

RAMANUJANS TAU-FUNKTION

VON

ANDREAS GUTHMANN

1. Definition und Berechnung

Ramanujans Funktion $\tau : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ ist definiert durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24}, \quad |x| < 1,$$

also $\tau(1) = 1$, $\tau(2) = -24$, $\tau(3) = 252$ usw.

Zunächst wird man sich überlegen, wie man τ am besten berechnet, denn das direkte Ausmultiplizieren des unendlichen Produktes bzw. eines endlichen Teilproduktes davon scheint nicht sehr geschickt zu sein.

Wir setzen

$$\Delta(x) := x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24}, \quad |x| < 1.$$

Logarithmische Differentiation gibt

$$\frac{\Delta'}{\Delta}(x) = \frac{1}{x} - 24 \sum_{n,m=1}^{\infty} n x^{mn-1}$$

oder

$$\frac{x\Delta'(x)}{\Delta(x)} = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)x^n,$$

wo

$$\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d.$$

Koeffizientenvergleich liefert dann

$$(n-1)\tau(n) = -24 \sum_{j=1}^{n-1} \tau(j)\sigma_1(n-j), \quad n \geq 2.$$

Bezeichnen wir mit $W(n)$ die Anzahl der arithmetischen Operationen, die nötig sind, um $\tau(n)$ zu berechnen, so ist für diese Methode offenbar

$$W(n) = O(n^{2.5}),$$

da alle $\tau(j)$ für $j < n$ bekannt sein müssen und $\sigma_1(j)$ für $j \leq n$ in $O(n^{0.5})$ Schritten berechnet werden kann. Man kann sich die Arbeit etwas erleichtern, wenn man die Multiplikativität von τ benutzt. Sie wurde von Ramanujan vermutet und zuerst von Mordell[13] bewiesen. Es gilt also

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n) \text{ falls } (m, n) = 1.$$

(m, n) bezeichnet hier wie üblich den größten gemeinsamen Teiler von m und n . Daher genügt es, $\tau(p^n)$ für Primzahlen p und natürliche Zahlen n zu berechnen. Eine effektivere Methode erhält man mit Hilfe des Jacobi-Produktes

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Wie eben folgt[16]

$$(n-1)\tau(n) = \sum_{m=1}^{[b_n]} (-1)^{m+1} (2m+1) \left[n-1 - 9 \frac{m(m+1)}{2} \right] \tau\left(n-1 - \frac{m(m+1)}{2}\right),$$

wo $b_n = \frac{1}{2}(\sqrt{8n+1} - 1)$. Hier ist die Anzahl der Summanden $O(\sqrt{n})$, d.h. $W(n) = O(n^{1.5})$ ohne Benutzung der Multiplikativität. Zieht man einige nichttriviale Tatsachen aus der Theorie der Modulformen heran, so findet man noch eine dritte Möglichkeit zur Berechnung von $\tau(n)$, die auf einer von Petersson[14] stammenden expliziten Formel beruht. Für $\text{Im}(z) > 0$ schreiben wir

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n z}.$$

Δ ist eine Spitzenform vom Gewicht 12 zur Modulgruppe, d.h.

$$\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{12} \Delta(z), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}).$$

Bekanntlich[1,10] bildet die Menge S_{12} dieser Spitzenformen einen \mathbf{C} -Vektorraum der Dimension 1. Man zeigt nun leicht, daß die Poincaréreihe *

$$G_{12}(z) := \frac{1}{2} \sum_{c=-\infty}^{\infty} \sum_{d=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i Tz}}{(cz+d)^{12}}, \quad (c,d) = 1, \quad Tz = \frac{az+b}{cz+d},$$

ebenfalls ein nichttriviales Element von S_{12} ist. Also gibt es ein $\alpha \in \mathbf{C}$ mit

$$\Delta = \alpha G_{12}.$$

Andererseits fand Petersson 1932[14] für die Koeffizienten $c(n)$ in der Fourierentwicklung

$$G_{12}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n) e^{2\pi i n z}$$

* Wir benutzen hier das Symbol $\sum^!$ um eine eingeschränkte Summation anzudeuten.

