

# Zur Abzählung periodischer Pflasterungen der euklidischen Ebene

Reinhard Franz

## Einleitung

A. W. M. Dress stellte in [Dress-3] eine Methode zur Klassifikation äquivarianter Pflasterungen der Ebene vor, die es im Prinzip gestattet, zu jeder gegebenen natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  sämtliche Pflasterungen  $T$  z.B. der euklidischen Ebene aufzuzählen, für die eine vorgegebene Gruppe  $\Gamma$  von Symmetrien so auf den Flächen der Pflasterung operiert, daß diese in höchstens  $n$  Transitivitätsbereiche zerfallen.

In der vorliegenden Arbeit wird die oben erwähnte Methode der Kodierung äquivarianter Pflasterungen der Ebene durch sogenannte *Delaney-Symbole* benutzt, um *Rekursionsformeln* zur Abzählung der Isomorphieklassen aller *punktierten*, äquivarianten, periodischen Pflasterungen der euklidischen Ebene mit vorgegebener kristallographischer Symmetriegruppe  $\Gamma$  und vorgegebener Anzahl  $n$  nicht äquivalenter Flächenstücke zu entwickeln, wobei *Digone* und *Monogone* erlaubt sind, aber keine Vertices vom Grade  $\leq 2$ —andernfalls wären die gesuchten Anzahlen mit Gewißheit unendlich. Dabei verstehen wir unter einer *punktierten* Pflasterung eine Pflasterung, bei der eine *Fahne* ausgezeichnet ist, d.h.—grob gesprochen—ein Tripel  $(V, E, F)$  bestehend aus einem Vertex  $V$ , einer  $V$  enthaltenden Kante  $K$  und einer  $K$  enthaltenden Fläche  $F$  der Pflasterung, genauer: ein Dreieck der *baryzentrischen Unterteilung* der Pflasterung.

Entscheidend für den von uns zur Strukturierung unserer Untersuchungen und Ergebnisse eingeschlagenen Weg war die Einsicht, daß es zumindest

nützlich—wenn nicht gar unvermeidbar—ist, beim Aufbau von Rekursionsformeln solche Formeln nicht einfach für die Anzahl  $K_n$  (der Isomorphieklassen) aller periodischen äquivarianten Pflasterungen mit genau  $n$  symmetriinäquivalenten Flächenstücken oder die Anzahl  $K_n(\Gamma)$  (der Isomorphieklassen) aller solcher Pflasterungen mit zu einer vorgegebenen kristallographischen Gruppe  $\Gamma$  isomorphen Symmetriegruppe zu suchen, sondern—sehr viel detaillierter—weitere numerisch faßbare geometrische Invarianten solcher Pflasterungen gleichfalls zu berücksichtigen. So betrachten wir bei unseren Untersuchungen im Falle einer *eigentlichen* Symmetriegruppe  $\Gamma$  z.B. zusätzlich die Anzahl  $y_2$  der (unter  $\Gamma$  inäquivalenten) Kanten mit (2-fachem) Rotationszentrum, die Anzahl  $y_3$  der Kanten ohne Rotationszentrum, die Anzahl  $y_4(k)$  der (vom ausgezeichneten Vertex  $C_0$  verschiedenen) Vertices vom Grad  $k$ . Natürlich werden die bei Berücksichtigung solcher Daten entstehenden Formeln wesentlich komplizierter (was für den Leser bedauerlich sein mag), aber man gewinnt dabei zumindest zugleich einen weitaus größeren inhaltlichen Reichtum an Einsichten in den rekursiven Aufbau der Familie der periodischen Pflasterungen.

Wir betrachten hier nur den einfachen Spezialfall der Muster mit *eigentlicher* Symmetriegruppe. Für eine vollständigere Darstellung der hier nur exemplarisch vorgestellten Ergebnisse verweisen wir auf [Dress-Franz-4] und [Franz].

## 1 Delaney-Symbole, Theoreme

Wir geben zunächst einen kurzen Abriß der von A. W. M. Dress entwickelten Theorie der *Delaney-Symbole* für äquivariante Pflasterungen der Ebene. Für eine detailliertere Darstellung dieser für Abzählprobleme (von Mustern) grundlegenden Theorie verweisen wir auf [Dress-1], [Dress-3], [Dress-4], [Dress-Schar-1], [Dress-Schar-2].

Eine Teilmenge  $T$  von  $\mathbf{E} := \mathbf{E}^2 := \{(p, q) \mid p, q \in \mathbf{R}\}$  heißt eine *Pflasterung* von  $\mathbf{E}$ , falls sie den folgenden drei Bedingungen genügt:

(T0)  $T$  ist abgeschlossen und zusammenhängend.

(T1) Alle Zusammenhangskomponenten von  $\mathbf{E} \setminus T$  sind beschränkt.

(T2) Zu jedem Punkt  $x \in T$  existiert eine Umgebung  $U$  von  $x$  und eine natürliche Zahl  $r(x) = r_T(x) \geq 1$  derart, daß das Tripel  $(U, U \cap T, \{x\})$  homöomorph zu dem Tripel  $(B^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq 1\}, \{z \in B^2 \mid z^{r(x)} \in \mathbb{R}_+, \{0\}\})$  ist—mit  $\mathbb{R}_+ := \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$  wie üblich.

Man beachte, daß  $r(x)$  durch  $x$  eindeutig festgelegt ist. Zwei Pflasterungen  $T, T' \subseteq \mathbb{E}$  heißen (topologisch) *isomorph*, falls es einen Homöomorphismus  $\alpha$  von  $\mathbb{E}$  gibt, so daß  $\alpha(T) = T'$  ist. Wir nennen ein solches  $\alpha$  einen (topologischen) *Isomorphismus* von  $T$  nach  $T'$  und bezeichnen die Gruppe der Homöomorphismen  $\alpha$  von  $\mathbb{E}$  mit  $\alpha(T) = T$ —die Automorphismengruppe von  $T$ —mit  $\text{Aut}(T)$ . Aus dieser Definition folgt mittels klassischer Flächentopologie das

**Lemma 1** *Ist  $T$  eine Pflasterung von  $\mathbb{E}$ , so gilt:*

1.  $T^0 := \{x \in T \mid r(x) \neq 2\}$  ist diskret in  $\mathbb{E}$ .
2. Jede Zusammenhangskomponente  $e \in \pi_0(T \setminus T^0)$  von  $T \setminus T^0$  ist homöomorph zum offenen Intervall  $]0, 1[$ . Jeder Homöomorphismus  $\varphi : ]0, 1[ \xrightarrow{\sim} e$  kann (eindeutig) zu einer stetigen Surjektion  $\bar{\varphi} : [0, 1] \rightarrow \bar{e} \subseteq e \cup T^0$  fortgesetzt werden.
3. Zu jeder Zusammenhangskomponente  $f \in \pi_0(\mathbb{E} \setminus T)$  von  $\mathbb{E} \setminus T$  gibt es eine natürliche Zahl  $r(f) = r_T(f)$  und eine stetige Surjektion  $\psi = \psi_f : B^2 \rightarrow \bar{f}$ , so daß mit  $S^1 := \{z \in B^2 \mid \|z\| = 1\}$  gilt:
  - (a)  $\psi|_{B^2 \setminus S^1} : B^2 \setminus S^1 \rightarrow f$  ist ein Homöomorphismus.
  - (b)  $\psi^{-1}(T) = S^1, \#\psi^{-1}(T^0) = r(f)$ .
  - (c)  $\psi$  ist bijektiv auf den Zusammenhangskomponenten von  $S^1 \setminus \psi^{-1}(T^0)$ .

$\psi_f$  ist eindeutig bis auf (vorgeschaltete!) Homöomorphismen von  $B^2$  bestimmt. Die natürliche Zahl  $r(f) = r_T(f)$  hängt deshalb nicht vom gewählten  $\psi_f$  ab und ist daher eine wohldefinierte Invariante von  $f$ . Ist  $T$  eine Pflasterung von  $\mathbb{E}$ , so setzen wir

$$T^0 := \{x \in T \mid r(x) \neq 2\}, \tag{1}$$

$$T^1 := \pi_0(T \setminus T^0) \tag{2}$$

$$T^2 := \pi_0(\mathbb{E} \setminus T) \tag{3}$$

und nennen die Elemente von  $T^0, T^1$  bzw.  $T^2$  *Vertices, Kanten* bzw. *Flächen* der Pflasterung  $T$  von  $\mathbb{E}$ . Für  $x \in T^0$  bzw.  $f \in T^2$  heiÙe die Invariante  $r(x)$  von  $x$  *der Grad* des Vertex  $x$  und die Invariante  $r(f)$  von  $f$  *die Eckenzahl* der Fläche  $f$ . Entsprechend nennen wir  $f$  auch ein  $r(f)$ -*Eck* oder  $r(f)$ -*Gon*.

Eine *äquivariante* Pflasterung von  $\mathbb{E}$  ist ein Paar  $(T, \Gamma)$  bestehend aus einer Pflasterung  $T$  von  $\mathbb{E}$  und einer diskreten Gruppe  $\Gamma$  von Automorphismen von  $T$ , der *Symmetriegruppe* der Pflasterung  $T$ . Zwei äquivariante Pflasterungen  $(T, \Gamma)$  und  $(T', \Gamma')$  heißen *isomorph* (in Zeichen  $(T, \Gamma) \cong (T', \Gamma')$ ), falls es einen Isomorphismus  $\alpha : T \rightarrow T'$  gibt, so daÙ  $\alpha\Gamma\alpha^{-1} = \Gamma'$  ist.

Ein *Delaney-Symbol* ist ein System  $(\mathcal{D}; m_{01}, m_{12})$  bestehend aus einer transitiven  $\Sigma := \Sigma_2 := \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_i^2 = 1 \rangle$  (-rechts)-Menge  $\mathcal{D}$  zusammen mit zwei Abbildungen  $m_{01}, m_{12} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{N}$  derart, daÙ für alle  $D \in \mathcal{D}$  die drei folgenden Bedingungen gelten:

$$(DS0) \quad m_{01}(D\sigma_0) = m_{01}(D\sigma_1) = m_{01}(D) \\ m_{12}(D\sigma_1) = m_{12}(D\sigma_2) = m_{12}(D).$$

$$(DS1) \quad D(\sigma_0\sigma_1)^{m_{01}(D)} = D(\sigma_1\sigma_2)^{m_{12}(D)} = D.$$

$$(DS2) \quad D(\sigma_0\sigma_2)^2 = D.$$

Zwei Delaney-Symbole  $(\mathcal{D}; m_{01}, m_{12})$  und  $(\mathcal{D}'; m'_{01}, m'_{12})$  heißen *isomorph* (in Zeichen:  $(\mathcal{D}; m_{01}, m_{12}) \cong (\mathcal{D}'; m'_{01}, m'_{12})$ ), falls es eine bijektive  $\Sigma$ -Abbildung  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  gibt, so daÙ für alle  $D \in \mathcal{D}$  und  $(i, j) \in \{(0, 1), (1, 2)\}$  die Gleichung:

$$m_{ij}(D) = m'_{ij}(\varphi(D)) \quad (4)$$

gilt.

