Symmetrische Potenzen zyklischer Mengen und Produktzerlegungen von erzeugenden Funktionen.

CHRISTIAN SIEBENEICHER

Sei $a = a(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot t^n \in \mathbf{Z}[[t]]$ eine formale Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten und mit konstantem Glied 1. Dann gibt es bekanntlich eindeutig bestimmte unendliche Folgen $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots)$ und $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots)$ ganzer Zahlen, so daß

$$\begin{aligned} a(t) &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-t^n}\right)^{b_n} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q_n t^n} \\ &= \exp\left(\int \sum_{n=1}^{\infty} d_n t^{n-1}\, dt\right) \end{aligned}$$

ist.

Bekannte Beispiele solcher "Umparametrisierungen" sind **Eulers Produkt**

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) \cdot t^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^k}$$

für die erzeugende Funktion der Anzahl der Partitionen und die **zyklotomische Identität**

$$\frac{1}{1-qt} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-t^n}\right)^{M(q,n)},$$

die Gauss für die Berechnung der Anzahl $M(q,n)$ der irreduziblen Polynome vom Grade n und höchstem Koeffizienten 1 über einem endlichen Körper mit q Elementen benutzte.

Es wird gezeigt, daß diese Umparametrisierungen rein kombinatorisch mit Hilfe **zyklischer Mengen** (d.h. Mengen, auf denen die unendliche zyklische Gruppe C operiert) interpretiert werden können. Hierzu betrachtet man zu einer Folge $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots)$ ganzer Zahlen die—möglicherweise unendliche und für negative b_n auch nur virtuelle, aber bis auf C–Isomorphie eindeutig bestimmte—zyklische Menge $X = X(\mathbf{b})$, die genau b_n Bahnen der Länge n hat. Dann gilt:

(1) d_n ist gleich der Anzahl derjenigen Elemente von X, die invariant sind unter der Operation der Untergruppe C^n der n–ten Potenzen der Elemente von C, die in C den Index n hat.

(2) a_n ist die Anzahl $s^n(X)$ der C–invarianten Elemente der n–ten symmetrischen Potenz von X.

(3) X besitzt eine eindeutig bestimmte disjunkte Zerlegung $X = \tau(\mathbf{q}) := \sum_{n=1}^{\infty} ind_n q_n{}^{(\mathrm{C})}$, wobei $q_n{}^{(\mathrm{C})}$ die zyklische Menge der Kongruenzabbildungen von C in eine endliche Menge mit q_n Elementen bezeichnet und $ind_n q_n{}^{(\mathrm{C})}$ die Induktion dieser Menge relativ zur n–ten Potenzabbildung $z \mapsto z^n$ von C in sich ist.

Grundlage für den Beweis dieser Aussagen ist das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{W}(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\tau} & \widehat{\Omega}(\mathrm{C}) & \xrightarrow{s_t} & \Lambda(\mathbf{Z}) \\ {\scriptstyle\Phi}\downarrow & & {\scriptstyle\widehat{\varphi}}\downarrow & & {\scriptstyle L_{\mathbf{Z}}}\downarrow \\ \prod_{\mathbf{N}} \mathbf{Z} & \xrightarrow{offensichtliche} & gh(\mathrm{C}) & \xrightarrow{Identifizierung} & t\mathbf{Z}[[t]], \end{array}$$

dessen horizontale Pfeile kanonisch definierte Isomorphismen sind, in dem $\mathbf{W}(\mathbf{Z})$ der universelle Ring der Wittvektoren ist, $\widehat{\Omega}(\mathrm{C})$ der Burnsidering der im wesentlichen endlichen zyklischen Mengen und $\Lambda(\mathbf{Z})$ Grothendieck's Ring der formalen Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten und konstantem Glied 1.

Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Postfach 8640, D 4800 Bielefeld 1, BRD