Une remarque sur le problème de Steiner

Germain Kreweras, Paris.

Un "système (triple) de Steiner" sur un ensemble E de cardinal n est un système de n(n-1)/6 "triplets" (parties de cardinal 3) tel que chacune des n(n-1)/2 "paires" (parties de cardinal 2) soit incluse dans l'un d'entre eux. Pour qu'il existe un tel système, une condition évidemment nécessaire est que n soit congru à 1 ou à 3 modulo 6 . On s'est posé, et l'on a résolu depuis longtemps par l'affirmative, le problème de savoir si cette condition était suffisante, ce qui est beaucoup moins évident. Un bon exposé historique se trouve dans le livre de Marshall Hall, "Combinatorial Theory" (Blaisdell, 1967).

Convenons de dire qu'un système de Steiner est circulaire si l'on peut disposer les éléments {0,1,...,n-1} de E aux sommets d'un polygone régulier de n côtés de telle façon que les n(n-1)/6 triplets du système puissent se déduire de h d'entre eux par des rotations de $2k\Pi/n$. Cela exige évidemment que $h = (n-1)/6$, ou $n = 6h+1$; un peu de précaution s'impose de nouveau pour montrer que cette condition suffit.

Les choses se compliquent lorsque l'on cherche non plus seulement à démontrer l'existence de solutions pour h donné, mais à les dénombrer. Il est alors commode de formuler le problème comme suit : combien existe-t-il de partitions de l'ensemble {1,2,...,3h} en h "triangles", étant entendu qu'un triangle se définira comme un ensemble de trois entiers tels que : ou bien le plus grand entier est la somme des deux autres, ou bien la somme des trois est $6h+1$.

Le problème est trivial pour $h = 1$ puisque {1,2,3} est un triangle ; on obtient ainsi le système de Steiner le plus célèbre, unique pour $n = 7$: {0,1,3}, {1,2,4}, {2,3,5}, {3,4,6}, {4,5,0}, {5,6,1}, {6,0,2} .

Il y a de nouveau une solution unique pour $h = 2$ ($n = 13$), car {1,2,3,4,5,6} ne peut se partitionner que d'une seule manière en 2 triangles : {1,3,4} et {2,5,6} ($4 = 1+3$ et $2+5+6 = 13$).

Pour aborder l'étude du cas général (h entier positif quelconque), il peut être utile de s'intéresser au graphe G_h défini comme suit. Les s_h sommets de G_h sont les <u>triangles</u> de $\{1,2,\ldots,3h\}$.
Les a_h arêtes de G_h sont définies par la <u>compatibilité</u> des deux triangles correspondants pour une partition, c'est-à-dire par leur disjonction (intersection vide).

Le nombre finalement cherché est le nombre de <u>h-cliques</u> du graphe G_h . Ce nombre n'a pu jusqu'à présent être calculé que pour $h \leqslant 6$:

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	...
1	1	4	15	64	445	...

Par contre certaines autres propriétés de G_h paraissent se prêter plus facilement à des dénombrements généraux. Nous donnons ci-après les principaux résultats.

1°) Le nombre s_h de sommets est toujours égal à $h(3h-2)$; se démontre sans grande difficulté.

2°) Les sommets de G_h sont "presque tous" de même degré, égal (pour $h \geqslant 2$) à $(h-2)(3h-5)+1$; un petit nombre de sommets ("singuliers") sont de degré inférieur, en général d'une unité seulement. (Il s'agit d'un fait "expérimental", qui reste à démontrer). Exemple : G_8 , qui a 176 sommets, en a 154 de degré 115, 21 de degré 114 et 1 de degré 112.

3°) Le nombre total d'arêtes, a_h , est égal à $\binom{h}{2}(3h-5)^2$, sauf si $h \equiv -1 \pmod{5}$ ($h \in \{4,9,14,\ldots\}$), auquel cas $a_h = \binom{h}{2}(3h-5)^2+1$. Ce dernier cas est caractérisé par le fait que n est multiple de 5 : si $h = 5k-1$, $n = 5(6k-1)$. Nous avions d'abord conjecturé que ce fait résultait de la présence dans n d'un facteur premier congru à $-1 \pmod{6}$; mais nous avons vérifié que pour $n = 121 = 11 \times 11$ ($h = 20$), on a bien .

$$a_h = \binom{h}{2}(3h-5)^2 = 574750 \quad \text{(et non 574751).}$$