Einer äquivarianten Pflasterung  $(T, \Gamma)$  läÙt sich gemäß [Dress-4], [Dress-Huson-1] auf kanonische Weise ein (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmtes Delaney-Symbol zuordnen, derart daÙ der folgende Satz gilt:

**Satz 1** *Für äquivariante Pflasterungen  $(T, \Gamma)$  und  $(T', \Gamma')$  sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  $(T, \Gamma) \cong (T', \Gamma')$
2.  $(\mathcal{D}_T; m_{01}^T, m_{12}^T) \cong (\mathcal{D}_{T'}; m_{01}^{T'}, m_{12}^{T'})$ .

Eine äquivalente Pflasterung  $(T, \Gamma)$  heißt *regulär* oder *von endlichem Orbittyp*, falls  $\Gamma \backslash \mathbf{E}$  kompakt ist. Eine Pflasterung  $T$  heißt *regulär* oder *von endlichem Orbittyp*, falls  $(T, \Gamma)$  für eine diskrete Untergruppe  $\Gamma \leq \text{Aut}(T)$  von  $\text{Aut}(T)$  regulär ist. Eine Pflasterung  $T$  von  $\mathbf{E}$  heißt *periodisch*, falls  $(T, \text{Iso}(T))$  regulär ist—mit  $\text{Iso}(T) := \{\gamma \in \text{Iso}(\mathbf{E}) \mid \gamma(T) = T\}$  und  $\text{Iso}(\mathbf{E})$  die Gruppe der Isometrien von  $\mathbf{E}$  bezüglich der euklidischen Metrik. Eine äquivalente Pflasterung  $(T, \Gamma)$  heißt *periodisch*, falls  $\Gamma$  zwei linear unabhängige Translationen enthält und  $\Gamma \leq \text{Iso}(\mathbf{E})$  gilt.

Offensichtlich ist *Periodizität* keine Invariante von Isomorphieklassen, d.h. es gibt isomorphe (äquivalente) Pflasterungen  $T$  und  $T'$  ( $(T, \Gamma)$  und  $(T', \Gamma')$ ), so daß  $T$  ( $(T, \Gamma)$ ) periodisch ist und  $T'$  ( $(T', \Gamma')$ ) nicht. Deshalb läßt sich die Periodizität auch mit Gewißheit nicht am zugeordneten Kammernsystem (Delaney-Symbol) ablesen. Erzwingt man jedoch Invarianz auf Isomorphieklassen, indem man definiert: eine (äquivalente) Pflasterung heißt *topologisch periodisch*, falls sie zu einer periodischen (äquivalenten) Pflasterung isomorph ist, so läßt sich diese Eigenschaft, wie wir gleich unten sehen werden, in der Tat recht einfach aus dem Kammernsystem (Delaney-Symbol) ablesen.

Für endliche Delaney-Symbole  $(\mathcal{D}; m_{01}, m_{12})$  führen wir den Begriff der *Krümmung*  $K_{(\mathcal{D}; m_{01}, m_{12})}$  ein:

$$K_{(\mathcal{D}; m_{01}, m_{12})} := \sum_{D \in \mathcal{D}} \left( \frac{1}{m_{01}(D)} + \frac{1}{m_{12}(D)} - \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

Dann folgt das

**Theorem 1** *Ein Delaney-Symbol  $(\mathcal{D}; m_{01}, m_{12})$  ist genau dann das Delaney-Symbol einer topologisch periodischen äquivalenten Pflasterung  $(T, \Gamma)$ , von  $\mathbf{E}$ , falls*

(DS3)  $\#\mathcal{D} < \infty$

(DS4)  $K_{(\mathcal{D}; m_{01}, m_{12})} = 0$ .

Wir skizzieren abschließend, wie sich die Symmetriegruppe  $\Gamma$  einer periodischen, äquivalenten Pflasterung  $(T, \Gamma)$ , welche bekanntlich notwendig zu einer der siebzehn 2-dimensionalen kristallographischen Gruppen isomorph ist, aus dem zugehörigen Delaney-Symbol  $(\mathcal{D}; m_{01}, m_{12})$  bestimmen läßt.

Auch hier beschränken wir uns nur auf den Fall einer eigentlichen Symmetriegruppe

Wir setzen zunächst  $m_{02}(D) = 2$  für alle  $D \in \mathcal{D}$  und bemerken, daß  $r_{ij}(D) := \inf\{r \in \{1, 2, \dots\} \mid D(\sigma_i \sigma_j)^r = D\}$  für alle  $0 \leq i < j \leq 2$  und  $D \in \mathcal{D}$  ein Teiler von  $m_{ij}(D)$  ist und daß die Abbildungen  $r_{ij}, m_{ij} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{N}$  auf jedem  $\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle$ -Orbit  $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$  konstant sind. Für jeden  $\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle$ -Orbit  $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$  nennen wir die eindeutig bestimmte ganze Zahl  $v = v_{ij}(\mathcal{D}') (\geq 1)$ , welche für ein und damit für alle  $D \in \mathcal{D}'$  der Beziehung

$$r_{ij}(\mathcal{D}') \cdot v := r_{ij}(D) \cdot v = m_{ij}(D) =: m_{ij}(\mathcal{D}') \quad (6)$$

genügt, den Verzweigungsparameter von  $\mathcal{D}'$ .

Dann gilt für die Gruppe  $\Gamma$ , welche für festes  $D \in \mathcal{D}$  mit

$$\Sigma_D / \langle \tau(\sigma_i \sigma_j)^{m_{ij}(D\tau)} \tau^{-1} \mid \tau \in \Sigma, 0 \leq i < j \leq 2 \rangle \quad (7)$$

identifiziert werden kann, das folgende

**Theorem 2** *Ein orientierbares, endliches Delaney-Symbol  $(\mathcal{D}; m_{01}, m_{12})$  ist genau dann das Delaney-Symbol einer topologisch periodischen, äquivarianten Pflasterung  $(T, \Gamma)$ , wenn entweder*

- $\chi(\|\mathcal{D}\|_{top}) = 0$  ist und zusätzlich die Bedingung  $(C_1)$  gilt:

$(C_1)$  *Alle Verzweigungsparameter sind gleich 1.  
In diesem Fall ist  $\Gamma$  isomorph zu  $\mathfrak{p}1 \cong C_1$ .*

oder wenn

- $\chi(\|\mathcal{D}\|_{top}) = 2$  ist und genau eine der folgenden vier Bedingungen gilt:

$(C_2)$  *Genau 4 Verzweigungsparameter sind gleich 2, alle übrigen sind gleich 1. In diesem Fall ist  $\Gamma$  isomorph zu  $\mathfrak{p}2 \cong C_2$ .*

$(C_3)$  *Genau 3 Verzweigungsparameter sind gleich 3, alle übrigen sind gleich 1. In diesem Fall ist  $\Gamma$  isomorph zu  $\mathfrak{p}3 \cong C_3$ .*

$(C_4)$  *Genau 2 Verzweigungsparameter sind gleich 4, 1 Verzweigungsparameter ist gleich 2, alle übrigen sind gleich 1. In diesem Fall ist  $\Gamma$  isomorph zu  $\mathfrak{p}4 \cong C_4$ .*

(C<sub>6</sub>) Genau 1 Verzweigungsparameter ist gleich 6, 1 Verzweigungsparameter ist gleich 3, 1 Verzweigungsparameter ist gleich 2, alle übrigen sind gleich 1. In diesem Fall ist  $\Gamma$  isomorph zu  $p6 \cong C_6$ .

Eine analoge Aussage läßt sich für topologisch periodische Pflasterungen mit uneigentlicher Symmetriegruppe beweisen.

## 2 Das Problem der rekursiven Abzählung von Pflasterungen

Wir werden im folgenden die oben skizzierte Methode der Kodierung äquivarianter Pflasterungen durch Delaney-Symbole benutzen, um Rekursionsformeln zur Abzählung der Isomorphieklassen aller *punktierten*, äquivarianten, topologisch periodischen Pflasterungen  $(T, C_0; \Gamma)$  der euklidischen Ebene mit vorgegebener kristallographischer Symmetriegruppe  $\Gamma$  und vorgegebener Anzahl  $n = n_2(T, \Gamma)$  nicht äquivalenter Flächenstücke zu entwickeln, wobei *Digone* und *Monogone* (d.h.: Flächen  $f \in T^2$  mit  $r(f) = 1$  bzw.  $r(f) = 2$ ) erlaubt sind, aber keine Vertices vom Grad  $\leq 2$ , (d.h.: für alle  $x \in T^0$  gilt  $r(x) \geq 3$ ). Wir bezeichnen die Anzahlen der so definierten Isomorphieklassen von Pflasterungen mit  $K_n(\Gamma)$ .

Der Begriff einer *punktierten* (äquivarianten) Pflasterung von  $\mathbb{E}$  ist dabei—gemäß Tutte—als ein System  $(T, C_0)$  ( $(T, C_0; \Gamma)$ ) definiert bestehend aus einer (äquivarianten) Pflasterung  $T$  ( $(T, \Gamma)$ ) von  $\mathbb{E}$  zusammen mit einem fest gewählten Element  $D_0 \in \mathcal{D}_T$  des zugehörigen Delaney-Symbols  $\mathcal{D}_T$ . Ferner heißt ein System  $(\mathcal{D}, D_0; m_{01}, m_{12})$  ein *punktiertes* Delaney-Symbol, falls  $(\mathcal{D}; m_{01}, m_{12})$  ein Delaney-Symbol und  $D_0$  ein festes Element in  $\mathcal{D}$  ist. Es ist offensichtlich, wie die zugehörigen Isomorphismen zu definieren sind.

Die oben zitierten Sätze gelten offenbar auch, wenn man anstelle von (äquivarianten) Pflasterungen *punktierte* (äquivariante) Pflasterungen und anstelle von Delaney-Symbolen *punktierte* Delaney-Symbole setzt.