eine Darstellung

$$n^{-\frac{11}{2}} c(n) = \delta_{1n} + 2\pi \sum_{q=1}^{\infty} \frac{S(n, q)}{q} J_{11}\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{q}\right)$$

mit der Besselfunktion

$$J_{11}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{11} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2j}}{j!(j+1)!}$$

und den Kloostersummen

$$S(n, q) = \sum_{h=1}^q \exp\left(\frac{2\pi i}{q}(nh + h')\right), \quad (h, q) = 1, \quad hh' \equiv 1(q).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} n^{-\frac{11}{2}} \tau(n) &= \alpha c(n) \\ &= \alpha \delta_{1n} + 2\pi \alpha \sum_{q=1}^{\infty} \frac{S(n, q)}{q} J_{11}(4\pi\sqrt{n}/q). \end{aligned}$$

Für $z \rightarrow 0$ ist nun $J_{11}(z) = O(z^{11})$, so daß zur Berechnung von $n^{-11/2}\tau(n)$ etwa $O(\sqrt{n})$ Terme genügen. Die Kloostersummen $S(n, q)$ können in $O(q^{1+\epsilon})$ und die Besselfunktion $J_{11}(z)$ für $z \geq 0$ in $O(1)$ Schritten berechnet werden. Insgesamt kann also $n^{-11/2}\tau(n)$ mit etwa $O(\sum_{q \leq \sqrt{n}} q^{1+\epsilon}) = O(n^{1+\epsilon})$ arithmetischen Operationen bei fester Genauigkeit berechnet werden. Dies kann für manche Zwecke (vgl. (4)) ausreichend sein. Die Berechnung von τ mit diesem Verfahren ist ebenfalls möglich, aber ein wenig aufwendiger, da J_{11} mit von n abhängiger Genauigkeit berechnet werden muß. Außerdem muß man ungefähr $n^{11/10}$ Terme der unendlichen Reihe berücksichtigen.

2. Abschätzungen für $|\tau(n)|$

Eine weitere Vermutung von Ramanujan war die Abschätzung

$$|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}}, \quad p \text{ Primzahl,}$$

die viele Untersuchungen veranlaßte. Ramanujan selbst [16] bewies $\tau(n) = O(n^7)$ und kurz danach zeigte Hardy [7] $\tau(n) = O(n^6)$. Dieses Ergebnis wurde im Laufe der Zeit verbessert und immer wieder war dazu eine neue Idee erforderlich. So fand Kloosterman 1927 [11] mit Hilfe der Kreismethode

$$\tau(n) = O(n^{6-\frac{1}{8}}),$$

Rankin 1939 [17] mit der Rankin-Selberg-Konvolution

$$\tau(n) = O(n^{6-\frac{1}{5}})$$

und Weil 1948[21] mit seiner Abschätzung für die Kloostersummen (die wiederum aus seinem Beweis der Riemannschen Vermutung für Kurven über endlichen Körpern folgt)

$$\tau(n) = O(n^{6-\frac{1}{4}+\epsilon}), \quad \epsilon > 0.$$

Schließlich konnte Deligne im Jahre 1974[3] die ursprüngliche Vermutung von Ramanujan beweisen, d.h. es gilt

$$\tau(p) = 2p^{\frac{11}{2}} \cos \theta_p, \quad p \text{ Primzahl, } \theta_p \text{ reell.}$$

Daraus und aus der Multiplikativität von τ folgt

$$|\tau(n)| \leq n^{\frac{11}{2}} d(n),$$

wobei $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n bedeutet. Wir schreiben

$$\tau^*(n) = n^{-\frac{11}{2}} \tau(n),$$

so daß also

$$|\tau^*(n)| \leq d(n)$$

für natürliche Zahlen n ist.

3. Dirichletreihen

In einer Reihe von Arbeiten[8,9,10] fand Hecke eine weitreichende Verallgemeinerung der Zetafunktion. Er zeigte nämlich, daß die aus den Fourierkoeffizienten der Spitzenform

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z}, \quad \operatorname{Im}(z) > 0$$

gebildete Dirichletreihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_0,$$

eine ähnliche Funktionalgleichung wie die Zetafunktion erfüllt. In unserem Fall

$$a(n) = \tau(n), \quad \varphi(s) = \varphi_{\tau}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s}$$

gilt folgendes:

Die Reihe für φ_{τ} konvergiert absolut für $\sigma > \sigma_a = \frac{13}{2}$ und definiert man die Funktion R durch

$$R(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \varphi_{\tau}(s),$$

so läßt sich

i) R zu einer ganzen Funktion der Ordnung 1 fortsetzen

und es gilt die

ii) Funktionalgleichung $R(s) = R(12-s)$.

