Permutabilitäten kleiner endlicher Gruppen

Volkmar Welker
Universität Erlangen

15 Mai 1988

In den Arbeiten [1] [2] [3] wird die Eigenschaft einer Gruppe untersucht Faktoren eines Produkts ohne Veränderung des Produktwertes zu permutieren. Die Betrachtung ist auch für unendliche Gruppen sinnvoll, jedoch sollen im folgenden nur endliche Gruppen untersucht werden. Eine Gruppe sei daher im weiteren immer endlich. Man definiert :

Definition : Ist G eine Gruppe und $n \in \mathbf{N}$.

1. G besitzt die Eigenschaft $P(n)$ genau dann, wenn für alle $x_1, \ldots, x_n \in G$ ein $id \neq \sigma \in S_n$ existiert mit
$$x_1 \cdots x_n = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

2. Für eine Gruppe G sei $P(G)$ wie folgt definiert $P(G) := n$ falls G $P(n)$ aber nicht $P(n-1)$ besitzt.

Die Definition von $P(G)$ ist sinnvoll, da eine Gruppe G nie $P(1)$ besitzt und aus $P(n)$ schon $P(n+1)$ folgt, außerdem gilt :

Bemerkung 1: Ist G eine endliche Gruppe und $n = |G| > 2$, so gilt $P(G) \leq n - 1$.
Beweis: Ohne Einschränkung kann ein $n-1$ Tupel von Elementen aus G gewählt werden, in dem kein Element mehrfach auftritt. Weiter kann auch die 1 ausgeschlossen werden, da sie jedes Element zentralisiert. Damit gibt es genau ein solchen $n-1$ Tupel von Elementen. Ist nun x ein beliebiges Element aus G, so induziert x einen inneren Automorphismus von G und es gilt $(G-\{1\})^{x_1} = (G-\{1\})$. Also induziert x_1 eine Permutation der Elemente von $G - \{1\}$ und
$$x_1x_2x_3\cdots x_{n-1} = x_2^{x_1}x_3^{x_1}\cdots x_{n-1}^{x_1}x_1.$$
Damit folgt für $\sigma(i) = j$ mit $x_{i+1}^{x_1} = x_j$ $(i = 1, \ldots, n-2)$ und $\sigma(n-1) = 1$ die Behauptung. ■

Jedoch wird im allgemeinen $P(G) < n - 1$ gelten. Es ist aber nicht trivial für eine gegebene Gruppe G $P(G)$ zu berechnen. Einige Hilfmittel liefern folgende Sätze.

Satz 2 [2, (3.2)]: Ist G eine Gruppe und H eine Untergruppe, so gilt $P(G) \leq |G : H|P(H)$.

Satz 3 [2, (3.3)]: Ist G eine Gruppe, so gilt $P(G) \leq |G'| + 1$.

Satz 4 [3]: Ist G eine nichtabelsche Gruppe, so gilt $P(G) = 3 \Leftrightarrow |G'| = 2$.

Bemerkung 5: Sind G_1 und G_2 Gruppen, sog gilt $P(G_1 \times G_2) \geq max\{P(G_1), P(G_2)\}$ Ist eine der Gruppen abelsch, so gilt sogar Gleichheit.

Insbesondere folgt aus $P(G) = 3$, daß G nilpotent ist. Nach Bermerkung 4 sind daher Gruppen G mit $P(G) = 3$ direkte Produkte einer 2-Gruppen G_1 mit $P(G_1)) = 3$ und einer abelschen Gruppe G_2.

Bemerkung 6: $P(D_4) = P(Q_8) = 3$.
Beweis: Beide Gruppen sind nicht kommutativ, also $P(D_4), P(Q_8) > 2$ und es gilt $D_4', Q_8' \cong Z_2$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 4. ■

Bemerkung 7: $P(Q_{2^n}) = P(D_{n+1}) = P(D_3) = 4$ für $n \geq 3$.
Beweis: Alle auftretenden Gruppen besitzen einen zyklischen Normalteiler vom Index 2 und $|G'| \geq 3$. Damit folgt die Behauptung aus den Sätzen 3 und 4. ■

Für den Fall $|G| = 12$ wird die Argumentation explizit ausgeführt.