Für ein Delaney-Symbol  $(\mathcal{D}; m_{01}, m_{12})$ ,  $k \in \mathbb{N}, k > 0$  und  $0 \leq i < j \leq 2$  setze

$$\mathcal{V}_{ij}(\mathcal{D}) := \{ \mathcal{D}' \in \mathcal{O}_{ij}(\mathcal{D}) \mid v_{ij}(\mathcal{D}') \neq 1 \} \tag{8}$$

$$\mathcal{V}_{ij}(\mathcal{D}, k) := \{ \mathcal{D}' \in \mathcal{O}_{ij}(\mathcal{D}) \mid v_{ij}(\mathcal{D}') = k \} \tag{9}$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{D}) := \bigoplus_{0 \leq i < j \leq 2} \mathcal{V}_{ij}(\mathcal{D}) \quad (10)$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{D}, k) := \bigoplus_{0 \leq i < j \leq 2} \mathcal{V}_{ij}(\mathcal{D}, k) \quad (11)$$

Für  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n > 0$  setze ferner

$$DS^+ := \{[\mathcal{D}, D_0; m_{01}, m_{12}] \mid (\mathcal{D}, D_0; m_{01}, m_{12}) \text{ ist} \\ \text{endliches, punktiertes, orientierbares} \\ \text{Delaney-Symbol der Krümmung } 0\} \quad (12)$$

$$DS_n^+ := \{[\mathcal{D}, D_0; m_{01}, m_{12}] \in DS^+ \mid o_{01}(\mathcal{D}) = n\}. \quad (13)$$

Dann erhält man als einfache Folgerung aus Theorem 2 das

**Korollar 1** *Ist  $n \in \mathbf{N}$  ( $n > 0$ ) eine natürliche Zahl, so gilt für die Zahlen  $K_n(\Gamma)$  im Falle einer eigentlichen 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe  $\Gamma$ :*

$$K_n(C_1) = \#\{[\mathcal{D}, D_0; m_{01}, m_{12}] \in DS_n^+ \mid g(\|\mathcal{D}\|_{top}) = 1, \\ \mathcal{V}(\mathcal{D}) = \emptyset\}$$

$$K_n(C_2) = \#\{[\mathcal{D}, D_0; m_{01}, m_{12}] \in DS_n^+ \mid g(\|\mathcal{D}\|_{top}) = 0, \\ \#\mathcal{V}(\mathcal{D}) = 4, \mathcal{V}(\mathcal{D}) = \mathcal{V}(\mathcal{D}, 2)\}$$

$$K_n(C_3) = \#\{[\mathcal{D}, D_0; m_{01}, m_{12}] \in DS_n^+ \mid g(\|\mathcal{D}\|_{top}) = 0, \\ \#\mathcal{V}(\mathcal{D}) = 3, \mathcal{V}(\mathcal{D}) = \mathcal{V}(\mathcal{D}, 3)\}$$

$$K_n(C_4) = \#\{[\mathcal{D}, D_0; m_{01}, m_{12}] \in DS_n^+ \mid g(\|\mathcal{D}\|_{top}) = 0, \\ \#\mathcal{V}(\mathcal{D}) = 3, \mathcal{V}(\mathcal{D}) = \mathcal{V}(\mathcal{D}, 4) \cup \mathcal{V}(\mathcal{D}, 2), \\ \#\mathcal{V}(\mathcal{D}, 4) = 2\}$$

$$K_n(C_6) = \#\{[\mathcal{D}, D_0; m_{01}, m_{12}] \in DS_n^+ \mid g(\|\mathcal{D}\|_{top}) = 0, \\ \#\mathcal{V}(\mathcal{D}) = 3, \mathcal{V}(\mathcal{D}) = \mathcal{V}(\mathcal{D}, 6) \cup \mathcal{V}(\mathcal{D}, 3) \cup \\ \cup \mathcal{V}(\mathcal{D}, 2), \#\mathcal{V}(\mathcal{D}, 6) = \#\mathcal{V}(\mathcal{D}, 3) = 1\}.$$

Abschließend sei bemerkt, daß die Größen  $K_n(\Gamma)$  für festes  $n \in \mathbf{N}$  ( $n > 0$ ) und für eine beliebige kristallographische Gruppe  $\Gamma$  stets endlich sind, wie aus der Ungleichung  $\#DS_n < \infty$  folgt.



### 3 Erörterung des methodischen Ansatzes

Im vorangehenden Abschnitt haben wir die Zahlen  $K_n(\Gamma)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ ,  $\Gamma$  (eigentliche) kristallographische Gruppe) als Kardinalitäten gewisser Teilmengen von  $DS_n$  interpretiert. Die Abzählung dieser Mengen werden wir nun in *zwei Schritten* durchführen. Zunächst werden wir in einem *ersten*—technisch etwas aufwendigen—Schritt Rekursionsformeln für die Berechnung der Kardinalitäten  $M_n^+(y^{(n)})$  gewisser abstrakt definierter Mengen  $\mathcal{M}_n^+(y^{(n)})$  von Isomorphieklassen von punktierten Kammernsystemen  $(\mathcal{C}, C_0)$  entwickeln, die sämtlich Teilmengen von

$$\mathcal{M}_n := \{[\mathcal{C}, C_0] \mid (\mathcal{C}, C_0) \text{ ist punkt. endl. trans. } \Sigma\text{-Menge, } r_{02}(C) \leq 2 \text{ für alle } C \in \mathcal{C}, o_{02}(\mathcal{C}) = n\} \quad (14)$$

sind und durch Systeme  $y^{(n)}$  von numerischen Invarianten der Restriktionen  $\mathcal{C}_{\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle}$  ( $0 \leq i < j \leq 2$ ) definiert werden. Dieser Teil der Arbeit macht wesentlichen Gebrauch von den Konstruktionen *Tutte-Abbildung* und *Stratifikation*, die wir im folgenden erläutern werden.

Dann werden wir in einem *zweiten* Schritt zu gegebenem  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$  und (eigentlicher) kristallographischer Gruppe  $\Gamma$  die Zahlen  $K_n(\Gamma)$  mit Hilfe von Korollar 1 aus den zuvor berechneten Kardinalitäten  $M_n^+(y^{(n)})$  durch Spezialisierung der Parameterwerte  $y^{(n)}$  und Berücksichtigung der möglichen Lagen der zulässigen *verzweigten* Orbits in den betrachteten Kammernsystemen ableiten.

#### 3.1 Tutte-Abbildungen

Der im folgenden skizzierte Ansatz für die Entwicklung der gesuchten Rekursionsformeln für die Berechnung der Zahlen  $M_n^+(y^{(n)})$  stützt sich auf eine Idee von Tutte (vgl. [Tutte], vgl. auch [Arque-1] und [Arque-2]), die später von A. W. M. Dress in den Kontext der Kammernsysteme übertragen wurde.

Für eine endliche  $\Sigma_n := \langle \sigma_0, \dots, \sigma_n \mid \sigma_i^2 = 1 \rangle$ -Menge  $\mathcal{C}$  und eine  $\sigma_0$ -invariante Teilmenge  $\mathcal{C}_0 (\mathcal{C}_0 \sigma_0 \subseteq \mathcal{C}_0)$  mit  $\emptyset \neq \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C} (\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C})$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$  diejenige  $\Sigma_n$ -Menge, deren zugrundeliegende Menge gerade die Menge  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$  ist und für welche die Operation "o" von  $\Sigma_n$  für  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$  mit Hilfe der Definition

$$k_0 := k_0(C, i) := \min\{k \in \{0, 1, \dots, n\} \mid C \sigma_i (\sigma_0 \sigma_i)^k \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0\} \quad (15)$$

durch

$$C \circ \sigma_i := C\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^{k_0} \quad (16)$$

definiert wird. Ein solches  $k_0$  existiert für jedes  $C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$  und jedes  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , denn mit  $r := r_{i0}(C)$  ist

$$C\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^{r-1} = C(\sigma_i\sigma_0)^r\sigma_0 = C\sigma_0 \in (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0)\sigma_0 = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0. \quad (17)$$

Ferner ist die in (16) definierte Operation der  $\sigma_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) involutorisch: Dieses ist klar für  $i = 0$  und allgemein für solche  $C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$ , für welche  $C\sigma_i \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$  und folglich  $C \circ \sigma_i = C\sigma_i$  gilt. Ist dagegen  $C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$  und  $C\sigma_i \in \mathcal{C}_0$ , so existiert—wie oben gezeigt—ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  ( $n > 0$ ), so daß die Elemente  $C\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^\kappa$  für  $\kappa = 0, 1, \dots, k_0 - 1$  in  $\mathcal{C}_0$  liegen, während  $C' := C\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^{k_0}$  in  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$  liegt. Dann gilt aber auch für die Elemente  $C'\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^\kappa = C\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^{k_0}\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^\kappa = C\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^{k_0-\kappa}\sigma_i = C\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^{k_0-\kappa-1}\sigma_0 \in \mathcal{C}_0$  und  $C'\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^{k_0} = C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$ .

Wir untersuchen nun kurz die Frage, inwieweit sich Transitivität bzw. Orientierbarkeit von der  $\Sigma_n$ -Menge  $\mathcal{C}$  auf die *reduzierte*  $\Sigma_n$ -Menge  $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$  übertragen. Für die Orientierbarkeit läßt sich diese Frage schnell beantworten:

**Lemma 2** *Ist  $\mathcal{C}$  eine endliche  $\Sigma_n$ -Menge und  $\emptyset \neq \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$  ( $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C}$ ) eine  $\sigma_0$ -invariante Teilmenge von  $\mathcal{C}$ , so ist mit  $\mathcal{C}$  auch  $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$  orientierbar.*

**BEWEIS:** Ist  $or : \mathcal{C} \rightarrow \Sigma^+ \setminus \Sigma$  eine Orientierung von  $\mathcal{C}$ , so gilt für alle  $C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$  und  $i = 0, 1, \dots, n$  mit  $k_0 = k_0(C, i)$  die Beziehung  $or(C \circ \sigma_i) = or(C\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^{k_0}) = (-1)^{2k_0+1} \cdot or(C) = -or(C)$ . Folglich ist die Restriktion von  $or$  auf  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$  eine Orientierung von  $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ .  $\square$

Wir studieren nun die Transitivitätseigenschaft der  $\Sigma_n$ -Menge  $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ . Ist  $\mathcal{C}$  eine  $\Sigma_n$ -Menge,  $J \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$  eine Teilmenge von  $\{0, 1, \dots, n\}$  und  $k \in \mathbb{N}$ , so heie eine Folge  $\underline{C} := (C_0, C_1, \dots, C_k)$  von Elementen  $C_\kappa \in \mathcal{C}$  ( $\kappa \in \{0, 1, \dots, k\}$ ) gemäß Tits (vgl. [Tits]) eine  $J$ -Galerie in  $\mathcal{C}$ , falls es  $k$  Elemente  $j_0, j_1, \dots, j_{k-1} \in J$  gibt, so daß für alle  $\kappa = 0, 1, \dots, k-1$

$$C_{\kappa+1} = C_\kappa\sigma_{j_\kappa} \quad (18)$$

gilt. Ist  $J = \{0, 1, \dots, n\}$ , so nennen wir die Folge  $\underline{C}$  auch kurz eine *Galerie* in  $\mathcal{C}$ . Dann ist eine  $\Sigma_n$ -Menge  $\mathcal{C}$  offenbar genau dann transitiv, wenn je zwei

Elemente  $C, C' \in \mathcal{C}$  durch eine Galerie  $\underline{C} = (C_0, \dots, C_k)$  mit dem Anfang  $C_0 = C$  und dem Ende  $C_k = C'$  verbunden werden können. Für eine  $\Sigma_n$ -Menge  $\mathcal{C}$  und eine  $\sigma_0$ -invariante Teilmenge  $\emptyset \neq \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$  ( $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C}$ ) von  $\mathcal{C}$  und  $i = 1, 2, \dots, n$  setze

$$\mathcal{C}_i^* := \{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0 \mid C\sigma_i \in \mathcal{C}_0\} \quad (19)$$

und

$$\mathcal{C}^* := \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i^*. \quad (20)$$