Interessant sind bei Dirichletreihen immer die Nullstellen. Da R ganz ist und die Gammafunktion Pole an den nichtpositiven ganzen Zahlen hat, folgt

$$\varphi_\tau(-m) = 0 \quad , \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad ,$$

und das sind die trivialen Nullstellen. Da τ multiplikativ ist, hat φ_τ eine Darstellung als Eulerprodukt

$$\varphi_\tau = \prod_p \{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}\}^{-1} \quad , \quad p \text{ prim} \quad , \quad \sigma > \sigma_a$$

und folglich ist $\varphi_\tau(s) \neq 0$ falls $\sigma > \sigma_a$. Aus der Funktionalgleichung *ii)* folgt dann auch $\varphi_\tau(s) \neq 0$ falls $\sigma < 12 - \frac{13}{2} = \frac{11}{2}$, d.h. alle weiteren (nichttrivialen) Nullstellen liegen im kritischen Streifen

$$\frac{11}{2} \leq \sigma \leq \frac{13}{2}.$$

Aus *ii)* und dem Hadamardschen Produkt[2] ergibt sich, daß φ_τ im kritischen Streifen unendlich viele Nullstellen hat, die keinen endlichen Häufungspunkt haben, also diskret liegen.

Wir interessieren uns für die asymptotische Verteilung der nichttrivialen Nullstellen, also für

$$N(T) := \left| \left\{ \rho \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im}(\rho) \leq T \quad , \quad \frac{11}{2} \leq \operatorname{Re}(\rho) \leq \frac{13}{2} \quad , \quad \varphi_\tau(\rho) = 0 \right\} \right|$$

mit $T \rightarrow \infty$. Dabei werden alle Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt, solche auf den Ordinaten 0 und T mit dem Gewicht $\frac{1}{2}$. Wegen $\varphi_\tau(s) = \varphi_\tau(\bar{s})$ dürfen wir uns auf das Gebiet $\operatorname{Im}(s) = t \geq 0$ beschränken. Nach dem Vorgange von Littlewood[12] definieren wir eine Funktion S folgendermaßen:

Für $\sigma > \frac{13}{2}$ ist $\varphi_\tau(s) \neq 0$ und wir setzen

$$\log \varphi_\tau(s) := \log |\varphi_\tau(s)| + i \arg \varphi_\tau(s) \quad , \quad -\pi \leq \arg \varphi_\tau(s) < \pi.$$

Ist nun $\sigma < \frac{13}{2}$ und t nicht Ordinate einer Nullstelle, so definieren wir $\arg \varphi_\tau(\sigma + it)$ durch stetige Fortsetzung entlang der Geraden mit Imaginärteil $= t$, ausgehend von einem $s_0 = \sigma_0 + it$ mit $\sigma_0 > \frac{13}{2}$. Wir setzen dann

$$S(t) := \frac{1}{\pi} \arg \varphi_\tau(6 + it).$$

Ist t Ordinate einer Nullstelle, so sei

$$S(t) = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{S(t + \epsilon) + S(t - \epsilon)\}.$$

Anwendung des Argumentprinzips, d.h. Integration von $\frac{R'}{R}$ über das Rechteck mit den Ecken $\frac{11}{2} - a$, $\frac{13}{2} + a$, $\frac{13}{2} + a + iT$, $\frac{11}{2} - a + iT$, wo $a > 0$, $T > 0$, gibt

$$N(T) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \Gamma(6 + iT) - \frac{T}{\pi} \log 2\pi + S(T) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{\pi} T \log T - \frac{T}{\pi} \log 2\pi + \frac{11}{4} + O(\log T), \quad T \rightarrow \infty, \quad (2)$$

da, wie wir später sehen werden,

$$S(T) = O(\log T), \quad T \rightarrow \infty$$

gilt. Die Bedeutung der Konstanten $\frac{11}{4}$ wird ebenfalls bald klar werden.

Man sieht also, daß φ_τ viele Nullstellen im kritischen Streifen hat. Aus der Funktionalgleichung ii) folgt, daß sie symmetrisch zur Geraden $\sigma = 6$ liegen und die *Riemannsche Vermutung für φ_τ* besagt eben

$$\operatorname{Re}(\rho) = 6 \text{ falls } \rho \text{ eine nichttriviale Nullstelle von } \varphi_\tau \text{ ist.}$$

Es ist kaum notwendig, darauf hinzuweisen, daß auch hier wie im Fall der Zetafunktion bisher weder ein Beweis noch ein Gegenbeispiel gefunden wurde.