Bemerkung 8: Ist G eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung 12, so gilt $P(G) = 4$.
Beweis:

D_4: Folgt aus Bemerkung 7.

A_4: A_4 ist nicht nilpotent und damit $P(A_4) \geq 4$. Geschicktes Rechnen mit den nicht trivialen Viertupeln von Elementen aus A_4 zeigt dann $P(A_4) = 4$.

T: Wiederum ist $T =< x, y|x^3 = y^2, x^y = x^{-1} >$ nicht nilpotent. Jedoch besitzt T einen abelschen Normalteiler $N \cong Z_6$ vom Index 2. Somit folgt die Behauptung aus den Sätzen 3 und 4. ■

Im folgenden werden die Gruppen der Ordnung 16 gelistest, die nicht isomorph zur Dieder- oder verallgemeinerten Quaternionengruppe sind und nur eine triviale Zerlegung in ein direktes Produkt erlauben.

Erzeuger und Relationen	$P(G)$		nicht $P(P(G)-1)$
$< x, y\|x^2 = xyxy^3 = 1 >$	3	$\|G'\| = 2$	nicht abelsch
$< x, y\|x^4 = y^4 = x^y x = 1 >$	3	$\|G'\| = 2$	nicht abelsch
$< x, y\|x^4 = y^4 = (xy)^2 = x^{-1}y = 1 >$	3	$\|G'\| = 2$	nicht abelsch
$< x, y, z\|x^2 = y^2 = z^2 = 1, xyz = yzx = zxy >$	3	$\|G'\| = 2$	nicht abelsch

Bemerkung 9: Ist G eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung $2 \cdot p^2$, für eine ungerade Primzahl p, so gilt $P(G) = 4$.
Beweis: Nach dem Satz von Sylow besitzt G eine normale Untergruppe Syl_p der Ordnung p^2, diese ist notwendigerweise abelsch. Ist $|G'| = 2$, so ist auch die 2-Sylowgruppe von G normal und damit wäre G abelsch. Da aber $P(Syl_p) = 2$ und $|G : Syl_p| = 2$ folgt damit die Behauptung aus den Sätzen 3 und 4. ■

Nun sind alle Gruppen bis zur Ordnung 19 behandelt. Für die noch nicht untersuchten Gruppen der Ordnung 20 ergibt sich folgende Liste.

Erzeuger und Relationen	$P(G)$		nicht $P(P(G)-1)$
$Aff(1,5)$	4	Computertest	nicht nilpotent
$< x, y\|x^5 = y^2 = (xy)^2 >$	4	$Z_{10} \triangleleft G$	nicht nilpotent

Interessant sind nun die Gruppen der Ordnung 24, die Resultate für die noch zu betrachtenden Fälle sind in der folgenden Liste zusammengefaßt.

Erzeuger und Relationen	$P(G)$		nicht $P(P(G)-1)$
$< x, y\|x^4 = y^6 = (xy)^2 = (x^{-1}y)^2 = 1 >$	4	$Z_{12} \triangleleft G$	nicht nilpotent
$< x, y\|x^2 = y^2 = (xy)^3 >$	4	$Z_{12} \triangleleft G$	nicht nilpotent
$< x, y\|x^6 = y^2 = (xy)^2 >$	4	$Z_{12} \triangleleft G$	nicht nilpotent
$SL(2,3)$	5	Computertest	$x_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$ $x_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
S_4	6	Computertest	$x_1 = (132), x_2 = (1342), x_3 = (34),$ $x_4 = (123), x_5 = (1324)$

Die aufgeführten Elemente sind dabei Tupel, die keine Permutation erlauben, die das Produkt invariant läßt. Für Gruppen der Ordnung p^n, gilt folgende Aussage.