Wir nennen zwei Elemente  $C, C' \in \mathcal{C}^*$ , die für ein  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  der Bedingung

$$C, C' \in \mathcal{C}_i^* \quad \text{und} \quad C \circ \sigma_i = C' \quad (21)$$

genügen, *benachbart* und bezeichnen die hierdurch erzeugte Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{C}^*$  mit  $\nu$  und die  $\nu$ -Äquivalenzklasse eines Elementes  $C \in \mathcal{C}^*$  mit  $[C]_\nu$ . Man beachte, daß je zwei  $\nu$ -äquivalente Elemente  $C, C' \in \mathcal{C}^*$  durch eine ganz in  $\mathcal{C}^*$  verlaufende Galerie in  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$  verbunden werden können. Bezeichnen wir ferner die Menge der Transitivitätsbereiche von  $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$  mit  $\pi_0(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ , so erhalten wir die folgende Abschätzung für  $\#\pi_0(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ :

**Lemma 3** Für eine endliche, transitive  $\Sigma_n$ -Menge  $\mathcal{C}$  und eine  $\sigma_0$ -invariante Teilmenge  $\emptyset \neq \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$  ( $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C}$ ) von  $\mathcal{C}$  gilt

$$\#\pi_0(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) \leq \#\mathcal{C}^*/\nu \quad (22)$$

BEWEIS: Ist  $D \in \mathcal{C}_0$  fest gewählt, so können wir auf Grund der vorausgesetzten Transitivität von  $\mathcal{C}$  zu jedem  $C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0$  eine feste Galerie  $\underline{C} := (C_0, C_1, \dots, C_k)$  in  $\mathcal{C}$  mit dem Anfang  $C_0 = C$  und dem Ende  $C_k = D$  auswählen, so daß die Zuordnung

$$C \longmapsto [C_{i_{\underline{C}}}]_\nu \quad (23)$$

mit

$$i_{\underline{C}} := \min\{i \in \{0, 1, \dots, k-1\} \mid C_{i+1} \in \mathcal{C}_0\} \quad (24)$$

eine wohldefinierte Abbildung  $\psi$  von  $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$  nach  $\mathcal{C}^*/\nu$  liefert. Sind nun  $C, C' \in \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$  mit  $\psi(C) = \psi(C')$  und sind  $\underline{C} := (C_0, C_1, \dots, C_k)$  und  $\underline{C}' := (C'_0, C'_1, \dots,$

$C'_{k'}$ ) die zugehörigen Galerien in  $\mathcal{C}$  mit dem Anfang  $C$  bzw.  $C'$  und dem Ende  $D$ , so existiert wegen

$$[C_{i_{\underline{C}}}]_{\nu} = \psi(C) = \psi(C') = [C'_{i_{\underline{C}'}}]_{\nu}. \quad (25)$$

eine  $C_{i_{\underline{C}}}$  mit  $C'_{i_{\underline{C}'}}$  verbindende ganz in  $\mathcal{C}^*$  verlaufende Galerie in  $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ , etwa  $(C_{i_{\underline{C}}} = E_0, E_1, \dots, E_{k''} = C_{i_{\underline{C}'}})$ , die mit den gleichermaßen für  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$  Galerien darstellenden Anfangsstücken von  $\underline{C}$  und  $\underline{C}'$  zu einer  $C$  und  $C'$  in  $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$  verbindenden Galerie

$$(C = C_0, C_1, \dots, C_{i_{\underline{C}}}, E_1, E_2, \dots, E_{k''-1}, C'_{i_{\underline{C}'}}', C'_{i_{\underline{C}'-1}}', \dots, C'_1, C'_0 = C') \quad (26)$$

zusammengesetzt werden kann. Daher liegt das Urbild eines jeden Elementes aus  $\mathcal{C}^*/\nu$  ganz in einer einzigen Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ , woraus die behauptete Ungleichung folgt.  $\square$

**Lemma 4** *Ist  $\mathcal{C}$  eine endliche, transitive  $\Sigma_n$ -Menge und  $\emptyset \neq \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$  ( $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C}$ ) eine  $\sigma_0$ -invariante Teilmenge von  $\mathcal{C}$ , so gilt für alle  $i \in 1, 2, \dots, n$*

$$\#\mathcal{C}_i^*/\langle \circ\sigma_i \rangle \leq \#\mathcal{C}_0/\langle \sigma_0 \rangle. \quad (27)$$

Es folgt dann leicht das

**Korollar 2** *Für eine endliche, transitive  $\Sigma_n$ -Menge  $\mathcal{C}$  und eine  $\sigma_0$ -invariante Teilmenge  $\emptyset \neq \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$  ( $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C}$ ) von  $\mathcal{C}$  gilt mit*

$$n^* := \#\{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \mathcal{C}_i^* \neq \emptyset\} \quad (28)$$

die Ungleichung

$$\#\pi_0(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) \leq n^* \cdot \#\mathcal{C}_0/\langle \sigma_0 \rangle. \quad (29)$$

BEWEIS (des Korollars): Die kanonische Surjektion

$$\bigcup_{i=1, \dots, n} \mathcal{C}_i^* \longrightarrow \mathcal{C}^* := \bigcup_{i=1, \dots, n} \mathcal{C}_i^* \quad (30)$$

induziert offenbar eine Surjektion

$$\bigcup_{i=1, \dots, n} \mathcal{C}_i^*/\langle \circ\sigma_i \rangle \longrightarrow \mathcal{C}^*/\nu, \quad (31)$$

woraus mit Lemma 4 zunächst die Ungleichung

$$\#C^*/\nu \leq \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ C_i^* \neq \emptyset}} \#C_i^*/\langle \circ\sigma_i \rangle \leq n^* \cdot \#C_0/\langle \sigma_0 \rangle \quad (32)$$

und mit Lemma 3 schließlich die Behauptung folgt.  $\square$

BEWEIS (zu Lemma 4): Nach (16) existiert zu jedem  $\langle \circ\sigma_i \rangle$ -Orbit  $\{C, C'\} \in C_i^*/\langle \circ\sigma_i \rangle$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ein eindeutig bestimmtes  $k_0 = k_0(C, i) \in \{0, 1, \dots\}$  mit  $C\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^{k_0} = C'$ . Offenbar ist  $k_0 > 0$ . Wählt man nun zu jedem  $\{C, C'\}$  ein beliebiges, aber festes Element

$$\begin{aligned} \{C_0, C'_0\} \in K_{\{C, C'\}} &:= \{\{C\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^k, C\sigma_i(\sigma_0\sigma_i)^k\sigma_0\} \mid k = 0, 1, \dots, k_0 - 1\} \\ &(\neq \emptyset) \subseteq C_0/\langle \sigma_0 \rangle, \end{aligned} \quad (33)$$

so definiert die Zuordnung

$$\{C, C'\} \longmapsto \{C_0, C'_0\} \quad (34)$$

eine wohlbestimmte Abbildung

$$\Psi : C_i^*/\langle \circ\sigma_i \rangle \longrightarrow C_0/\langle \sigma_0 \rangle. \quad (35)$$

Wählt man nun für  $\{C_0, C'_0\} \in K_{\{C, C'\}}$  die Zahlen  $k, k' \in \mathbb{N}$  minimal mit  $C_0(\sigma_i\sigma_0)^k\sigma_i \notin C_0$  bzw.  $C'_0(\sigma_i\sigma_0)^{k'}\sigma_i \notin C_0$ , so erhält man leicht die Identität

$$\{C, C'\} = \{C_0(\sigma_i\sigma_0)^k\sigma_i, C'_0(\sigma_i\sigma_0)^{k'}\sigma_i\}, \quad (36)$$

aus der für alle  $\{C, C'\}, \{D, D'\} \in C_i^*/\langle \circ\sigma_i \rangle$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) die Beziehung

$$\{C, C'\} \neq \{D, D'\} \iff K_{\{C, C'\}} \cap K_{\{D, D'\}} = \emptyset \quad (37)$$

und damit die Injektivität von  $\Psi$  folgt, aus der sich dann schnell die Behauptung ergibt.  $\square$

Zur Definition des Begriffs der Tutte-Abbildung—wir beschränken uns dabei auf den für die späteren Betrachtungen interessanten Fall  $n = 2$ —führen wir auf  $\Sigma := \Sigma_2$  zunächst eine Wohlordnung ein, indem wir für  $\tau, \tau' \in \Sigma$  ( $\tau = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_\ell}$ ,  $\tau' = \sigma_{i'_1}\sigma_{i'_2}\cdots\sigma_{i'_\ell}$ ,  $i_1 \neq \cdots \neq i_\ell$ ,  $i'_1 \neq \cdots \neq i'_\ell$ ) definieren:

$$\tau \sqsubset \tau' \quad (38)$$

genau dann, wenn  $\tau, \tau'$  einer der folgenden Bedingungen genügen:

- (1)  $\tau = 1$  und  $\tau' \neq 1$
- (2)  $\tau \in \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$  und  $\tau' \notin \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$
- (3)  $\tau, \tau' \in \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$  und  $i_1 < i'_1$  oder  $i_1 = i'_1$  und  $\ell < \ell'$
- (4)  $\tau, \tau' \notin \langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$  und  $(\ell < \ell'$  oder  $(\ell = \ell'$  und  $i_1 < i'_1))$ .

Ist  $\mathcal{C}$  ein endliches, transitives Kammernsystem und  $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{C}$  ( $\mathcal{E} \neq \mathcal{C}$ ) eine  $\sigma_0$ -invariante Teilmenge von  $\mathcal{C}$ , so existiert auf Grund der Transitivität von  $\mathcal{C}$  zu jedem  $E \in \mathcal{E}$  ein  $\tau \in \Sigma$  mit  $E\tau \notin \mathcal{E}$ , für welches wegen  $\mathcal{E}\sigma_0 = \mathcal{E}$  offenbar  $\tau \neq \sigma_0$  gilt. Aus  $E\tau \notin \mathcal{E}$  folgt sofort  $E\tau\sigma_0 \notin \mathcal{E}\sigma_0 = \mathcal{E}$ , so daß das obige  $\tau$  sogar in  $\Sigma^+$  gewählt werden kann. Daher definiert die Zuordnung

$$C \longmapsto C_{\mathcal{E}} \quad (39)$$

mit

$$C_{\mathcal{E}} := C \cdot \min(\tau \in \Sigma^+ \mid C\tau \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{E}) \quad (40)$$

eine wohldefinierte Abbildung

$$\vartheta_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{C} \setminus \mathcal{E}. \quad (41)$$

Für  $[\mathcal{C}, \mathcal{C}_0] \in \mathcal{M}_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ ) setze

$$\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}_0 \cdot \langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle \quad (42)$$

und

$$\mathcal{C}'_0 := \vartheta_{\mathcal{C}_0}(\mathcal{C}_0). \quad (43)$$

$\mathcal{C}_0$  ist offenbar  $\sigma_0$ -invariant und das Cayley-Diagramm von  $\mathcal{C}_0$ —aufgefaßt als  $\langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle$ -Menge—ist wegen  $r_{02}(C) \leq 2$  (für alle  $C \in \mathcal{C}$ ) zu einem der 5 Diagramme in Abb. 1 isomorph.