Wie findet man nun Nullstellen auf der kritischen Geraden $\sigma = 6$? Die Funktionalgleichung von R impliziert

$$\varphi_\tau(s) = (2\pi)^{2s-12} \frac{\Gamma(12-s)}{\Gamma(s)} \varphi_\tau(12-s)$$

und setzen wir $s = 6 + it$, so folgt

$$\varphi_\tau(6 + it) = (2\pi)^{2it} \frac{\Gamma(6-it)}{\Gamma(6+it)} \varphi_\tau(6-it) = e^{-2i\vartheta} \varphi_\tau(6-it)$$

mit der reellen Funktion

$$\vartheta = \vartheta(t) = \operatorname{Im} \log \Gamma(6 + it) - t \log 2\pi. \quad (3)$$

Also ist

$$Z(t) := e^{i\vartheta} \varphi_\tau(6 + it) = e^{-i\vartheta} \varphi_\tau(6 - it) = \overline{Z(t)}$$

eine reelle Funktion der reellen Variablen t und man findet Nullstellen von φ_τ auf der kritischen Geraden durch Vorzeichenwechsel von Z !

Wie berechnet man also Z ? Wir definieren die unvollständige Gammafunktion durch

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt, \quad \operatorname{Re}(a) > 0, \quad \operatorname{Re}(x) > 0$$

und die normierte unvollständige Gammafunktion

$$Q(a, x) = \frac{\Gamma(a, x)}{\Gamma(a)},$$

so daß also

$$Q(a, 0) = 1, \quad Q(a, \infty) = 0$$

ist. Zunächst zeigt man, daß R im wesentlichen die Mellintransformation von Δ ist, d.h. es gilt

$$R(s) = \int_0^{\infty} \Delta_0(x) x^{s-1} dx, \quad \sigma > \sigma_a,$$

wobei hier $\Delta_0(x) = \sum \tau(n) e^{-2\pi n x} = \Delta(ix)$ gesetzt wurde. Wie üblich wird das Integral bei $x = 1$ aufgespalten und die Funktionalgleichung von Δ_0 angewandt. Nach einigen Umformungen folgt dann

$$Z(t) = 2\operatorname{Re} \left\{ e^{i\vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-6-it} Q(6+it, 2\pi n e^{i\psi}) \right\},$$

wobei ψ mit $|\psi| < \frac{\pi}{2}$ noch geeignet gewählt werden kann. Entscheidend ist nun, daß $Q(a, x)$ für $a \rightarrow \infty$ effektiv berechnet werden kann, falls $\lambda := \frac{x}{a}$ reell und positiv ist. Wir benutzen dafür eine asymptotische Entwicklung von $Q(a, x)$ für $a \rightarrow \infty$, die gleichmäßig in x gilt und die im einfachsten Fall von N.M. Temme [19, 6] stammt. Man beachte, daß ein ähnliches Verfahren zur Berechnung von φ_τ bei Ferguson et al. [4] wegen numerischer Instabilitäten nicht den gewünschten Erfolg hat. Die Bedingung $\lambda > 0$ ist bei uns äquivalent zu

$$\frac{2\pi n e^{i\psi}}{6+it} > 0, \quad \text{d.h. } \psi = \arg(6+it),$$

so daß $\psi \sim \frac{\pi}{2}$ für $t \rightarrow +\infty$. Wir setzen also $\lambda(n) := \frac{2\pi n}{|6+it|}$ und verwenden außerdem τ^* statt τ und haben dann

$$Z(t) = 2\operatorname{Re} \left\{ e^{i\vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} \tau^*(n) n^{-\frac{1}{2}-it} Q(s, \lambda(n)s) \right\}, \quad s = 6+it, \quad t > 0. \quad (4)$$

Diese Formel hat sich in den Anwendungen gut bewährt. Für $Q(s, \lambda s)$ können explizite Abschätzungen angegeben werden [5] und doppelte Arithmetik ist in den meisten Fällen (zumindest, wenn t nicht zu groß ist, etwa $t \leq 5000$) nicht erforderlich.

