Beiträge zur Frage der globalen Konsistenz lokaler geometrischer Daten

I Der Fall Dimension 1: Quantitative Aspekte qualitativen Vergleichens

von A.W.M.Dress, Bielefeld, z.Zt. IBM Wiss. Zentrum Heidelberg
und T.Havel, La Jolla.

Seit der Erkenntnis der Konstanz der Winkelsumme im Dreieck spielt die Frage nach Kriterien für die globale Konsistenz lokaler geometrischer Daten eine wesentliche Rolle in der Geometrie. So lassen sich z.B. viele wichtige Ergebnisse der klassischen und der modernen Differentialgeometrie zwanglos als Beiträge zur Beantwortung dieser Frage auffassen. Aber auch in der kombinatorischen Geometrie und deren Anwendungen sind derlei Konsistenzkriterien von großer Bedeutung. So lebt z.B. die Theorie der (orientierten) Matroide zu einem guten Teil von dem Spannungsverhältnis, welches sich dadurch ergibt, daß die aus den Grassmann-Plücker-Identitäten sich ergebenden lokalen Kriterien für die Einbettbarkeit einer endlichen Punktmenge E in den $\mathbb{R}^n$ mit vorgegebenen linearen oder affinen Abhängigkeits-(oder Orientiertheits-)Vorschriften zwar der Punktmenge E eine interessante und vieluntersuchte kombinatorisch-geometrische Struktur aufprägen (eben die eines (orientierten) Matroids), es andererseits aber im Fall $n > 2$ (bzw. $n > 1$ im affinen Fall) unmöglich ist, diese Kriterien durch endlich viele weitere lokale (und d.h. hier auf alle 'kleinen' Teilmengen von E bezogene) Kriterien so zu ergänzen, daß man insgesamt ein zugleich hinreichendes und notwendiges System von Einbettbarkeitskriterien erhält.

Ähnlich interessant erscheint zumindest aus der Sicht der Anwendungen in der Chemie und der z.B. für die mathematische Psychologie, aber auch für die Entscheidungstheorie und viele andere Disziplinen (cf.[CR]) bedeutsamen Skalierungs- und Parametrisierungstheorie die Frage nach Einbettbarkeitskriterien für Punktmengen mit vorgegebenen Vorschriften für die dabei einzuhaltenden Abstände. So kann z.B. die Theorie der metrischen Räume als die Theorie solcher Paare $(X, D : X \times X \to \mathbb{R})$ gedeutet werden, für welche für je drei Punkte $a, b, c \in X$ eine Abbildung f von $\{a, b, c\}$ in die euklidische Ebene mit $\|f(x), f(y)\| = D(x, y)$ für alle $x, y \in \{a, b, c\}$ existiert, was global zwar die Einbettbarkeit $F : X \hookrightarrow V$ in einen Banachraum V mit $D(x, y) = \|F(x) - F(y)\|$ für alle $x, y \in X$ zur Folge hat (nämlich z.B. in den mit der L_∞-Norm versehenen Raum $\mathbb{R}^X$ aller Abbildungen von

X in $\mathbb{R}$ vermöge $F : X \to \mathbb{R}^X : x \mapsto [f_x : X \to \mathbb{R} : y \mapsto D(x,y)]$ und folglich mit solcher Einbettbarkeit äquivalent ist, was aber (selbst für endliches X) die Einbettbarkeit in einen (endlich dimensionalen) Hilbertraum keineswegs impliziert: ein Gegenbeispiel liefert z.B. bereits der Raum (X, D) mit $X := \{a, b, c, d\}$ und $D(x,y) = 2$ für $x \neq y$ und $d \notin \{x,y\}$, $D(x,y) = 1$ für $x \neq y$ und $d \in \{x,y\}$ und $D(x,x) = 0$ für alle x, y in X.

Die wesentlich komplizierteren Kriterien für die Einbettbarkeit in einen Hilbertraum sind allerdings seit Cayley auch bekannt und in diesem Jahrhundert vor allem von Menger und Blumenthal unter dem Stichwort 'Distanzgeometrie'ausführlich untersucht und diskutiert worden. Ausgangspunkt dieser Theorie ist die heute leicht mit den Mitteln der elementaren linearen Algebra herleitbare Aussage, daß für einen metrischen Raum (X, D) genau dann eine isometrische Einbettung in den euklidischen normierten Raum $\mathbb{E}^n$ der Dimension n existiert, wenn für jede Folge $x_1, x_2, \ldots, x_k$ aus X mit $k \leq n + 3$ die Determinante

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_k) := \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & & & \\ \vdots & & -D(x_i, x_j)^2 & \\ -1 & & & \end{pmatrix}_{i,j=1,\ldots,k}$$

nicht negativ ist und für $k = n + 2$ und $k = n + 3$ sogar verschwindet.