Es folgt ferner  $\#\mathcal{C}_0/\langle \sigma_0 \rangle \leq 2$  und  $\mathcal{C}_2^* = \{C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_0 \mid C\sigma_2 \in \mathcal{C}_0\} = \emptyset$ , so daß man mit Korollar 2 nun leicht die Ungleichung

$$\#\pi_0(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) \leq 2 \quad (44)$$

erhält. Ist  $\#\pi_0(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) = 2$ , also  $\mathcal{C}'_0 \circ \Sigma \neq \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ , so setze ferner

$$\mathcal{C}' := \mathcal{C}'_0 \circ \Sigma \quad (45)$$

$$\mathcal{C}''_0 := \vartheta_{\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}'}(\mathcal{C}_0) \quad (46)$$

$$\mathcal{C}'' := \mathcal{C}''_0 \circ \Sigma. \quad (47)$$

Dann definiert die Zuordnung

$$[\mathcal{C}, C_0] \mapsto T_n(\mathcal{C}, C_0) \quad (48)$$

mit

$$T_n(\mathcal{C}, C_0) := \begin{cases} [\mathcal{C}/\mathcal{C}_0, C'_0] & \text{falls } \#\pi_0(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) = 1 \\ ([\mathcal{C}', C'_0], [\mathcal{C}'', C''_0]) & \text{sonst} \end{cases} \quad (49)$$

eine wohlbestimmte Abbildung

$$T_n : \mathcal{M}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{M}_n \cup \bigcup_{\substack{n', n'' \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ n' + n'' = n}} (\mathcal{M}_{n'} \times \mathcal{M}_{n''}), \quad (50)$$

die wir als die *Tutte-Abbildung* für die Menge  $\mathcal{M}_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ ) bezeichnen.

### 3.2 Stratifikationen

Der Begriff der Stratifikation, den wir nachfolgend erläutern werden, ist ebenfalls fundamental für den hier durchgeführten Ansatz zur Entwicklung von Rekursionsformeln für die Zahlen  $K_n(\Gamma)$ , wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

Es seien  $(\mathcal{N}_n)_{n \in \{1, 2, \dots\}}$  und  $(Y_n)_{n \in \{1, 2, \dots\}}$  zwei Familien endlicher Mengen  $\mathcal{N}_n$  bzw.  $Y_n$ . Es sei ferner  $(U_n)_{n \in \{1, 2, \dots\}}$  eine Familie von Abbildungen

$$U_n : \mathcal{N}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{N}_n \cup \bigcup_{\substack{n', n'' \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ n' + n'' = n}} (\mathcal{N}_{n'} \times \mathcal{N}_{n''}) \quad (n > 0) \quad (51)$$

Dann nennen wir eine Familie  $(tp_n)_{n \in \{1, 2, \dots\}}$  von Abbildungen

$$tp_n : \mathcal{N}_n \longrightarrow Y_n \quad (52)$$

eine *Stratifikation* des Systems  $(\mathcal{N}_{n+1}; U_n)_{n \in \{1, 2, \dots\}}$ , falls Familien  $(A_n)_{n \in \{1, 2, \dots\}}$  und  $(B_{(n; n', n'')})_{(n; n', n'') \in \{1, 2, \dots\}^3}$  von Abbildungen

$$A_{n+1} : Y_{n+1} \times Y_n \longrightarrow \mathbb{N} \quad (53)$$

bzw.

$$B_{(n+1; n', n'')} : Y_{n+1} \times Y_{n'} \times Y_{n''} \longrightarrow \mathbb{N} \quad (54)$$

existieren, so daß für alle  $y_{n+1} \in Y_{n+1}$  und  $D_n \in \mathcal{N}_n$  bzw.  $(D_{n'}, D_{n''}) \in \mathcal{N}_{n'} \times \mathcal{N}_{n''}$  ( $n', n'' \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ,  $n' + n'' = n$ ) die Beziehung

$$A_{n+1}(y_{n+1}; tp_n(D_n)) = \#\{D_{n+1} \in \mathcal{N}_{n+1} \mid U_n(D_{n+1}) = D_n, \quad (55)$$

$$tp_{n+1}(D_{n+1}) = y_{n+1}\}$$

bzw.

$$B_{(n+1; n', n'')}(y_{n+1}; tp_{n'}(D_{n'}), tp_{n''}(D_{n''})) = \#\{D_{n+1} \in \mathcal{N}_{n+1} \mid \quad (56)$$

$$U_n(D_{n+1}) = (D_{n'}, D_{n''}), tp_{n+1}(D_{n+1}) = y_{n+1}\}$$

gilt. D.h.: die Kardinalität von  $\{D_{n+1} \in \mathcal{N}_{n+1} \mid U_n(D_{n+1}) = D_n, tp_{n+1}(D_{n+1}) = y_{n+1}\}$  ( $\{D_{n+1} \in \mathcal{N}_{n+1} \mid U_n(D_{n+1}) = (D_{n'}, D_{n''}), tp_{n+1}(D_{n+1}) = y_{n+1}\}$ ) hängt für festes  $y_{n+1}$  nur vom Typ  $y_n = tp_n(D_n)$  ( $(y_{n'}, y_{n''}) = (tp_{n'}(D_{n'}), tp_{n''}(D_{n''}))$ ) von  $D_n$  ( $(D_{n'}, D_{n''})$ ) ab. Setzt man nun für  $n \in \mathbb{N}$  ( $n > 0$ ) und  $y_n \in Y_n$

$$\mathcal{N}_n(y_n) := \{D_n \in \mathcal{N}_n \mid tp_n(D_n) = y_n\} \quad (57)$$

und

$$N_n(y_n) := \#\mathcal{N}_n(y_n), \quad (58)$$

so erhält man leicht

$$\begin{aligned} N_{n+1}(y_{n+1}) &= \sum_{D_n \in \mathcal{N}_n} \#\{D_{n+1} \in \mathcal{N}_{n+1} \mid tp_{n+1}(D_{n+1}) = y_{n+1}, \\ &\quad U_n(D_{n+1}) = D_n\} \\ &+ \sum_{\substack{(D_{n'}, D_{n''}) \in \mathcal{N}_{n'} \times \mathcal{N}_{n''} \\ n', n'' \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ n' + n'' = n}} \#\{D_{n+1} \in \mathcal{N}_{n+1} \mid tp_{n+1}(D_{n+1}) = y_{n+1}, \\ &\quad U_n(D_{n+1}) = (D_{n'}, D_{n''})\} \\ &= \sum_{D_n \in \mathcal{N}_n} A_{n+1}(y_{n+1}; tp_n(D_n)) + \\ &+ \sum_{\substack{(D_{n'}, D_{n''}) \in \mathcal{N}_{n'} \times \mathcal{N}_{n''} \\ n', n'' \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ n' + n'' = n}} B_{(n+1; n', n'')}(y_{n+1}; tp_{n'}(D_{n'}), tp_{n''}(D_{n''})) \\ &= \sum_{y_n \in Y_n} A_{n+1}(y_{n+1}; y_n) N_n(y_n) \end{aligned}$$



$$+ \sum_{\substack{(y_{n'}, y_{n''}) \in Y_{n'} \times Y_{n''} \\ n', n'' \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ n' + n'' = n}} B_{(n+1; n', n'')}(y_{n+1}; y_{n'}, y_{n''}) \cdot N_{n'}(y_{n'}) \cdot N_{n''}(y_{n''}).$$

Es gilt daher das

**Lemma 5** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ( $n > 0$ ) und alle  $y_n \in Y_n$  gilt

$$N_1(y_1) = \#\mathcal{N}_1(y_1)$$

und

$$\begin{aligned} N_{n+1}(y_{n+1}) = & \sum_{y_n \in Y_n} A_{n+1}(y_{n+1}; y_n) N_n(y_n) \\ & + \sum_{\substack{(y_{n'}, y_{n''}) \in Y_{n'} \times Y_{n''} \\ n', n'' \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ n' + n'' = n}} B_{(n+1; n', n'')}(y_{n+1}; y_{n'}, y_{n''}) \cdot N_{n'}(y_{n'}) \cdot N_{n''}(y_{n''}). \end{aligned}$$

## 4 Orientierte Delaney-Symbole

Wir definieren nun zunächst eine Stratifikation  $tp_n : \mathcal{M}_n^+ \rightarrow Y_n$  für die Menge

$$\mathcal{M}_n^+ := \{[C, C_0] \in \mathcal{M}_n \mid C \text{ orientierbar}\} \tag{59}$$

( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ ). Wir wählen diese Stratifikation so, daß sie für jedes  $[C, C_0] \in \mathcal{M}_n^+$  die "Orbitstruktur" von  $(C, C_0)|_{(\sigma_0, \sigma_2)}$  und  $(C, C_0)|_{(\sigma_1, \sigma_2)}$  bis auf Isomorphie eindeutig festlegt, während sie für  $(C, C_0)|_{(\sigma_0, \sigma_1)}$  nur die Anzahl der Orbits bestimmt. Hierzu genügen wegen  $r_{02}(C) \leq 2$  für alle  $C \in \mathcal{C}$  die Parameter  $o_{02}(C, 1)$ ,  $o_{02}(C, 2)$ ,  $o_{12}(C, k)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 0$ ) und  $o_{01}(C)$ , da die  $(\sigma_i, \sigma_j)$ -Orbits ( $0 \leq i < j \leq 2$ ) der hier betrachteten  $\Sigma$ -Mengen nur von einfachstem Typ, nämlich allesamt "Kreise" sind. Durch diese Orbitdaten wird auch die Euler-Charakteristik  $\chi(\|C\|_{top})$  und damit auch das Geschlecht  $g(\|C\|_{top}) = \frac{1}{2}(2 - \chi(\|C\|_{top}))$  festgelegt. Wir werden dennoch aus Bequemlichkeit das Geschlecht  $g(\|C\|_{top})$  wie auch die Kardinalität  $n = o_{02}(C)$  als zusätzliche Orbitparameter aufnehmen.

Setze

$$Y := \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^{\{1, 2, \dots\}^1} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \tag{60}$$

<sup>1</sup>Für nichtleere Mengen  $U, V$  bezeichnen wir mit  $U^{(V)}$ —wie üblich—die Menge  $\{x : V \rightarrow U \mid x(v) = 0 \text{ für fast alle } v \in V\}$

und definiere für  $n \in \mathbb{N}$  ( $n > 0$ )

$$tp_n : \mathcal{M}_n^+ \longrightarrow Y \quad (61)$$

für alle  $[\mathcal{C}, C_0] \in \mathcal{M}_n^+$  durch die Vorschrift

$$tp_n([\mathcal{C}, C_0]) = (y_1, y_2, y_3; y_4; y_5; y_6) \quad (62)$$

genau dann, wenn

- (1)  $y_1 = o_{02}(\mathcal{C}) (= n)$ ,  $y_2 = o_{02}(\mathcal{C}, 1)$ ,  $y_3 = o_{02}(\mathcal{C}, 2)$ ,
- (2)  $y_4(k) = o_{12}(\mathcal{C}, k) - \delta_{r_{12}(C_0)}^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ( $k > 0$ ),
- (3)  $y_5 = o_{01}(\mathcal{C})$  und
- (4)  $y_6 = g(\|\mathcal{C}\|_{top}) = \frac{1}{2}(2 - \chi(\|\mathcal{C}\|_{top}))$

ist. Dann folgt aus diesen Definitionen leicht das

**Lemma 6** Für alle  $y = (y_1, y_2, y_3; y_4; y_5; y_6) \in \text{Bild}(tp_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ ) gilt:

1.  $y_1 = y_2 + y_3 = n$ .
2.  $y_6 = \frac{1}{2}(y_1 + 1 - y_2 - y_5 - \sum_{k>0} y_4(k))$ .
3.  $y_2 + 2y_5 + 4y_6 - 2 + \sum_{k>0} (2 - k)y_4(k) > 0$ .
4.  $d := \text{grad}(y_4) := \max(k \in \{1, 2, \dots\} | y_4(k) \neq 0) \leq y_1 + 1 + y_5 + 2y_6 - k_0 \leq y_1 + 1 + y_5 + 2y_6$ , wobei  $k_0 := k_0(y_4) := y_2 + 2y_5 + 4y_6 - 2 + \sum_{k>0} (2 - k)y_4(k)$ .

