Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1988, 358/S–18
Actes 18e Séminaire Lotharingien, p. 113–118

UNE EXTENSION D'UNE FORMULE DE RAMANUJAN-BAILEY

PAR

JIANG ZENG

1. Introduction. — Dans une lettre de 1913, RAMANUJAN [Ra] a donné la formule suivante :

$$(1)\quad \frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{n+2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{1}{n+3}+\cdots$$
$$=\left\{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}\right\}^2\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2+\cdots \text{au } (n+1)^{\text{ième}} \text{ terme}\right\},$$

où, comme dans le reste de l'article, n et m désignent des entiers positifs.

On notera que la série du premier membre est infinie et que la somme du second membre ne comprend que $(n+1)$ termes, comme l'indique la notation classique "$(n+1)^{\text{ième}}$ terme."

La première démonstration de cette formule fut publiée par WATSON [Wa1] en 1929. Depuis lors, DARLING [Da], BAILEY [Ba1], HODGKINSON [Ho], WHIPPLE [Wi] et BAILEY [Ba2] ont donné à leur tour de nouvelles démonstrations et généralisations. On pourra se reporter aux livres de BAILEY [Ba3], HARDY [Ha] et SLATER [Sl] pour une description plus détaillée de l'historique des travaux inspirés par cette formule. Notons enfin que WATSON [Wa2] a même donné une application intéressante à l'étude des constantes de Lebesgue et Landau.

La dernière généralisation due à BAILEY (*cf.* [Ba2], [Ba3], [Ha], [S]) de la formule (1) s'écrit :

$$(2)\quad \frac{\Gamma(x+m+1)\Gamma(y+m+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(x+y+m+1)}\left[{}_3F_2\left(\begin{matrix}x,y,v+m\\ v,x+y+m+1\end{matrix};1\right)\right]_{n+1}$$
$$=\frac{\Gamma(x+n+1)\Gamma(y+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(x+y+n+1)}\left[{}_3F_2\left(\begin{matrix}x,y,v+n\\ v,x+y+n+1\end{matrix};1\right)\right]_{m+1},$$

où suivant la notation de HARDY [Ha], seuls les premiers $(n+1)$ (resp. $(m+1)$) termes des deux séries sont retenus.

Lorsque $x=y=1/2$, $v=1$, cette formule se réduit à l'identité :

$$\left\{\frac{\Gamma(m+3/2)}{\Gamma(m+1)}\right\}^2\left\{\frac{1}{m+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{m+2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{1}{m+3}+\cdots \text{au } (n+1)^{\text{ième}} \text{ terme}\right\}$$
$$=\left\{\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)}\right\}^2\left\{\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{n+2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{1}{n+3}+\cdots \text{au } (m+1)^{\text{ième}} \text{ terme}\right\},$$

qui donne le théorème de RAMANUJAN lorsque m tend vers $+\infty$.

L'objet de la présente Note est de donner et de démontrer une extension naturelle de la formule (2), à savoir :

$$(3)\quad \frac{\Gamma(x+z+m)\Gamma(y+z+m)}{\Gamma(z+m)\Gamma(x+y+z+m)}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}-n,x,y,v+m\\ v,x+y+z+m,1-n-z\end{matrix};1\right)$$
$$=\frac{\Gamma(x+z+n)\Gamma(y+z+n)}{\Gamma(z+n)\Gamma(x+y+z+n)}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}-m,x,y,v+n\\ v,x+y+z+n,1-m-z\end{matrix};1\right).$$

Elle est comme la formule (2) à la fois symétrique en n, m et en x, y ; elle contient un paramètre z supplémentaire, d'où l'apparition de la série ${}_4F_3$, au lieu de ${}_3F_2$.

Cette formule se réduit évidemment à l'identité (2) de Bailey lorsque $z=1$. De plus, elle contient comme autre cas particulier l'identité de SHEPPARD [Sh] :

$$(4)\quad \frac{\Gamma(x+z+m)\Gamma(y+z+m)}{\Gamma(z+m)\Gamma(x+y+z+m)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-n,x,y\\ x+y+z+m,1-n-z\end{matrix};1\right)$$
$$=\frac{\Gamma(x+z+n)\Gamma(y+z+n)}{\Gamma(z+n)\Gamma(x+y+z+n)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-m,x,y\\ x+y+z+n,1-m-z\end{matrix};1\right).$$

Pour obtenir (4) il suffit dans (3) de faire tendre v vers $+\infty$. A son tour, (4) se réduit à l'identité de Pfaff-Saalschütz, lorsque $m=0$.

Nous présentons ici deux démonstrations de (3). La première fait appel à une transformation de séries due à WHIPPLE ; la deuxième est une méthode originale de nature combinatoire, qui inspira, en fait, l'extension (3). Nous donnons enfin le q-analogue de (3) en appliquant par deux fois la q-formule de Whipple.