Leider existiert für die für die Anwendungen vielleicht noch wichtigere Frage, wann für eine Menge X und zwei symmetrische und auf der Hauptdiagonale verschwindende Abbildungen $\underline{D}, \overline{D} : X \times X \to \mathbb{R}$ mit $\underline{D}(x,y) \leq \overline{D}(x,y)$ für alle $x, y \in X$ eine Einbettung $F : X \to \mathbb{E}_n$ mit

$$\underline{D}(x,y) \leq \|F(x), F(y)\| \leq \overline{D}(x,y)$$

existiert, kein entsprechender Satz lokaler Bedingungen ; bereits im Fall $n = 1$ liefert z.B. das Tripel $(X, \underline{D}, \overline{D})$ mit $X := \{0, \ldots, N\}$, $\underline{D}(x,y) := 1$ und $\overline{D}(x,y) := N - \varepsilon$ für $x \neq y$ $(x, y \in X)$ für $0 < \varepsilon < 1$ ein Gegenbeispiel: während es offensichtlich unmöglich ist, eine Abbildung $F : X \to \mathbb{E}^1 = \mathbb{R}$ mit

$$\underline{D}(x,y) \leq \|F(x), F(y)\| = |F(x) - F(y)| \leq \overline{D}(x,y)$$

für alle x, y in X zu finden, existieren solche Abbildungen für alle echten Teilmengen von X. Dennoch kann man im Fall $n = 1$ zumindest dann die Frage nach der Existenz einer solchen Einbettung $F : X \to \mathbb{R}$ relativ rasch entscheiden,wenn neben den oberen und unteren Schranken für die Abstände auch die 'Orientierung'von F in Form einer linearen Anordnung von X vorgegeben und folglich nach Abbildungen $F : X \to \mathbb{R}$ gefragt wird, die für alle $x, y \in X$ mit $x > y$ der Bedingung

$$\underline{D}(x,y) \leq F(x) - F(y) \leq \overline{D}(x,y)$$

genügen.Hier gilt nämlich das folgende, noch etwas allgemeinere und analog zum Satz von Hahn-Banach zu beweisende

Theorem. *Ist X eine beliebige Menge und $w : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine (in der Regel nicht symmetrische !) Abbildung, so existiert eine Abbildung $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F(x) - F(y) \leq w(x,y)$ für alle $x, y \in X$ genau dann, wenn für alle $x, y \in X$ der Wert*

$$\overline{w}(x,y) := inf(\Sigma_{i=1}^{n} w(x_{i-1}, x_i) | x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y \in X)$$

von ∞ verschieden ist. Insbesondere existiert im Fall $\#X < \infty$ ein solches F genau dann, wenn nur $\overline{w}(x,x)$ für alle $x \in X$ verschwindet.

Wie wir in unseren Arbeiten [DH1-3]zeigen (werden), lassen sich aus diesem Theorem viele wichtige Sätze, die in der 'measurement theory'(cf. [CR]und die dort zitierten Arbeiten und Bücher) eine große Rolle spielen (wie z.B. die Kennzeichnung von Intervallgraphen durch Fishburn oder der Satz von Scott und Suppes), sehr einfach und überraschend elegant herleiten. Darüber hinaus gestattet es auch die Beantwortung dort bislang noch offen gebliebener Fragen. So läßt sich etwa zeigen, daß zu einer aufsteigenden Folge von auf X definierten binären Relationen

$$R_1 \subseteq R_2 \subseteq \ldots \subseteq R_n \subseteq X \times X$$

genau dann zu jeder monoton fallenden Folge $c_1 > c_2 > \ldots > c_n$ positiver Zahlen eine Abbildung $F = F_{c_1,\ldots,c_n} : X \to \mathbb{R}$ mit

$$R_i = \{(x,y) \in X \times X | F(x) \geq F(y) + c_i\}$$

existiert, wenn dies für jede höchstens fünf-elementige Teilmenge von X der Fall ist.

[CR]M.C.Cozzens, F.Roberts: Double Semiorders and Double Indifference Graphs, SIAM J ALG DISC METH 3 (1982), 566-583

[DH1]A.W.M.Dress, T.Havel: Bound Smoothing under Chirality Constraints, eingereicht bei 'Discrete Applied Mathematics '

[DH2]A.W.M.Dress, T.Havel: Quantitative Aspects of Qualitative Comparisons, in Vorbereitung

[DH3]A.W.M.Dress, T.Havel: Tests for Global Consistency of Local Geometric Data, in Vorbereitung