BEWEIS: Es sei  $[\mathcal{C}, C_0]$  ein Element von  $\mathcal{M}_n^+$  und  $y = tp_n([\mathcal{C}, C_0])$ .

(1) Nach Definition von  $\mathcal{M}_n^+$  ist  $\mathcal{O}_{02}(\mathcal{C}) = \mathcal{O}_{02}^+(\mathcal{C}) = \mathcal{O}_{02}(\mathcal{C}, 1) \cup \mathcal{O}_{02}(\mathcal{C}, 2)$ ,

d.h.:  $o_{02}(\mathcal{C}, 1) + o_{02}(\mathcal{C}, 2) = o_{02}(\mathcal{C}) = n$ .

(2) Aus  $g(\|\mathcal{C}\|_{top}) = \frac{1}{2}(2 - \chi(\|\mathcal{C}\|_{top}))$  und der Gleichung

$$\sum_{0 \leq i \leq 2} o_i(\mathcal{C}) = \frac{3}{2} \# \mathcal{C}$$

folgt zunächst die Beziehung

$$g(\|\mathcal{C}\|_{top}) = 1 - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} \# \mathcal{C} + o_{02}(\mathcal{C}, 1) + o_{02}(\mathcal{C}, 2) + o_{01}(\mathcal{C}) + \sum_{k>0} o_{12}(\mathcal{C}, k)).$$

Wegen  $\frac{1}{2}\#\mathcal{C} = o_{02}(\mathcal{C}, 1) + 2o_{02}(\mathcal{C}, 2)$  erhält man hieraus

$$g(\|\mathcal{C}\|_{top}) = 1 - \frac{1}{2}(-o_{02}(\mathcal{C}, 2) + o_{01}(\mathcal{C}) + \sum_{k>0} o_{12}(\mathcal{C}, k)),$$

und wegen  $o_{02}(\mathcal{C}, 2) = n - o_{02}(\mathcal{C}, 1)$  weiter

$$g(\|\mathcal{C}\|_{top}) = \frac{1}{2}(n - o_{02}(\mathcal{C}, 1) - o_{01}(\mathcal{C}) + 2 - \sum_{k>0} o_{12}(\mathcal{C}, k)),$$

woraus wegen  $\sum_{k>0} o_{12}(\mathcal{C}, k) = 1 + \sum_{k>0} y_4(k)$  und (1)-(4) von (62) schließlich die Behauptung folgt.

(3) Diese Aussage ergibt sich leicht aus der Beobachtung, daß wegen der Fixpunktfreiheit von  $(\mathcal{C}_0, C_0)$  nach (62(2))

$$r_{12}(C_0) = \frac{1}{2}\#\mathcal{C} - \sum_{k>0} ky_4(k)$$

gilt, woraus wegen  $\frac{1}{2}\#\mathcal{C} = y_2 + 2y_3 = y_2 + 2y_1 - 2y_2 = 2y_1 - y_2$  zunächst

$$r_{12}(C_0) = 2y_1 - y_2 - \sum_{k>0} ky_4(k)$$

und durch Subtraktion der aus 2. folgenden Beziehung

$$0 = -4y_6 + 2y_1 + 2 - 2y_2 - 2y_5 - \sum_{k>0} 2y_4(k)$$

schließlich

$$0 < r_{12}(C_0) = y_2 + 2y_5 + 4y_6 - 2 + \sum_{k>0} (2 - k)y_4(k)$$

folgt.

(4) Ohne Einschränkung sei  $d > 0$ . Nach Definition ist

$$k_0 = y_2 + 2y_5 + 4y_6 - 2 + \sum_{k=1}^{d-1} (2 - k)y_4(k) + (2 - d)y_4(d).$$

Da  $(2 - k)y_4(k) \leq 0$  für  $k \geq 2$  ist, folgt hieraus zunächst

$$k_0 \leq y_2 + 2y_5 + 4y_6 - 2 + y_4(1) + (2 - d)y_4(d)$$

und wegen  $y_4(d) \geq 1$  und  $(2-d) < 0$  weiter

$$d \leq y_2 + 2y_5 + 4y_6 + y_4(1) - k_0.$$

Man erhält daher schließlich mit Hilfe der aus Lemma 6(2) folgenden Beziehung

$$y_4(1) \leq \sum_{k=1}^{\infty} y_4(k) = y_1 + 1 - y_2 - y_5 - 2y_6,$$

die Ungleichung

$$d \leq y_1 + 1 + y_5 + 2y_6 - k_0,$$

die zu beweisen war.  $\square$

Setzen wir schließlich für  $n \in \mathbb{N}$  ( $n > 0$ ) und  $y \in Y$

$$\mathcal{M}_n^+(y) := \{[\mathcal{C}, C_0] \in \mathcal{M}_n^+ | tp_n([\mathcal{C}, C_0]) = y\} \quad (63)$$

und

$$M_n^+(y) := \#\mathcal{M}_n^+(y), \quad (64)$$

so erhält man mit Lemma 6 weiter das

**Lemma 7** Für  $n \in \mathbb{N}$  ( $n > 0$ ) und  $y = (y_1, y_2, y_3; y_4; y_5; y_6) \in Y$  gelten die folgenden Aussagen:

1. Die Kammernsysteme  $(\mathcal{C}^{(j)}, C_0^{(j)})$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) seien durch die Cayley-Diagramme in Abb. 2.1 definiert. Dann gilt

$$\mathcal{M}_1^+ = \{[\mathcal{C}^{(j)}, C_0^{(j)}] | j = 1, 8, 10\},$$

und für den "Typ" dieser Systeme:

$$\begin{aligned} tp_1([\mathcal{C}^{(1)}, C_0^{(1)}]) &= (1, 1, 0; (0, \dots, ); 1; 0), \\ tp_1([\mathcal{C}^{(8)}, C_0^{(8)}]) &= (1, 0, 1; (0, \dots, ); 2; 0), \\ tp_1([\mathcal{C}^{(10)}, C_0^{(10)}]) &= (1, 0, 1; (1, 0, \dots, ); 1; 0). \end{aligned}$$

2.

$$M_1^+(y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y = (1, 1, 0; (0, \dots, ); 1; 0), \\ & y = (1, 0, 1; (0, \dots, ); 2; 0) \text{ oder} \\ & y = (1, 0, 1; (1, 0, \dots, ); 1; 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.  $M_n^+(y) = 0$ , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a)  $y_1 \neq n$  oder  $y_1 \neq y_2 + y_3$ .
- (b)  $y_6 \neq \frac{1}{2}(y_1 + 1 - y_2 - y_5 - \sum_{k>0} y_4(k))$ .
- (c)  $y_2 + 2y_5 + 4y_6 - 2 + \sum_{k>0} (2 - k)y_4(k) \leq 0$ .
- (d)  $y_j < 0$  für  $j \in \{1, 2, 3, 5, 6\}$  oder  $y_4(k) < 0$  für  $k > 0$ .
- (e)  $y_5 = 0$ .

BEWEIS: (1) Für alle  $[\mathcal{C}, C_0] \in \mathcal{M}_1^+$  ist  $C_0 \cdot \langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle (= \mathcal{C})$  wegen der geforderten Fixpunktfreiheit als  $\langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle$ -Menge isomorph zu einer der durch die Cayley-Diagramme (2,2) oder (4,4) in Abb. 2 definierten  $\langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle$ -Mengen. Daher gibt es für  $C_0\sigma_1$  im Fall (2,2) nur genau eine Wahl, nämlich  $C_0\sigma_1 = C_0\sigma_0 (= C_0\sigma_2)$ , während es im Fall (4,4) genau 2 Wahlen gibt, nämlich  $C_0\sigma_1 = C_0\sigma_0 (\Rightarrow C_0\sigma_2\sigma_1 = C_0\sigma_2\sigma_0)$  und  $C_0\sigma_1 = C_0\sigma_0\sigma_2 (\Rightarrow C_0\sigma_2\sigma_1 = C_0\sigma_0)$ , so daß  $(\mathcal{C}, C_0)$  in der Tat zu einem der in Abb. 2 definierten  $\Sigma$ -Mengen isomorph ist. Man rechnet nun leicht nach, daß diese  $\Sigma$ -Mengen vom angegebenen "Typ" sind.

(2) Diese Behauptung folgt unmittelbar aus 1. (3) Diese Aussagen folgen unmittelbar aus Lemma 6.  $\square$

Man erhält nun leicht das

**Theorem 3** Für  $n \in \mathbb{N}$  ( $n > 0$ ),  $y = (y_1, y_2, y_3; y_4; y_5; y_6) \in Y$  und mit den Anfangsbedingungen

$$M_0^+(y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y = (0, 0, 0; 0; 1; 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$M_1^+(y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y = (1, 1, 0; 0; 1; 0), \\ & y = (1, 0, 1; (1, 0, \dots, ); 1; 0) \text{ oder} \\ & y = (1, 0, 1; 0; 2; 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gilt die Beziehung

$$\begin{aligned}
 M_{n+1}^+(y) &= M_n^+(y_1 - 1, y_2 - 1, y_3; y_4; y_5; y_6) \\
 &+ \sum_{j=1}^{\infty} M_n^+(y_1 - 1, y_2, y_3 - 1; (y_4(k) - \delta_k^j)_k; y_5; y_6) \\
 &+ \sum_{j=1}^{\infty} j(y_4(j) + 1) M_n^+(y_1 - 1, y_2, y_3 - 1; (y_4(k) + \delta_k^j)_k; y_5; y_6 - 1) \\
 &+ \sum_{\substack{y'+y''=(y_1-1, y_2, y_3-1; y_4; y_5; y_6) \\ n', n'' \in \{0, 1, 2, \dots\}, n'+n''=n}} M_{n'}^+(y') M_{n''}^+(y'').
 \end{aligned}$$

BEWEIS: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß  $\mathcal{M}_{n+1}^+(y) \neq \emptyset$  ist. Wir benutzen—wie oben—Lemma 5 und bestimmen die Abbildungen  $A : Y \times Y \rightarrow \mathbb{N}$  und  $B : Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{N}$ . Es sei  $[\mathcal{C}, C_0] \in \mathcal{M}_{n+1}^+(y)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ ). Auf Grund der vorausgesetzten Fixpunktfreiheit der betrachteten Kammernsysteme kann der unter der Tutte-Abbildung  $T_n$  entfernte Orbit  $\mathcal{C}_0 = C_0 \cdot \langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle$  nur vom "Typ" (2,2) bzw. (4,4) sein (vgl. Abb. 1). Abb. 3 zeigt alle möglichen "Lagen" von  $\mathcal{C}_0$  im Kammernsystem  $(\mathcal{C}, C_0)$ , und wie  $[\mathcal{C}', C'_0] = T_n(\mathcal{C}, C_0)$  bzw.  $([\mathcal{C}', C'_0], [\mathcal{C}'', C''_0]) = T_n(\mathcal{C}, C_0)$  in den einzelnen Fällen unter der Tutte-Abbildung aus  $[\mathcal{C}, C_0]$  hervorgeht.

