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}$, ALG; Antwort: JA.

16. Implikation: $\mathbb{N}, \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Z}, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}$, ALG; Antwort: JA.

Dann meldet das Implikationenprogramm das Ende des Verfahrens. Die DUQUENNE-GUIGUES-BASIS des konstruierten Kontextes $\mathbb{K}$ besteht genau aus den mit JA beantworteten Implikationen. Jede in $\mathbb{K}_0$ gültige Implikation ist eine Folgerung aus den Implikationen der DUQUENNE-GUIGUES-BASIS. Daher hat man im Liniendiagramm des Begriffsverbandes von $\mathbb{K}$ die "Merkmalslogik" der betrachteten Merkmale visualisiert.

Mehrwertige Kontexte

Zur formalen Behandlung von Tabellen mit beliebigen Einträgen (wie etwa Prozentzahlen, Rangzahlen, Farbbezeichnungen, Noten) und evtl. Leerzellen hat WILLE [19] die ternäre Beziehung "das Merkmal m hat beim Gegenstand g den Wert w" in folgender Definition durch eine dreistellige Relation I beschrieben:
Ein **mehrwertiger Kontext** ist ein Quadrupel (G, M, W, I), wobei G, M, W Mengen sind und I eine dreistellige Relation zwischen G, M, W ist (d.h. $I \subseteq G \times M \times W$), so daß gilt:
aus $(g,m,w) \in I$ und $(g,m,v) \in I$ folgt stets $w = v$.
Die Elemente von G nennen wir **Gegenstände**, die von M **(mehrwertige) Merkmale** und die von W die **Merkmalsausprägungen** oder **Werte**.
"$(g,m,w) \in I$" lesen wir als **"das Merkmal m hat beim Gegenstand g den Wert w"**.
(G,M,W,I) heißt ein **n-wertiger Kontext**, falls W n-elementig ist.
Die bisher behandelten Kontexte lassen sich als einwertige Kontexte darstellen. Mehrwertige Kontexte werden in der **begriffsanalytischen Meßtheorie** (vgl.[10,19,20]) auf einwertige Kontexte zurückgeführt.
Als **Beispiel** dazu demonstrieren wir folgende begriffsanalytische Auswertung einer psychosomatischen Untersuchung an Magersuchtkranken. **Magersucht** ist eine hauptsächlich bei jungen Frauen vorkommende Krankheit, die über starke Abmagerung zum Hungertod führen kann. Ein Standardverfahren zur Untersuchung der als Ursache vermuteten familiären Konflikte ist der von KELLY [13] und SLATER [16,17] beschriebene "Repertory Grid Test" (vgl. [18]), der einen 6-wertigen Kontext liefert, dessen Werte die Noten von 1 bis 6 sind, die die Patientin ihren wichtigsten Verwandten und Bekannten, sich selbst und ihrem Ideal bezüglich selbstgewählter Gegensatzpaare wie z.B. "optimistisch - pessimistisch" gibt. Solche Gegensatzpaare sind die Merkmale im folgenden mehrwertigen Kontext:

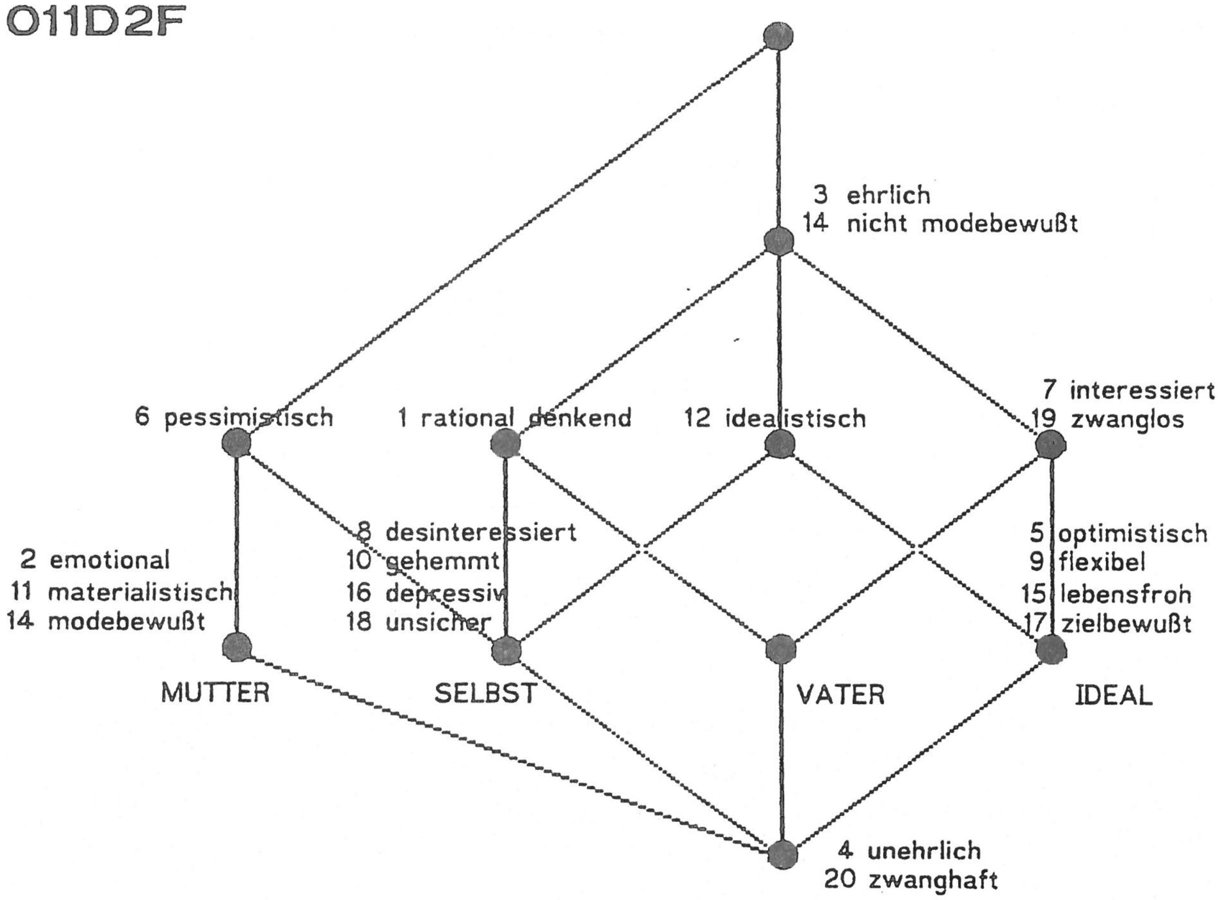
		SELBST	IDEAL	VATER	MUTTER
1: rational denkend	2: emotional	2	3	2	5
3: ehrlich	4: unehrlich	1	2	2	3
5: optimistisch	6: pessimistisch	5	1	3	5
7: interessiert	8: desinteressiert	5	2	2	3
9: flexibel	10: gehemmt	5	1	3	3
11: materialistisch	12: idealistisch	5	5	4	2
13: nicht modebewußt	14: modebewußt	2	2	2	5
15: lebensfroh	16: depressiv	6	1	3	4
17: zielbewußt	18: unsicher	5	2	3	4
19: zwanglos	20: zwanghaft	4	2	2	3

Es gibt viele Möglichkeiten aus diesem mehrwertigen Kontext einen (einwertigen) Kontext zu erzeugen, insbesondere auch einen, der die gesamte Information des mehrwertigen Kontextes beinhaltet. Als typisches Beispiel konstruieren wir hier jedoch einen Kontext, der nicht die gesamte, wohl aber die wichtigste Information des mehrwertigen Kontextes enthält: Jedes Merkmal des mehrwertigen Kontextes (z.B. "17: zielbewußt - 18: unsicher") wird in zwei Merkmale (hier "17: zielbewußt" und "18: unsicher") zerlegt, die Gegenstandsmenge bleibt unverändert und bei einem (einwertigen) Merkmal mit ungerader (bzw. gerader) Nummer steht ein Kreuz bei dem Gegenstand g , falls g beim zugehörigen mehrwertigen Merkmal den Wert 1 oder 2 (bzw. 5 oder 6) bekommen hat.
In unserem Beispiel entstehen so etwa aus der vorletzten Zeile des mehrwertigen Kontextes die beiden folgenden Zeilen des zugehörigen (einwertigen) Kontextes:

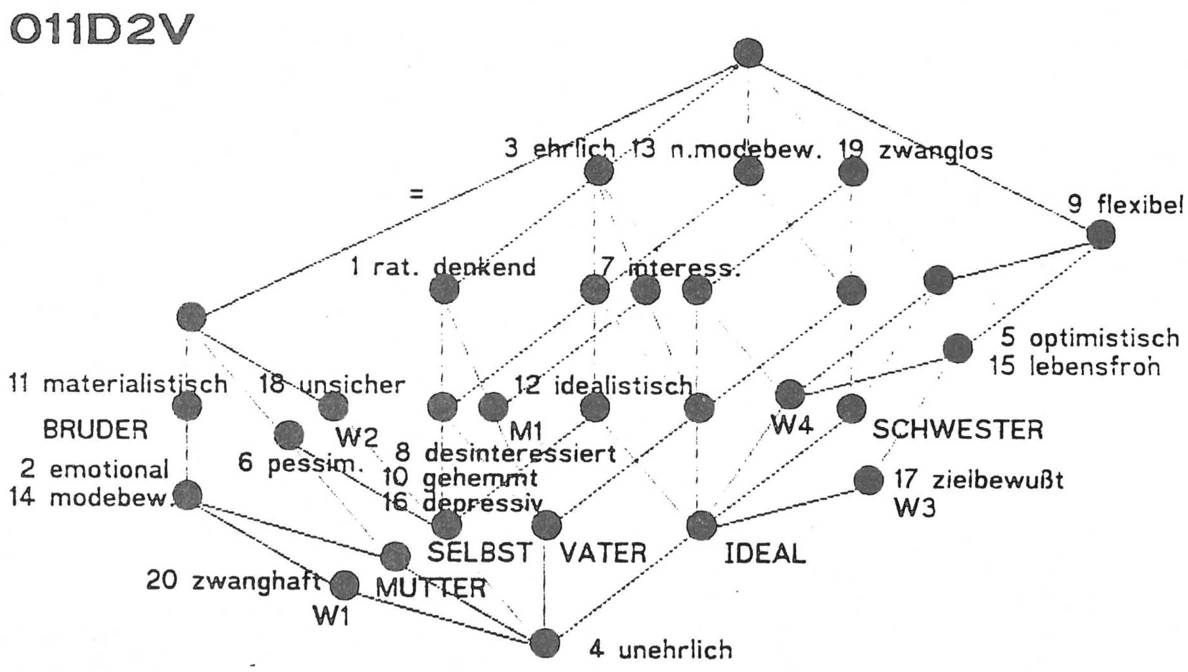
	SELBST	IDEAL	VATER	MUTTER
17: zielbewußt		X		
18: unsicher	X			

Ein Liniendiagramm des durch diese "Skalierung" entstandenen "2-5-Kontextes" zeigt die folgende Figur:

O11D2F



Ein Lesebeispiel zu diesem Liniendiagramm:
Die Patientin sieht sich als einzige unter diesen vier Personen als "desinteressiert, gehemmt, depressiv, unsicher". "Pessimistisch" ist das einzige Merkmal, das sie mit der Mutter gemeinsam hat, während sie mit dem Vater und dem Ideal die Merkmale "ehrlich, nicht modebewußt" teilt. Die Mutter hat weder mit dem Ideal noch mit dem Vater ein gemeinsames Merkmal. Keine der vier Personen wird als "unehrlich" oder " zwanghaft" eingestuft.
Nimmt man auch die im vorigen Beispiel noch nicht erwähnten Personen des von SPANGENBERG erhobenen Original-Grids hinzu und skaliert diesen 6-wertigen Kontext mit insgesamt 11 Gegenständen und 10 Merkmalen wie oben zu einem "2-5-Kontext", so erhält man das folgende Liniendiagramm, (in dem M1, W1, W2, W3, W4 männliche bzw. weibliche Bekannte der Patientin bezeichnen):



Als kleine Leseprobe betrachten wir in diesem Kontext die "aristotelische Definition" des VATERs der Patientin: Unter allen Personen dieses Grids ist der VATER der einzige, der rational denkend und zwanglos ist.
Die 1986 erstmals erprobte Anwendung der Formalen Begriffsanalyse auf "Repertory-Grid-Tests" liefert nach unseren Erfahrungen derart zutreffende Darstellungen der psychischen Situation der Patienten, daß man geneigt ist, diese Liniendiagramme als " ***seelische Röntgenbilder*** " zu bezeichnen. Sie stellen wesentlich klarer als die bisher verwendete Hauptkomponentenanalyse die im mehrwertigen Kontext gegebene Information dar.

Bemerkungen zu den Zeichenprogrammen

Das Zeichnen "guter" Liniendiagramme von Begriffsverbänden durch den Computer ist ein vielschichtiges kompliziertes Problem, das bisher noch nicht befriedigend gelöst ist. LUKSCH, SKORSKY und WILLE [14] haben grundlegende Einbettungs- und Projektionsverfahren zum Zeichnen von Liniendiagrammen beschrieben. Die von SKORSKY, GANTER und WEISER erstellten Zeichenprogramme liefern zur Zeit (1988) für Begriffsverbände mit höchstens 128 Begriffen Liniendiagramme, die dann interaktiv z.B. durch Verschieben von Punkten verbessert werden können. Man erhält damit bei bis zu etwa 20 Begriffen in wenigen Minuten gute Liniendiagramme, bei 30 - 50 Begriffen dauert es oft wesentlich länger bis das vom Rechner sehr schnell erstellte, aber meist noch unschöne Liniendiagramm interaktiv so zurechtgerückt worden ist, daß man gutinterpretierbare Teilstrukturen in einem klar erkennbaren Gesamtbild überschauen kann. Für die Erstellung großer Liniendiagramme hat WILLE [21] mehrere Methoden zur Zerlegung und Darstellung von Begriffsverbänden angegeben, von denen sich die Methode der "gestuften Liniendiagramme" in Verbindung mit einem von SKORSKY implementierten Zeichenprogramm als besonders nützlich erwiesen hat.

