SULLA PROPRIETA' DI PERMUTABILITA' NEI GRUPPI E NEI SEMIGRUPPI

G. PIRILLO

Riassunto. In questa nota sono presentate alcune osservazioni su recenti risultati sui gruppi e sui semigruppi permutabili ed in particolare sulla soluzione di un problema proposto da Curzio.

Sia S un semigruppo ed n un intero ($n \geq 2$). Si dice che S ha la proprietà P_n se per ogni $x_1,\dots,x_n \in S$ esiste una permutazione σ di $\{1,\dots,n\}$, $\sigma \neq id$, tale che

$$x_1 \dots x_n = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}.$$

Si dice che S ha la proprietà P se esiste un intero n tale che S ha la proprietà P_n.

Si dice che S ha la proprietà P_n^* se per ogni $x_1,\dots,x_n \in S$ esistono due permutazioni σ e τ di $\{1,\dots,n\}$, $\sigma \neq \tau$, tali che

$$x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} = x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n)}.$$

Si dice che S ha la proprietà P* se esiste un intero n tale che S ha la proprietà P_n^*.

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n} = 0.$$

Sia $n\geq 2$ e $k(n)$ [risp $k^*(n)$] il più piccolo intero tale che ogni gruppo di ordine n ha proprietà $P_{k(n)}$ [risp. $P^*_{k^*(n)}$].

Si ha ovviamente

$$k^*(n)\leq k(n)\leq n.$$

Mentre è facile vedere che esiste ed è zero il

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^*(n)}{n}$$

il corrispondente problema per la funzione k, posto da Curzio in [1], è stato solo recentemente risolto; vale infatti (si veda [7]):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n} = 0.$$

Ci preme sottolineare che la "chiave" della soluzione del problema appena citato si trova essenzialmente in un risultato di G.A. Miller [6].

Il fatto poi che $\frac{k(p)}{p} = \frac{2}{p}$ per ogni primo p ha fornito un'utilissima informazione "a priori", che manca nel caso del corrispondente problema per i semigruppi.

Infatti se con $h(n)$ indichiamo il più piccolo intero tale che ogni semigruppo di ordine n ha la proprietà $P_{h(n)}$, abbiamo $h(n)> 2$ per ogni $n\geq 2$. Ma c'è di più. Infatti $h(n+x)\geq h(n)$ per ogni coppia n, x di interi positivi, $n\geq 2$ (se S è un semigruppo di ordine n, se ne può facilmente costruire uno di ordine n+x contenente S come sottosemigruppo).

2. Permutabilità e risolubilità.

I risultati già in letteratura sui gruppi aventi la proprietà P suggeriscono la seguente domanda: qual'è il più grande intero n tale che se un gruppo G ha la proprietà P_n allora G è risolubile?

Questo problema è strettamente connesso con quello del calcolo del più piccolo intero k tale che A_5 (il gruppo alterno su 5 oggetti) ha la proprietà P_k.

Fino ad oggi questi problemi sono senza risposta e si dispone solo di una limitazione superiore assai grossolana: il più grande intero n tale che P_n assicura la risolubilità è al più 19. Infatti A_5 ha la proprietà P_{20} (A_4 ha la proprietà P_4 ed ha indice 5 in A_5).

3. Permutabilità e proprietà combinatorie delle parole.

Un primo esempio di semigruppo infinito, finitamente generato, periodico con la proprietà P^* é stato dato da Restivo in [9], usando le proprietà dei fattori speciali della parola di Fibonacci; un altro esempio é stato fornito da de Luca e Varricchio in [2], usando le proprietà dei fattori speciali della parola di Thue.

Dividendo i fattori della parola di Thue in due classi, quelli con "eccesso sinistro ambiguo" e quelli con "eccesso sinistro unico" (si veda [8]), si può dimostrare che questa parola non contiene fattori del tipo fff (e nemmeno del tipo avava). L'assenza di questo tipo di fattori nella parola di Thue era già nota, ma la dimostrazione di [8] é più semplice di quelle già apparse in letteratura.

Infine, partendo da una opportuna parola infinita su due lettere e distinguendo fra fattori con "eccesso sinistro ambiguo" e con "eccesso sinistro unico", si può costruire (si vedano [4] e [5]) un semigruppo infinito, finitamente generato periodico con la proprietà P_3^*.

4. Prodotto diretto.

Uno dei problemi più impegnativi sui semigruppi aventi la proprietà P sembra essere il seguente: dati due semigruppi S e T aventi la proprietà P, il prodotto diretto SxT ha anch'esso la proprietà P?

Per ora si hanno solo risposte parziali a questa domanda. Ad esempio, come conseguenza di un risultato di [3], si ha che se S è un semigruppo con la proprietà P e T è un semigruppo finito allora anche SxT ha la proprietà P.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

1. M.CURZIO, Sul problema di Burnside, Quaderno del Seminario di Geometrie Combinatorie, Istituto di Matematica Applicata, 8, Univ. L'Aquila, marzo 1985.

2. A. de LUCA and S. VARRICCHIO, Some combinatorial properties of the Thue-Morse sequence and a problem in semigroups, accettato per la pubblicazione su "Theoretical Computer Science".

3. J.JUSTIN-G.PIRILLO, Comments on the Permutation Property for Semigroups, presentato per la pubblicazione su "Semigroup Forum".

4. J.JUSTIN-G.PIRILLO, Infinite Words and a Problem in Semigroup Theory, in preparazione.

5. J.JUSTIN-G.PIRILLO, Infinite Words and Permutation Properties, in preparazione.

6. G.A.MILLER, On an important theorem with respect to the operation groups of order p^{α}, p being any prime number, The messanger of mathematics, vol.XXVII (1897-98), 119-121.

7. B.PIOCHI-G.PIRILLO, Sur une propriété de permutabilité des groupes finis, presentato per la pubblicazione sui "C.R.Acad.Sci. Paris".

8. G.PIRILLO, On Some Properties of the Thue Infinite Word, comunicazione per Combinatorics '88.

9. A. RESTIVO, Permutation properties and the Fibonacci semigroup, accettato per la pubblicazione su "Semigroup Forum".

GIUSEPPE PIRILLO
IAGA-IAMI CNR
Viale Morgagni 67/A
50134 FIRENZE
ITALIA