Setze  $k_0 := k_0(\mathcal{C}, C_0) := y_2 + 2y_5 + 4y_6 - 2 + \sum_{k>0} (2-k)y_4(k)$ . Wir bestimmen nun den "Typ"  $tp_n([\mathcal{C}', C'_0]) = y' = (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4, y'_5, y'_6)$  von  $[\mathcal{C}', C'_0]$ , bzw.  $tp_n([\mathcal{C}'', C''_0]) = y'' = (y''_1, y''_2, y''_3, y''_4, y''_5, y''_6)$  von  $[\mathcal{C}'', C''_0]$ ,  $k'_0 := k_0(\mathcal{C}, C_0)$  sowie die Kardinalität  $A(y, y')$  (bzw.  $B(y; y', y'')$ ) der Faser von  $[\mathcal{C}', C'_0]$  (bzw.  $([\mathcal{C}'], C'_0), [\mathcal{C}''], C''_0)$ ) in  $\mathcal{M}_{n+1}^+(y)$  unter der Tutte-Abbildung  $T_n$ , wobei wir—je nach der Lage von  $\mathcal{C}_0$  in  $[\mathcal{C}, C_0]$ —die folgenden sechs (Haupt-) Fälle zu unterscheiden haben:

(2,2)-1 In diesem Fall ist  $k_0 \geq 2$  und  $y'_1 = y_1 - 1, y'_2 = y_2 - 1, y'_3 = y_3, y'_4 = y_4, y'_5 = y_5$  und daher  $y'_6 = y_6$  und  $k'_0 = k_0 - 1$ . Es ist ferner  $A(y; y') = 1$ .

(4,4)-1 Mit  $\mathcal{O} := C_0 \cdot \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  und  $\mathcal{P} := C_0 \cdot \sigma_0 \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  sind hier die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1. Fall:  $\mathcal{O} \cap \mathcal{P} = \emptyset$ : Dann sind  $k_0 \geq 2, y'_1 = y_1 - 1, y'_2 = y_2, y'_3 = y_3 - 1, y_4(k)' = y_4(k) - \delta_k^j$  ( $j \in \mathbb{N}, j \geq 2$ ),  $y'_5 = y_5$  und folglich  $y'_6 = y_6$  und  $k'_0 = k_0 - 2 + j$ . Ferner ist  $A(y; y') = 1$ .

2. Fall:  $\mathcal{O} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$  und  $\#\pi_0(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) = 1$ : Man erhält dann leicht  $k_0 \geq 4, y'_1 = y_1 - 1, y'_2 = y_2, y'_3 = y_3 - 1, y_4(k)' = y_4(k) + \delta_k^j (j \in \mathbb{N}, j \geq 1), y'_5 = y_5, y'_6 = y_6 - 1, k'_0 = k_0 - 2 - j$  und schließlich  $A(y; y') = j \cdot (y_4(j) + 1)$ .

3. Fall:  $\mathcal{O} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$  und  $\#\pi_0(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) = 2 (\Rightarrow y_5 > 1)$ : Es folgt dann  $k_0 \geq 4, y'_1 + y''_1 = y_1 - 1, y'_2 + y''_2 = y_2, y'_3 + y''_3 = y_3 - 1, y'_4 + y''_4 = y_4, y'_5 + y''_5 = y_5, y'_6 + y''_6 = y_6, k'_0 + k''_0 = k_0 - 2$  und  $B(y; y', y'') = 1$ .

(4,4)-2 In diesem Fall erhält man  $k_0 \geq 3, y'_1 = y_1 - 1, y'_2 = y_2, y'_3 = y_3 - 1, y'_4 = y_4, y'_5 = y_5 - 1 (\Rightarrow y_5 > 1), y'_6 = y_6, k'_0 = k_0 - 2$  und  $A(y; y') = 1$ .

(4,4)-5 Hier ist  $k_0 \geq 2, y'_1 = y_1 - 1, y'_2 = y_2, y'_3 = y_3 - 1, y_4(k)' = y_4(k) - \delta_k^1 (k \in \mathbb{N}, k > 0), y'_5 = y_5, y'_6 = y_6, k'_0 = k_0 - 1$  und  $A(y; y') = 1$ .

(4,4)-8 Analog wie im Fall (4,4)-2 erhält man hier  $k_0 \geq 3, y'_1 = y_1 - 1, y'_2 = y_2, y'_3 = y_3 - 1, y'_4 = y_4, y'_5 = y_5 - 1 (\Rightarrow y_5 > 1), y'_6 = y_6, k'_0 = k_0 - 2$  und  $A(y; y') = 1$ .

(4,4)-11 In diesem letzten Fall erhält man schließlich  $k_0 = 1, y'_1 = y_1 - 1, y'_2 = y_2, y'_3 = y_3 - 1, y_4(k)' = y_4(k) - \delta_k^j (k, j \in \mathbb{N}, k > 1, j \geq 2), y'_5 = y_5, y'_6 = y_6, k'_0 = j - 1$  und  $A(y; y') = 1$ .

Setzt<sup>2</sup> man nun für alle  $y, y', y'' \in Y$

$$A(y; y') := \begin{cases} 1 & \text{falls } y' = (y_1 - 1, y_2 - 1, y_3; y_4; y_5; y_6) \text{ oder} \\ & y' = (y_1 - 1, y_2, y_3 - 1; (y_4(k) - \delta_k^j)_k; \\ & y_5; y_6) \text{ für } j \geq 1, \\ 2 & \text{falls } y' = (y_1 - 1, y_2, y_3 - 1; y_4; y_5 - 1; y_6), \\ j \cdot (y_4(j) + 1) & \text{falls } y' = (y_1 - 1, y_2, y_3 - 1; (y_4(k) + \delta_k^j)_k; \\ & y_5; y_6 - 1) \text{ für } 1 \leq j \leq k_0 - 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$B(y; y', y'') := \begin{cases} 1 & \text{falls } y' + y'' = (y_1 - 1, y_2, y_3 - 1; y_4; y_5, y_6) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

so folgt mit Lemma 1.3.5 zunächst die Rekursionsformel

$$M_{n+1}^+(y) = M_n^+(y_1 - 1, y_2 - 1, y_3; y_4; y_5; y_6)$$

<sup>2</sup>Man beachte, daß wegen Lemma 7(4) die oben für  $k_0$  gewonnenen Bedingungen hier unberücksichtigt bleiben können, denn ihre Verletzung impliziert in jedem Fall  $k'_0 \leq 0$  (bzw.  $k'_0 + k''_0 \leq 0$ ) für das (die) korrespondierende(n)  $k'_0$  ( $k'_0$  und  $k''_0$ ) und damit nach Lemma 7(4) weiter  $M_n^+(y') = 0$  (bzw.  $M_n^+(y') = 0$  oder  $M_n^+(y'') = 0$ ).

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\infty} M_n(y_1 - 1, y_2, y_3 - 1; (y_4(k) - \delta_k^j)_k; y_5; y_6) \\
& + 2 \cdot M_n^+(y_1 - 1, y_2, y_3 - 1; y_4; y_5 - 1; y_6) \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} j(y_4(j) + 1) M_n^+(y_1 - 1, y_2, y_3 - 1; (y_4(k) + \delta_k^j)_k; y_5; y_6 - 1) \\
& + \sum_{\substack{y'+y''=(y_1-1, y_2, y_3-1; y_4; y_5; y_6) \\ n', n'' \in \{1, 2, \dots\}, n'+n''=n}} M_{n'}^+(y') M_{n''}^+(y''),
\end{aligned}$$

aus der mit der Festsetzung  $M_0^+(0, 0, 0; 0; 1; 0) := 1$  schließlich die Behauptung folgt.  $\square$

## 5 Die Rekursionsformeln

Wir können nun unter Rückgriff auf die im Abschnitt 4 entwickelten Abzählformeln für die Zahlen  $M_n^+(y)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$ ,  $y \in Y^{(f)}$ ) gemäß unseren Überlegungen in Abschnitt 3 Rekursionsformeln formulieren, mit deren Hilfe sich die Anzahlen  $K_n(\Gamma)$  der Isomorphieklassen aller punktierten, äquivarianten, topologisch periodischen Pflasterungen  $(T, C_0; \Gamma)$  der euklidischen Ebene mit (eigentlicher) kristallographischer Symmetriegruppe  $\Gamma$  und  $n$  nicht äquivalenten Flächenstücken berechnen lassen. Setzt man dazu zunächst für  $y \in Y^{(f)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 0$  mit der Bezeichnung  $k_0 := y_2 + 2y_5 + 4y_6 - 2 + \sum_{j>0} (2-j)y_4(j)$

$$\tilde{y}_4(k) := y_4(k) + \delta_k^{k_0} \quad (65)$$

so besitzt offenbar jedes  $[C, C_0] \in \mathcal{M}_n^{(f)}(y)$ ,  $y \in Y^{(f)}$  genau  $\tilde{y}_4(k)$   $(\sigma_1, \sigma_2)$ -Orbits der Länge  $2k$ . Man erhält dann mit Hilfe von Korollar 1 und elementaren kombinatorischen Argumenten sofort das

**Theorem 4** *Ist  $n \in \mathbb{N}$  ( $n > 0$ ) eine natürliche Zahl, so gilt für die Zahlen  $K_n(\Gamma)$  im Falle einer eigentlichen 2-dimensionalen kristallographischen Gruppe  $\Gamma$ :*

$$K_n(C_1) = \sum_{\substack{y \in Y^{(f)} \\ y_2 = \tilde{y}_4(1) = \tilde{y}_4(2) = 0 \\ y_5 = n, y_6 = 1}} M_{y_1}^+(y)$$



$$\begin{aligned}
 K_n(C_2) &= \sum_{\substack{y \in Y(f) \\ y_5 = n, y_6 = 0}} \binom{y_2 + n + \sum_{k>0} \tilde{y}_4(k)}{4 - y_2 - \tilde{y}_4(1) - \tilde{y}_4(2)} M_{y_1}^+(y) \\
 K_n(C_3) &= \sum_{\substack{y \in Y(f) \\ y_2 = 0, y_5 = n, y_6 = 0}} \binom{n + \sum_{k>0} \tilde{y}_4(k)}{3 - \tilde{y}_4(1) - \tilde{y}_4(2)} M_{y_1}^+(y) \\
 K_n(C_4) &= \sum_{\substack{y \in Y(f) \\ y_2 \leq 1, y_5 = n, y_6 = 0}} \binom{y_2 + n + \sum_{k>0} \tilde{y}_4(k)}{3 - y_2 - \tilde{y}_4(1) - \tilde{y}_4(2)} (3 - 2\delta_1^{y_2}) M_{y_1}^+(y) \\
 K_n(C_6) &= \sum_{\substack{y \in Y(f) \\ y_2 \leq 1, y_5 = n, y_6 = 0}} \binom{y_2 + n + \sum_{k>0} \tilde{y}_4(k)}{3 - y_2 - \tilde{y}_4(1) - \tilde{y}_4(2)} 2(3 - 2\delta_1^{y_2}) M_{y_1}^+(y) \\
 &= 2K_n(C_4)
 \end{aligned}$$

Es sei abschließend bemerkt, daß sich entsprechende Formeln auch für die Anzahlen  $K_n(\Gamma)$  (der Isomorphieklassen) aller punktierten, äquivarianten, periodischen Pflasterungen der euklidischen Ebene mit genau  $n$  unter  $\Gamma$  inäquivalenten Kanten formulieren lassen.