2. La démonstration analytique. — Notons $(a)_n$ les factorielles montantes :

$$(a)_0 = 1, \qquad (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) \quad (n \geq 1).$$

La formule de Whipple (*cf.* [Ba3, p. 56]) s'écrit :

$$(5) \quad {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, a, b, c \\ d, e, f \end{matrix}; 1\right) = \frac{(e-a)_n (f-a)_n}{(e)_n (f)_n} {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, a, d-b, d-c \\ d, 1-e+a-n, 1-f+a-n \end{matrix}; 1\right),$$

où $d+e+f = a+b+c-n+1$.

Dans (5), si l'on pose $a = x$, $b = y$, $c = v+m$, $d = v$, $e = x+y+z+m$ et $f = 1-n-z$, on obtient :

$$(6) \quad {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, x, y, v+m \\ v, x+y+z+m, 1-n-z \end{matrix}; 1\right) = \frac{(y+z+m)_n (1-n-z-x)_n}{(x+y+z+m)_n (1-n-z)_n} {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, x, v-y, -m \\ v, 1-y-z-m-n, x+z \end{matrix}; 1\right).$$

Appliquant de nouveau (5) au second membre de (6) et posant $n = m$, $a = x$, $b = v-y$, $c = -n$, $d = v$, $e = 1-y-z-m-n$ et $f = x+z$, l'identité (6) devient alors :

$$(7) \quad {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, x, y, v+m \\ v, x+y+z+m, 1-n-z \end{matrix}; 1\right) = \frac{(y+z+m)_n (1-n-z-x)_n}{(x+y+z+m)_n (1-n-z)_n} \times \frac{(1-x-y-z-m-n)_m (z)_m}{(1-y-z-m-n)_m (x+z)_m} {}_4F_3\left(\begin{matrix} -m, x, y, v+n \\ v, x+y+z+m, 1-n-z \end{matrix}; 1\right).$$

Si l'on multiplie (7) par

$$\frac{(1-y-z-m-n)_m (x+z)_m}{(1-x-y-z-m-n)_m (z)_m}$$

et exprime les factorielles montantes comme des fonctions gamma, on trouve bien l'identité (3).

3. Le modèle symétrique. — Nous avons déja démontré dans [Ze] qu'il y a un modèle symétrique pour l'identité de Sheppard, c'est en fait dans la recherche d'un modèle symétrique pour l'identité de Bailey que l'extension (3) a été découverte. Chassons les dénominateurs dans (3), on est conduit à l'identité polynomiale :

$$
\begin{aligned}
(8)\quad & (x+z)_m(y+z)_m(v)_m \\
& \times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)_k(y)_k(v+m)_k(v+k)_{n-k}(x+y+z+m+k)_{n-k}(z)_{n-k} \\
&= (x+z)_n(y+z)_n(v)_n \\
& \times\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(x)_k(y)_k(v+n)_k(v+k)_{m-k}(x+y+z+n+k)_{m-k}(z)_{m-k}.
\end{aligned}
$$

Pour décrire notre modèle combinatoire pour (8), introduisons d'abord quelques notions de base. Soient A et B deux ensembles disjoints de cardinal n et m respectivement. Soit E un sous-ensemble de $A+B$. Étant donnée une injection σ de E dans $A+B$, un élément a de E est dit *homogène* si $a \in A$ (resp. B) entaîne $\sigma(a) \in A$ (resp. B). Une *injection tricolore* de E dans $A+B$ est définie comme étant un couple (σ, f_σ), où σ est une injection de E dans $A+B$ et f_σ une application de l'ensemble des cycles de σ dans $\{1,2,3\}$. Par commodité, pour chaque cycle c de σ, on appelle $f_\sigma(c)$ la *couleur* de c. Lorsque σ est une permutation de E, le couple (σ, f_σ) se réduit à une *permutation tricolore* de E. Notons enfin $\mathrm{cyc}_i(\sigma, f_\sigma)$ le nombre de cycles de (σ, f_σ) de couleur i $(i=1,2,3)$.

Considérons maintenant l'ensemble $T[A,B;1,2,3]$ de tous les triplets $(\varphi,(\sigma,f_\sigma),(\tau,g\tau))$, où φ est une permutation de $A+B$, et où $(\sigma,f_\sigma))$ et (τ,g_τ) sont deux permutations tricolores de $A+B$ ayant les propriétés suivantes :

(i) tous les cycles de (σ,f_σ) (resp. (τ,g_τ)) de couleur 1 sont entièrement contenus dans A (resp. B);

(ii) tous les cycles de (σ,f_σ) (resp. (τ,g_τ)) de couleur 3 sont entièrement contenus dans B (resp. A);

(iii) tous les cycles de (σ,f_σ) (resp. (τ,g_τ)) de couleur 2 sont entièrement contenus dans l'ensemble des éléments homogènes de φ (resp. A ou B).