4. Das Gramsche Gesetz und Turings Methode

In der Reihe in (4) betrachten wir den Term mit $n = 1$. Ist t groß, so ist $\lambda(1) = \frac{2\pi}{|6+it|}$ klein und $Q(s, \lambda s)$ liegt nahe bei 1, so daß

$$Z(t) \approx 2\operatorname{Re} \cos \vartheta(t) + 2\operatorname{Re} \left\{ e^{i\vartheta} \sum_{n=2}^{\infty} \tau^*(n) n^{-\frac{1}{2}-it} Q(s, \lambda(n)s) \right\}$$

ist. Nun treten in dieser unendlichen Summe nur noch oszillierende Terme auf, die von $n^{-\frac{1}{2}-it}$, $n \geq 2$, stammen und bei deren Summation man einige Auslöschung erwarten kann. An den Extremstellen von $\cos \vartheta(t)$, d.h. an den Punkten

$$t_\nu \quad \text{mit} \quad \vartheta(t_\nu) = \pi\nu \quad , \quad \nu \in \mathbb{Z}$$

($\vartheta(t)$ ist streng monoton steigend für $t \geq 0$) wird also oft das Vorzeichen von Z gleich dem von $\cos \vartheta$ sein. Die t_ν heißen Grampunkte und das Gramsche Gesetz

$$\operatorname{sgn}(Z(t_\nu)) = \operatorname{sgn} \cos \vartheta(t_\nu) = (-1)^\nu$$

besagt gerade, daß zwischen zwei Grampunkten eine Nullstelle ungerader Ordnung von Z liegt. Numerische Untersuchungen ergeben, daß das Gramsche Gesetz häufig erfüllt ist. Die erste Ausnahme findet man bei $\nu = 103$ mit $Z(t_{103}) = 0.46$ und bis $t_{1000} = 811.45$ gibt es insgesamt 37 Abweichungen. Damit hat man eine Methode, eine untere Schranke für die Anzahl der Nullstellen in einem Intervall $[0, T]$ zu finden. Man berechne dazu im voraus die Grampunkte t_ν in $[0, T]$ und dann $Z(t_\nu)$. Ist das Gramsche Gesetz einmal nicht erfüllt (man kann zeigen, daß es unendlich viele Ausnahmen gibt, aber wie gesagt, sind diese verhältnismäßig selten), kann man versuchen Z an anderen geeigneten Punkten zu berechnen, um etwa "überzählige" oder "fehlende" Nullstellen zu lokalisieren. Wir können hier aber nicht näher darauf eingehen.

Angenommen, im Intervall $[0, T]$ seien k Nullstellen gefunden. Wie kann man sicher sein, daß alle gefunden wurden? Ist nämlich $N(T) = k$, so liegen alle Nullstellen ρ von φ_τ mit $0 \leq \operatorname{Im}(\rho) \leq T$ auf der kritischen Geraden und die Riemannsche Vermutung ist für $[0, T]$ verifiziert.

Eine elegante Methode dieses Problem zu lösen stammt von Turing [20]. Sie beruht auf einer Abschätzung von Littlewood [12] für

$$S_1(T) := \int_0^T S(t) dt \quad , \quad T > 0 .$$

Littlewood zeigte (für die Zetafunktion, aber der Beweis läßt sich ebenso auf φ_τ übertragen)

$$S_1(T) = O(\log T) \quad , \quad T \rightarrow \infty$$

und man erkennt nun auch den Sinn der Konstanten $\frac{11}{4}$ in (2). Die O-Konstante kann explizit berechnet werden und man erhält [5]

$$|S_1(T_1) - S_1(T)| < 0.14 \log T_1 + 5.67 \quad , \quad 1 < T < T_1 . \quad (5)$$

Nun sei $Z(T) \neq 0$, $N(T) = k + \delta$ mit $\delta \geq 0$ ganz. Wir möchten $\delta = 0$ zeigen. Sei $T_1 > T$ und im Intervall $[T, T_1]$ berechne man Nullstellen

$$T < \gamma_{k+1} < \dots < \gamma_{k+p} < T_1 \quad , \quad p \geq 1 .$$

Dann ist offenbar

$$N(\gamma_{k+j} + 0) \geq N(T) + j \geq k + j + \delta \quad , \quad 1 \leq j \leq p.$$

Daraus folgt nach kurzer Rechnung

$$\int_T^{T_1} N(t) dt \geq (k + \delta)(T_1 - T) + pT_1 - \sum_{j=1}^p \gamma_{k+j}. \quad (6)$$