Bemerkung 10: Ist p eine ungerade Primzahl und G eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung p^n, so gilt $P(G) \leq p^{n-2} + 1$.
Beweis: Sei $A(k)$ die Anzahl der Untergruppen von G der Ordnung p^k. Nach dem verallgemeinerten Satz von Sylow [4] gilt $A(k) = 1\ (modp)$. Nun operiert G auf den Untergruppen der Ordnung p^k und damit folgt aus der Bahnformel die Existenz einer normalen Untergruppe der Ordnung p^k. Damit folgt $|G'| \leq p^{n-2}$ und damit die Behauptung aus Satz 4. ■

Insbesondere gilt $P(G) \leq p + 1$ für $|G| = p^3$. Eine Analyse der Gruppen der nicht abelschen Gruppen der Ordnung 27 zeigt $P(G) = 4$.

Unter den 51 Gruppen der Ordnung 32 befinden sich bekanntlich sieben abelschen Gruppen, 17 Gruppen haben eine Z_2 als Kommutatorgruppe, also $P(G) = 3$, 22 Gruppen besitzen eine abelsche Untergruppe vom Index 2, also $P(G) = 4$, die restliche 5 Gruppen kann man der folgenden Liste entnehmen.

Erzeuger und Relationen	$P(G)$		nicht $P(P(G)-1)$
$< v,w,x,y,z \mid v^2 = y, w^2 = x^2 = y^2 = z^2 = 1,$ $(w,v) = x, (x,v) = z, (y,w) = z >$	4	Computertest	$G' \cong V_4$
$< v,w,x,y,z \mid v^2 = y, y^2 = z, w^2 = x^2 =$ $= z^2 = 1, (w,v) = x, (x,v) = z, (y,w) = z >$	4	Computertest	$G' \cong V_4$
$< v,w,x,y,z \mid v^2 = y, w^2 = z, y^2 = z,$ $x^2 = z^2 = 1, (w,v) = x, (x,v) = z, (y,w) = z >$	4	Computertest	$G' \cong V_4$
$< v,w,x,y,z \mid y^2 = z, v^2 = w^2 = x^2 = z^2 = 1,$ $(w,v) = y, (x,v) = z, (y,v) = z, (y,w) = z >$	4	Computertest	$G' \cong Z_4$
$< v,w,x,y,z \mid w^2 = z, y^2 = z, v^2 = x^2 =$ $= z^2 = 1, (w,v) = y, (x,v) = z, (y,v) = z, (y,w) = z >$	4	Computertest	$G' \cong Z_4$

Eine in diesem Zusammenhang besonders interessante Gruppe ist die A_5 als erste nicht abelsche einfache Gruppe. Nach einem Satz in [3] ist $P(A_5) > 4$, da alle Gruppen der mit $P(G) = 4$ auflösbar sind. Satz 3 liefert als weitere Abschätzung jedoch nur $P(A_5) \leq P(D_5) \cdot |A_5 : D_5| = 4 \cdot 5 = 20$. Mit Hilfe des Computers läßt sich für $n = 7$ noch relativ schnell ein Gegenbeispiel bestimmen :

$$x_1 = (15432), x_2 = (13425), x_3 = (123), x_4 = (135),$$

$$x_5 = (12435), x_6 = (12345), x_7 = (13)(25).$$

Eine Überprüfung von $P(A_5) = 8$ konnte nocht nicht abgeschlossen werden, da die Komplexität der Frage entweder eine theoretische Lösung oder zumindest einen verbesserten Alogrithmus erfordert.

Literaturverzeichnis

[1] Bianchi,M., Brandl,R., Mauri,A.G.B., On the 4-permutational property, Archiv der Mathematik, Vol. 48, S. 281-285, 1987

[2] Curzio,M., Longobardi, P., Mercede, M., Robinson, D.J.S., A permutational property of groups, Archiv der Mathematik, Vol. 44, S. 385-389, 1985

[3] Curzio,M., Longobardi, P., Maj, M., Su di problema combinatorio in teoria dei gruppi, Atti Acc. Lincei. Rend. Fis. VIII, 74, S. 136-142, 1983

[4] Huppert, B., Endliche Gruppen I, Heidelberg, Berlin, New York, 1967