## Literatur

- [Arque-1] Didier ARQUES: *Énumération et Codage des cartes et Hypercartes planaires pointées*, Sémin. Lothar. de Comb. , Le Kleebach (France), 1985.
- [Arque-2] Didier ARQUES: *Bijections entre cartes planaires et arbres bien étiquetés*, Sémin. Lothar. de Comb. , Le Kleebach (France), 1985.
- [Dress-1] Andreas W. M. DRESS: *The 37 combinatorial types of regular 'Heaven and Hell' patterns in the euclidean plane*, to appear in the proceedings of a conference on M. C. Escher, held in Roma, in May 1985.

- [Dress-2] Andreas W. M. DRESS: *Relaxations of periodicity in the topological theory of tilings*, to appear in the Proc. of the workshop on Quasi-crystals, Les Houches, 10–20 March 1986.
- [Dress-3] Andreas W. M. DRESS: *Regular polytopes and equivariant tessellations from a combinatorial point of view*, in “Algebraic Topology, Göttingen 1984”, SLN 1172, pp. 56–72, 1986.
- [Dress-4] Andreas W. M. DRESS: *Presentations of Discrete Groups, Acting on Simply Connected Manifolds, in Terms of Parametrized Systems of Coxeter Matrices—A Systematic Approach*, Adv. in Math. **63**, No. 2 (1987), pp. 196–212.
- [Dress-Schar-1] Andreas W. M. DRESS und Rudolf SCHARLAU: *Zur Klassifikation äquivarianter Pflasterungen*, Mitteilungen aus dem Math. Seminar Giessen, No. 164, pp. 83–136, Coxeter-Festschrift, 1984.
- [Dress-Schar-2] Andreas W. M. DRESS und Rudolf SCHARLAU: *The 37 combinatorial types of minimal, nontransitive, equivariant tilings of the euclidean plane*, Special Issue on Discrete Geometry, Discrete Math. **60** (1986), pp. 121–138.
- [Dress-Franz-1] Andreas W. M. DRESS und Reinhard FRANZ: *Parametrizing the subgroups of finite index in a free group and related topics*, Bayreuther mathem. Schriften **20** (1985), pp. 1–8.
- [Dress-Franz-2] Andreas W. M. DRESS und Reinhard FRANZ: *Zu einer Frage von Herrn S. Bilinski, Pflasterungen von Brezelflächen betreffend*, Rad Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti, Knjiga 428; Matematičke znanosti, svezak **6**, Zagreb (1987) pp. 83–101.
- [Dress-Franz-3] Andreas W. M. DRESS und Reinhard FRANZ: *Zur Parametrisierung von Untergruppen freier Gruppen*, Beiträge zur Algebra und Geometrie **24** (1987), pp. 125–134.

- [Dress-Franz-4] Andreas W. M. DRESS und Reinhard FRANZ: *Recursion formulas counting periodic tilings*, in preparation.
- [Dress-Huson-1] Andreas W. M. DRESS und Daniel HUSON: *On Tilings of the Plane*, *Geometriae Dedicata* 24 (1987), pp. 295–310.
- [Dress-Huson-2] Andreas W. M. DRESS und Daniel HUSON: *Heaven and Hell Tilings*, to appear.
- [Franz] Reinhard FRANZ: *Zum rekursiven Aufbau der Familie der periodischen Pflasterungen der euklidischen Ebene*, Dissertation, Bielefeld 1988.
- [Franz-Huson] Reinhard FRANZ und Daniel HUSON: *Zu einer Frage von Herrn S. Bilinski, Pflasterungen der Brezelfläche betreffend II*, in preparation.
- [Grünb-Sheph] B. GRÜNBAUM und G. C. SHEPARD: *The Eighty-One Types of Isohedral Tilings in the Plane*, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 82 (1977), pp. 177–196.
- [Tits] Jacques TITS *Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs*, Springer, Lecture Notes in Mathematics 386, Berlin, Heidelberg, New York (1974).
- [Tutte] W. T. TUTTE: *A Census of Planar Maps*, *Can. J. Math.* 15 (1963), pp. 249–271.

REINHARD FRANZ,  
Fachbereich Mathematik/Informatik,  
FernUniversität Hagen,  
Postfach 940,  
D-5800 Hagen.

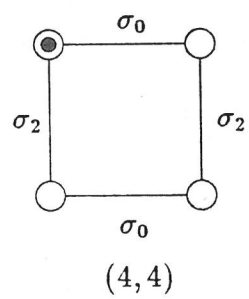
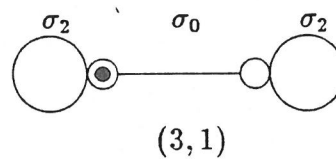
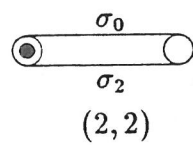
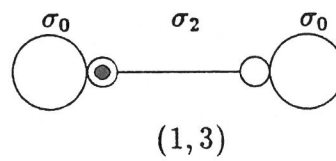
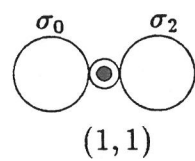
Abbildung 1: Die 5 Typen von  $\langle \sigma_0, \sigma_2 \rangle$ -Orbits

Abbildung 2: Die 3 Isomorphieklassen von  $\mathcal{M}_1^+$

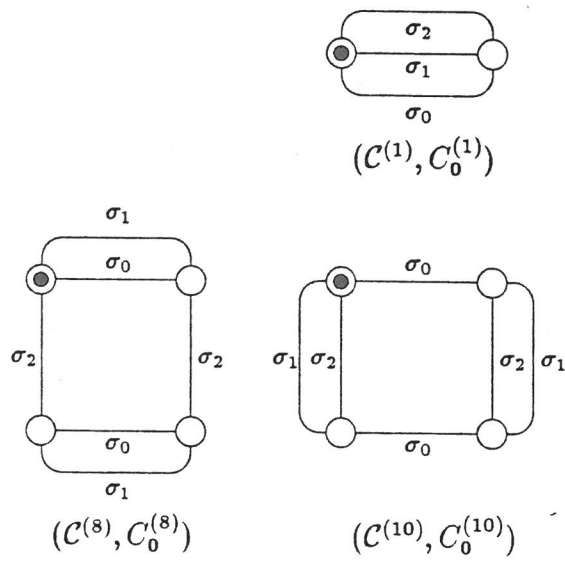
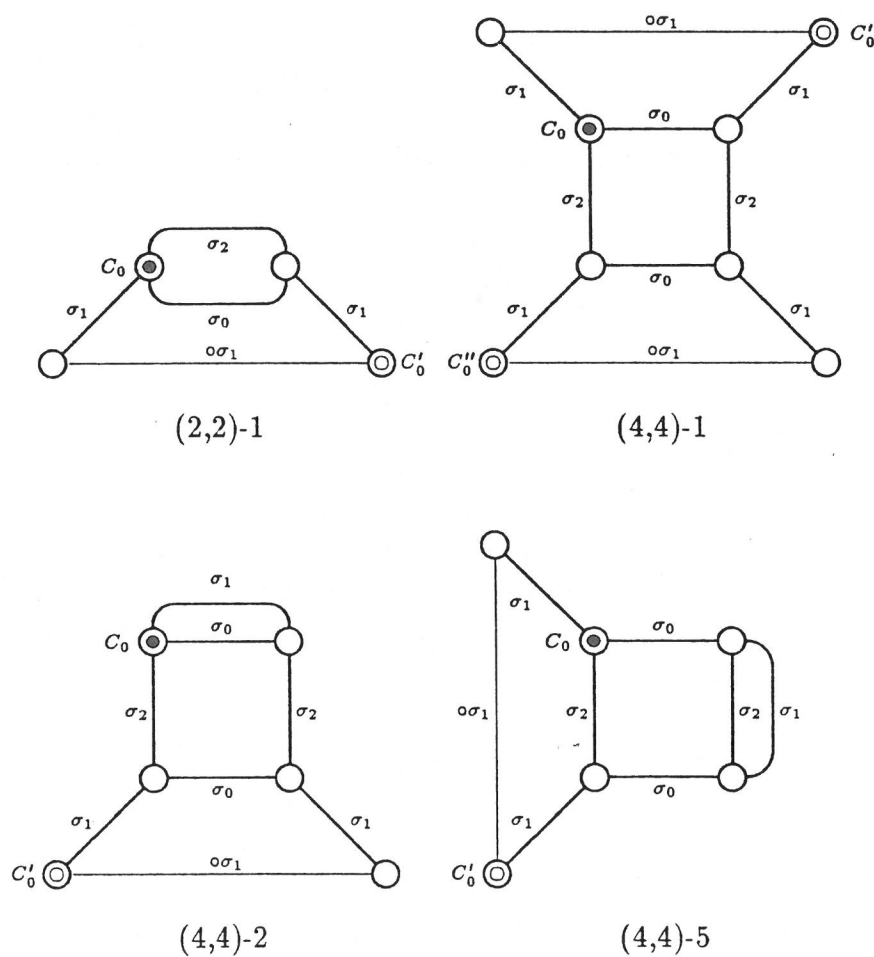
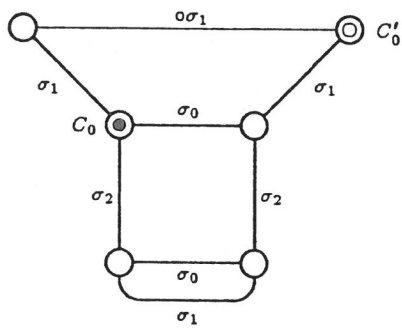
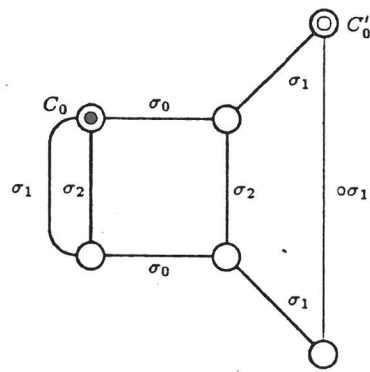


Abbildung 3: Die "Lagen" von  $C_0$  in  $[\mathcal{C}, C_0] \in \mathcal{M}_{n+1}^+(y)$ 



(4,4)-8



(4,4)-11