Nach (1) und (3) ist

$$S(t) = N(t) - \frac{1}{\pi} \vartheta(t) \quad ,$$

also

$$\int_T^{T_1} S(t) dt = \int_T^{T_1} N(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_T^{T_1} \vartheta(t) dt \quad . \quad (7)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite wird mit (6) nach unten abgeschätzt und das zweite kann z.B. mit Stirlings Formel beliebig genau berechnet werden. Jedenfalls erhält man eine untere Schranke für $S_1(T_1) - S_1(T)$. Durch geeignete Wahl von T_1 kann man versuchen, einen Widerspruch zu (5) zu finden, falls $\delta \geq 1$ ist. In diesem Fall ist $\delta = 0$ und die Riemannsche Vermutung für $[0, T]$ bewiesen. Erhält man keinen Widerspruch, so läßt sich nichts aussagen; man versucht es dann am besten mit neuen Parametern T und T_1 . Wir geben ein Beispiel für die Anwendung dieser Methode. Im Ordinatenintervall $0 \leq t \leq 50$ findet man 20 Nullstellen, beginnend mit $\gamma_1 = 9.2$. Wir wählen also $T = 50$, $T_1 = 70$ und finden $p = 14$ Nullstellen in $[T, T_1]$ mit

$$\sum_{j=1}^{14} \gamma_{20+j} = 844.5 \quad .$$

Mit (6) und (7) findet man dann

$$\int_T^{T_1} S(t) dt \geq 0.39 + 20\delta$$

und die Annahme $\delta \geq 1$ führt mit (5) sofort zu einem Widerspruch. Also ist $\delta = 0$ und alle Nullstellen ρ von φ_τ mit $0 \leq \text{Im}(\rho) \leq 50$ liegen auf der kritischen Geraden. Wir bemerken noch, daß wir hier eine Variante von Turings Methode angegeben haben, um einige Flexibilität bei den Anwendungen zu gewährleisten. Das ursprüngliche Verfahren von Turing läßt sich natürlich auch ohne weiteres übertragen.

5. Verallgemeinerungen

Die Ausführungen der Abschnitte 3 und 4 lassen sich unschwer auf eine allgemeinere Klasse \mathbf{D} von Dirichletreihen übertragen [5]. Sei

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}, \quad s = \sigma + it,$$

eine Dirichletreihe, die folgenden Bedingungen genügt:

- i) Die Reihe für φ konvergiert absolut für $\sigma > \sigma_a$.
 ii) Es gibt Konstanten $A \geq 0$, $B > 0$, $l > 0$, so daß die durch

$$R(s) = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^{-\frac{s+A}{B}} \Gamma\left(\frac{s+A}{B}\right) \varphi(s)$$

definierte Funktion R sich zu einer in \mathbf{C} holomorphen Funktion der Ordnung 1 fortsetzen läßt.

iii) R erfüllt die Funktionalgleichung

$$R(s) = \gamma \overline{R(r - \bar{s})}$$

mit $\gamma \in \mathbf{C}$, $|\gamma| = 1$, $r > 0$.

Wir erhalten hier (mit $\gamma = e^{i\delta}$, $-\pi \leq \delta < \pi$)

$$\vartheta(t) = -\frac{\delta}{2} - \frac{t}{B} \log \frac{2\pi}{l} + \operatorname{Im} \log \Gamma\left(\frac{r}{2B} + \frac{A}{B} + i\frac{t}{B}\right),$$

und

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)} \varphi\left(\frac{r}{2} + it\right)$$

ist eine reelle Funktion der reellen Variablen t und es gilt für $\xi \in \mathbf{C}$, $|\xi| = 1$, $\operatorname{Re}(\xi) > 0$

$$Z(t) = 2\operatorname{Re} \left\{ e^{i\vartheta(t)} \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-\frac{r}{2} - it} Q\left(\frac{r}{2B} + \frac{A}{B} + i\frac{t}{B}, \frac{2\pi n^B}{l} \xi\right) \right\}.$$

Wir geben einige Beispiele für Funktionen aus \mathbf{D} .

1. Sei $\chi : (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^* \rightarrow \mathbf{C}$ ein primitiver Charakter mod $k \geq 3$; die entsprechende L -Funktion

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s}, \quad \sigma > 1,$$

ist dann in \mathbf{D} mit den Parametern $\sigma_a = 1$, $l = 2k$, $A = \frac{1}{2}[1 - \chi(-1)]$, $B = 2$, $r = 1$, $\gamma = k^{-1/2}\tau(\chi)$, wobei wie üblich $\tau(\chi)$ die zu χ gehörende Gaußsche Summe

$$\tau(\chi) = \sum_{m=1}^k \chi(m)\zeta_k^m, \quad \zeta_k = \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right),$$

ist.