D'après la définition ci-dessus, chaque élément de $T[A,B;1,2,3]$ est en même temps un élément de $T[B,A;3,2,1]$ et vice versa. D'où

$$T[A,B;1,2,3]=T[B,A;3,2,1].$$

De façon équivalente, si l'on munit chaque triplet $(\varphi,(\sigma,f_\sigma),(\tau,g_\tau))$ de $T[A,B;1,2,3]$ de la fonction-poids:

$$
\begin{aligned}
(9)\quad W((\varphi,(\sigma,f_\sigma),(\tau,g_\tau))) = {} & v^{\mathrm{cyc}\,\varphi}x^{\mathrm{cyc}_1(\sigma,f_\sigma)}z^{\mathrm{cyc}_2(\sigma,f_\sigma)}y^{\mathrm{cyc}_3(\sigma,f_\sigma)} \\
& x^{\mathrm{cyc}_1(\tau,g_\tau)}z^{\mathrm{cyc}_2(\tau,g_\tau)}y^{\mathrm{cyc}_3(\tau,g_\tau)},
\end{aligned}
$$

alors le polynôme générateur $F(A,B;x,y,z,v)$ de $T[A,B;1,2,3]$ par la fonction-poids ci-dessus est symétrique en (A,x) et (B,y), à savoir

$$F(A,B;x,y,z,v)=F(B,A;y,x,z,v). \tag{10}$$

Nous évaluons dans [Ze2] la fonction génératrice ci-dessus par un processus bijectif et obtenons l'identité suivante :

$$\begin{aligned}(11)\quad & F(A,B;x,y,z,v)=(x+z)_m(y+z)_m(v)_m\\ & \times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)_k(y)_k(v+m)_k(v+k)_{n-k}(x+y+z+m+k)_{n-k}(z)_{n-k}.\end{aligned}$$

D'après (11), la formule (4) exprime simplement que $F[A,B;x,y,z,v]$ est symétrique en (A,x) et (B,y). Ceci est déja établi dans (10).

4. Le q-analogue. — En utilisant le q-analogue de la transformation (5) de Whipple, la formule (3) peut se q-généraliser. Introduisons d'abord la q-factorielle montante :

$$(a;q)_\infty=\prod_{n=0}^{\infty}(1-aq^n),\qquad (a;q)_n=\frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$$

et la fonction hypergéométrique basique (*cf.* [Ba3]) :

$${}_r\Phi_s\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};q,x\right]=\sum_{n\geq 0}\frac{(a_1;q)_n\cdots(a_r;q)_n}{(b_1;q)_n\cdots(b_s;q)_n}\frac{x^n}{(q;q)_n}.$$

Le q-analogue de la transformation de Whipple (*cf.* [Jo-St]) s'écrit :

$$\begin{aligned}(12)\quad & {}_4\Phi_3\left[\begin{matrix}a,b,q^{1-n}/f,q^{-n}\\ c,q^{1-n}/d,q^{1-n}/e\end{matrix};q,q\right]\\ & =\left(\frac{c}{ab}\right)^n\frac{(f/d;q)_n(f/e;q)_n}{(d;q)_n(e;q)_n}\,{}_4\Phi_3\left[\begin{matrix}c/a,c/b,q^{1-n}/f,q^{-n}\\ c,q^{1-n}d/f,q^{1-n}e/f\end{matrix};q,q\right],\end{aligned}$$

où $cf=adbe$.

De façon analogue, en appliquant deux fois la formule (12), on obtient :

$$\begin{aligned}(13)\quad & \frac{(q^nxyz;q)_m(z;q)_m}{(q^nxz;q)_m(yz;q)_m}\,{}_4\Phi_3\left[\begin{matrix}q^{-m},x,y,vq^n\\ v,q^nxyz,q^{1-m}/z\end{matrix};q,q\right],\\ & \qquad =\frac{(q^mxyz;q)_n(z;q)_n}{(q^mxz;q)_n(yz;q)_n}\,{}_4\Phi_3\left[\begin{matrix}q^{-n},x,y,vq^m\\ v,q^mxyz,q^{1-n}/z\end{matrix};q,q\right].\end{aligned}$$

Introduisons maintenant, suivant JACKSON [Ja], le q-analogue de la fonction Γ :

$$\Gamma_q(a) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^a;q)_\infty}(1-q)^{1-a}, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-.$$

Dans (13), si l'on remplace x, y, z, et v par q^x, q^y, q^z et q^v respectivement, et de plus, si l'on exprime les q-factorielles montantes en q-analogue de la fonction Γ, on obtient un véritable q-analogue de (3), à savoir :

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_q(x+z+m)\Gamma_q(y+z+m)}{\Gamma_q(x+y+z+m)\Gamma_q(z+m)}\,{}_4\Phi_3\left[\begin{matrix} q^{-n}, q^x, q^y, q^{v+m} \\ q^v, q^{x+y+z+m}, q^{1-n-z}\end{matrix}; q, q\right], \\ = \frac{\Gamma_q(x+z+n)\Gamma_q(y+z+n)}{\Gamma_q(x+y+z+n)\Gamma_q(z+n)}\,{}_4\Phi_3\left[\begin{matrix} q^{-m}, q^x, q^y, q^{v+n} \\ q^v, q^{x+y+z+n}, q^{1-m-z}\end{matrix}; q, q\right].\end{aligned}$$

Jiang ZENG,
Département de mathématique,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes,
F-67084 Strasbourg, France.