LITERATUR:

[1] A.Arnauld, P.Nicole: La logique ou l'art de penser, 1662 (ed. 5, 1683) Nachdruck von Fromann, Stuttgart, 1965.

[2] G.Birkhoff: Lattice theory, Amer.Math.Soc., 1940 (Third ed., reprint 1984)

[3] G.Boole: The Mathematical Analysis of Logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning 1847. Nachdruck von Basil Blackwell, Oxford,1951.

[4] P.Burmeister: Programm zur Formalen Begriffsanalyse einwertiger Kontexte (unter Mithilfe von A.Rust und P.Schleich). TH Darmstadt 1987.

[5] R.Carnap: Meaning and necessity: a study in Semantics and Modal Logic The University of Chicago Press, Chicago, 1947.

[6] V.Duquenne: Contextual implications between attributes and some properties for finite lattices. In: B.Ganter, R.Wille, K.E.Wolff (Hrsg.): Beiträge zur Begriffsanalyse. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich 1987, 213-239.

[7] V.Duquenne, J.-L.Guigues: Informative implications derived from a table of binary data. Preprint, Groupe Math. et Psychol., Univ.P.V., Paris 1984

[8] B.Ganter: Algorithmen zur Formalen Begriffsanalyse. In: B.Ganter, R.Wille, K.E.Wolff (Hrsg.): Beiträge zur Begriffsanalyse. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich 1987, 241-254.

[9] B.Ganter, K.Rindfrey, M.Skorsky: Software for formal concept analysis. In: W.Gaul, M.Schader (ed.): Classification as a tool of research, North Holland, Amsterdam 1986, 161-167.

[10] B.Ganter, J.Stahl, R.Wille: Conceptual measurement and many-valued contexts. In: W.Gaul, M.Schader (ed.): Classification as a tool of research, North Holland, Amsterdam 1986, 169-176.

[11] B.Ganter, R.Wille: Implikationen und Abhängigkeiten zwischen Merkmalen. In: P.O.Degens, H.-J.Hermes, O.Opitz (Hrsg.): Die Klassifikation und ihr Umfeld. Indeks-Verlag, Frankfurt 1986, 171-185.

[12] H.von Hentig: Magier oder Magister? Über die Einheit der Wissenschaft im Verständigungsprozeß. Klett-Verlag, Stuttgart 1972.

[13] G.A.Kelly: The psychology of personal constructs. Vol.I and II, Norton, New York 1955.

[14] P.Luksch, M.Skorsky, R.Wille: On drawing concept lattices with a computer. In: W.Gaul, M.Schader (ed.): Classification as a tool of research, North-Holland, Amsterdam 1986, 269-274.

[15] W.O.Quine: From a logical point of view. Harvard University Press, Cambridge, 1953, (ed. 3, 1980).

[16] P.Slater: The Principal Components of a Repertory Grid. London: Vincent Andrew, 1964.

[17] P.Slater: The measurement of interpersonal space by Grid Technique. Vol.I and II, Wiley, New York 1977.

[18] N.Spangenberg, K.E.Wolff: Conceptual grid evaluation. In: H.H.Bock (ed.): Classification and related methods of data analysis. Proceedings of the First Conference of the International Federation of Classification Societies, North-Holland, Amsterdam 1988, 577-580.

[19] R.Wille: Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. In: Ordered Sets (ed. I.Rival). Reidel, Dordrecht-Boston 1982, 445-470.

[20] R.Wille: Liniendiagramme hierarchischer Begriffssysteme. In: H.H.Bock (Hrsg.): Anwendungen der Klassifikation: Datenanalyse und numerische Klassifikation. INDEKS-Verlag, Frankfurt 1984, 32-51; engl. Übersetzung: Line diagrams of hierarchical concept systems. International Classification 11 (1984), 77-86.

[21] R.Wille: Lattices in data analysis: How to draw them with a computer. Preprint Nr. 1067, TH Darmstadt 1987.

[22] R.Wille: Bedeutungen von Begriffsverbänden. In: B.Ganter, R.Wille, K.E.Wolff (Hrsg.): Beiträge zur Begriffsanalyse. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim/ Wien/Zürich 1987, 161-211.

Karl Erich Wolff
Fb Mathematik und Naturwissenschaften
Fachhochschule Darmstadt
Schöfferstr. 3
D 6100 Darmstadt