2. Sei $H = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}$ die hyperbolische Ebene, $G = SL_2(\mathbb{Z})$ die Modulgruppe und $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ eine Spitzenform vom Gewicht k , d.h.

a) f ist analytisch.

$$b) f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z), \text{ falls } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G.$$

$$c) f \text{ hat eine Fourierreiheentwicklung } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{2\pi inz}.$$

Sei k gerade. Die Dirichletreihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$$

hat dann die Parameter [1,10] $\sigma_a = k+1$, $A = 0$, $B = 1$, $l = 1$, $\gamma = (-1)^{k/2}$, $r = k$. Besonders interessant ist der Fall, daß φ Eigenfunktion der Heckealgebra ist (das trifft z.B. für $k = 12$ zu, wo $a = \tau$ ist). Die Funktion a ist dann multiplikativ und nach Deligne [3] gilt

$$|a(p)| \leq 2p^{\frac{k-1}{2}}, \quad p \text{ prim,}$$

so daß sich $\varphi(s)$ wieder effektiv berechnen läßt. Der \mathbb{C} -Vektorraum S_k der Spitzenformen hat die Dimension $\kappa = [k/12]$ wenn $k \equiv 2(12)$ und $\kappa = [k/12] + 1$ wenn $k \not\equiv 2(12)$. Bezüglich des Petersson'schen Skalarproduktes hat S_k eine Orthonormalbasis $\varphi_1, \dots, \varphi_\kappa$ aus Eigenfunktionen der Heckealgebra [1,15]. Ist

$$\varphi_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_j(n)e^{2\pi inz}, \quad 1 \leq j \leq \kappa,$$

so ist

$$\tau_k(n) := \sum_{j=1}^{\kappa} a_j(n)$$

eine ganze Zahl und kann etwa mit der Selbergschen Spurformel [18,22] effektiv berechnet werden. Man vergleiche dazu auch die Arbeit von Ferguson et al. [4]. Mit geeigneten Modifikationen lassen sich diese Ergebnisse auch auf Kongruenzuntergruppen ausdehnen.

3. Sei $q > 3$, χ ein primitiver Charakter mod q und $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)e^{2\pi inz}$ wieder eine Spitzenform aus S_k , die Eigenfunktion der Heckealgebra ist. Dann ist, wie Hecke [10] zeigte auch

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)a(n)n^{-s}$$

aus \mathbb{D} mit den Parametern $\sigma_a = (k+1)/2$, $A = 0$, $B = 1$, $l = q$, $r = k$, $\gamma = \chi(-1)(-1)^{k/2}q^{-1/2}\tau(\chi)$, wobei $\tau(\chi)$ wieder die zu χ gehörende Gaußsche Summe ist.

4. Schließlich sei $G(\lambda)$ für $0 < \lambda < 2$ die von den beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von $SL_2(\mathbb{R})$. $G(\lambda)$ heißt Hecke Gruppe und für $\lambda = 2 \cos \frac{\pi}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$, gibt es automorphe Funktionen wie im Fall der Modulgruppe für die $q = 3$ ist [10]. Sei $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ eine Spitzenform vom Gewicht k für $G(\lambda)$:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varepsilon(cz+d)^k f(z), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\lambda), \quad |\varepsilon| = 1$$

und $f(z) = \sum a(n)e^{2\pi inz/\lambda}$. Die Dirichletreihe hat dann die Parameter [10] $l = \lambda$, $A = 0$, $B = 1$, $r = k$. Abgesehen von den Fällen $q = 3, 4, 6$ sind aber die $G(\lambda)$ nicht arithmetisch und schöne Eigenschaften der Fourierkoeffizienten nicht zu erwarten.

5. Zu guter Letzt geben wir ein Beispiel für eine Dirichletreihe, bei der die Riemannsche Vermutung falsch ist und damit schließt sich der Kreis. Es sei wieder

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)e^{2\pi inz}, \quad \text{Im}(z) > 0.$$

Mit Δ ist auch Δ^2 eine Spitzenform zur Modulgruppe, jedoch vom Gewicht 24. Natürlich ist Δ^2 keine Eigenfunktion der Heckeoperatoren und die Fourierkoeffizienten $\tau^{(2)}$ in der Entwicklung

$$\Delta^2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \tau^{(2)}(n)e^{2\pi inz}$$

sind auch nicht multiplikativ. Die Dirichletreihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \tau^{(2)}(n)n^{-s}$$

ist in \mathbb{D} und läßt sich mit den angegebenen Methoden berechnen. Der Koeffizient $\tau^{(2)}(1)$ verschwindet aber, so daß das Gramsche Gesetz nicht gelten kann. In der Tat zeigt eine Rechnung, daß $e^{i\theta}\varphi(12+it) = Z(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq 100$ nur 40 Nullstellen, beginnend mit $\gamma_1 = 14.6$ hat, während in diesem Intervall die Grampunkte $t_1 = 4.9$ bis $T_{60} = 98.0$ liegen. Die "fehlenden" 20 Nullstellen liegen also nicht auf der kritischen Geraden, d.h. die Riemannsche Vermutung gilt nicht für φ . Ein ähnliches Verhalten ist auch von gewissen Epsteinschen Zetafunktionen bekannt.

Diese Untersuchungen deuten darauf hin, daß für die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung nicht nur die Funktionalgleichung von $\varphi \in \mathbb{D}$, sondern auch die Multiplikativität von α , d.h. die Existenz eines Eulerproduktes für φ ausschlaggebend ist.

Anschrift des Autors:
Andreas Guthmann
Fachbereich Mathematik
Universität Kaiserslautern
Erwin-Schrödinger-Straße
D-6750 Kaiserslautern

Literatur

- [1] Apostol, T.M., Modular functions and Dirichlet series in number theory, Springer, Berlin 1976.
- [2] Davenport, H., Multiplicative number theory, Springer, Berlin 1980.
- [3] Deligne, P., La conjecture de Weil I, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **53**, 273-307(1974).
- [4] Ferguson, H.R.P., Major, R.D., Powell, K.E., Throolin, H.G., On zeros of Mellin transforms of cusp forms, Math. Comp. **42**, 241-255(1984).
- [5] Guthmann, A., Berechnung von Dirichletreihen mit einfachem Gammafaktor, Manuskript 1986.
- [6] Guthmann, A., Asymptotische Entwicklungen für unvollständige Gammafunktionen, Sem. Lotharingien Comb., **18**, Sept. 1987.
- [7] Hardy, G.H., Note on Ramanujan's arithmetical function $\tau(n)$, Proc. Cambridge Phil.Soc. **23**, 675-680(1927). Diese Arbeit wurde 1918 geschrieben, aber erst 1927 veröffentlicht.
- [8] Hecke, E., Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Ann. **112**, 664-699(1936).
- [9] Hecke, E., Über die Modulformen und Dirichletreihen mit Eulerscher Produktentwicklung I. Math. Ann. **114**, 1-28(1937), II. Math. Ann. **114**, 316-351(1937).
- [10] Hecke, E., Lectures on Dirichlet series, modular functions and quadratic forms, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1983.
- [11] Kloosterman, H.D., Asymptotische Formeln für die Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5**, 337-352(1927).
- [12] Littlewood, J.E., On the zeros of the Riemann zeta function, Proc. Camb. Philos. Soc. **22**, 295-318(1924).
- [13] Mordell, L.J., On Mr Ramanujan's empirical expansions of modular functions, Proc. Cambridge Philos. Soc. **19**, 117-124(1917).
- [14] Petersson, H., Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Funktionen, Acta Math. **58**, 169-215(1932).
- [15] Petersson, H., Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen, Jahresbericht DMV **49**, 49-75(1939).
- [16] Ramanujan, S., On certain arithmetical functions, Trans. Cambridge Philos. Soc. **22**, 159-184(1916).

- [17] Rankin, R.A., Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar functions, II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms, Proc. Cambridge Philos. Soc. **35**, 357-372(1939).
- [18] Selberg, A., Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Ind. Math. Soc. **20**, 48-87(1956).
- [19] Temme, N.M., The asymptotic expansion of the incomplete gamma functions, SIAM J. Math. Anal. **10**, 757-766(1979).
- [20] Turing, A., Some calculations of the Riemann zeta-function, Proc. London Math. Soc.(3) **3**, 99-117(1953).
- [21] Weil, A., On some exponential sums, Proc. Acad. Sci. USA **34**, 204-207(1948).
- [22] Zagier, D.B., The Eichler-Selberg trace formula for $SL_2(\mathbf{Z})$, in: Lang, S., Introduction to modular forms, Springer, Berlin 1976, S. 44-54, Correction: Modular forms of one variable VI, Bonn 1976, LNM 627, S. 171-173.