

## (CO)-HOMOLOGIE VON GRAPHEN UND INVARIANTEN

VON

ULRICH OBERST

Einleitung: Dieser Vortrag entstand aus einer zweistündigen Vorlesung über Graphentheorie für Studenten mit Standardkenntnissen aus Algebra. Es ist seit Poincaré (Stichwort: Analysis situs) bekannt, daß Graphentheorie auch als 1- oder maximal 2-dimensionaler Sonderfall der kombinatorischen (heute: algebraischen) Topologie aufgefaßt werden kann. Unter diesem Gesichtspunkt war die Methode meiner Vorlesung die Verwendung von elementarer homologischer Algebra und von beliebigen Koeffizientengruppen in der (Co-)homologie. In diesem Vortrag führe ich, meines Wissens neue, homologische Invarianten eines Graphen ein, nämlich die invarianten Faktoren der endlichen Gruppe  $Z^{\text{Kanten von } G} / (B^1(G) + \Pi_1(G))$ , und leite einige ihrer Eigenschaften her. Die Methode der Vorlesung zeige ich weiter anhand der Kontraktion und der Mayer-Vietoris-Folge. Meine (lückenhaften) Kenntnisse über Graphen verdanke ich vor allem den Büchern [4], [1], [2], [7]. Die Resultate (34) ff. sind in der angegebenen Form neu, soweit ich weiß.

Bezeichnungen und Identifikationen: Seien  $Z$  der Ring der ganzen Zahlen und  $A$  eine beliebige abelsche Gruppe. Ist  $I$  eine, in diesem Vortrag immer endliche, Indexmenge, so betrachte ich die Elemente  $a = (a(i); i \in I)$  von  $A^I$  auch als  $I \times 1$ -Spaltenmatrizen. Die Standardbasis von  $Z^I$  ist  $i := \delta_i := (0 \dots 0 1 0 \dots 0)^T$ , 1 an  $i$ -ter Stelle,  $i \in I$ ; die Basisdarstellung von  $n \in Z^I$  bezüglich dieser Basis ist  $n = \sum_i n(i) i$ . Ist  $J$  eine weitere endliche Indexmenge, so identifiziere ich die Homomorphismen (=Z-linearen Abbildungen) von  $Z^J$  nach  $Z^I$  mit den  $I \times J$ -Matrizen mit Koeffizienten in  $Z$ , genauer

- (1)  $\text{Hom}_Z(Z^J, Z^I) = Z^{I \times J}$ ,  $f = (f(i, j); i \in I, j \in J)$
- (2)  $f(\delta_j) = \sum_i \delta_i f(i, j) = f(-, j) = j$ -te Spalte von  $f$
- (3)  $f(x) = f \cdot x$  (Matrizenmultiplikation),  $x \in Z^J$ .

Weiter identifiziere ich

- (4)  $A^I = Z^I \otimes A = \text{Hom}_Z(Z^I, A)$   
 $a = (a(i); i \in I) = \sum_i \delta_i \otimes a(i) = (\delta_i \mapsto a(i), i \in I)$ .

Ist  $f = (f(i, j); i \in I, j \in J) : Z^J \rightarrow Z^I$  ein Homomorphismus, so induziert das Tensorprodukt  $(-) \otimes A$  mit  $A$  den Homomorphismus

- (5)  $f_A := f \otimes A : A^J = Z^J \otimes A \rightarrow A^I = Z^I \otimes A, x \mapsto f \cdot x$ ,

wobei  $f \cdot x$  die Multiplikation der Matrix  $f$  mit Koeffizienten in  $Z$  und der  $A$ -wertigen Spalte  $x$  ist. Ebenso induziert der Funktor  $\text{Hom}(-, A)$  den Homomorphismus

- (6)  $f_A^* := \text{Hom}(f, A) : A^I = \text{Hom}(Z^I, A) \rightarrow A^J = \text{Hom}(Z^J, A), y \mapsto f^T \cdot y$

wobei  $f^T$  die transponierte Matrix ist. Mit der Identifikation (1) gilt

$$(7) f^* := f^*_{\mathbb{Z}} = f^T \in \mathbb{Z}^{J \times I}, f^T(j, i) := f(i, j).$$

Schließlich betrachte ich noch die Bilinearform

$$(8) \langle -, - \rangle : \mathbb{Z}^I \times \mathbb{A}^I \rightarrow \mathbb{A}, \langle n, a \rangle = n^T \cdot a = \sum_i n(i)a(i),$$

die für  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$  symmetrisch, nicht ausgeartet und bekanntlich positiv definit ist. Ist  $f : \mathbb{Z}^J \rightarrow \mathbb{Z}^I$  ein Homomorphismus, so gilt die übliche Adjunktionsbeziehung

$$\langle f(n), a \rangle = \langle n, f^*_A(a) \rangle, n \in \mathbb{Z}^J, a \in \mathbb{A}^I.$$

Für eine Untergruppe  $B \subseteq \mathbb{Z}^I$  ist

$$(9) B^\perp := \{ a \in \mathbb{A}^I; \langle n, a \rangle = 0 \text{ für alle } n \in B \}$$
 die Orthogonalgruppe in  $\mathbb{A}^I$  zu  $B$ .

Ketten und Wege eines Graphen: Sei  $G = (V, K)$  ein endlicher Graph. Dieser besteht (vergl. [4], S.1) aus der endlichen Menge  $V$  von Ecken (Vertices), derjenigen  $K$  der Kanten und zwei Abbildungen  $\text{Dom}(ain), \text{Cod}(omain) : K \rightarrow V$ . Für  $k \in K$  heißt  $v := \text{Dom}(k)$  bzw.  $w := \text{Cod}(k)$  die Anfangs- bzw. Endecke von  $k$ . Man schreibt  $k : v \rightarrow w$ . In der Literatur heißt ein Graph auch Kantenkomplex (siehe [6], S. 162), Diagrammschema (Grothendieck 1957) oder bei Graphentheoretikern meistens Digraph (directed graph) (siehe [7], S. 125). Die freie Gruppe  $C_0(G) := \mathbb{Z}^V$  mit ihren Elementen

$$n = \sum_{v \in V} n(v) \delta_v = \sum_v n(v)v, v = \delta_v \in V,$$

heißt Gruppe der ganzzahligen 0-Ketten von  $G$ . Ist  $\mathbb{A}$  abelsch, so ist

$$(10) C_0(G, \mathbb{A}) := \mathbb{Z}^V \otimes \mathbb{A} = \mathbb{A}^V \ni a = \sum \{ v \otimes a(v); v \in V \}$$

die Gruppe der 0-Ketten mit Werten in  $\mathbb{A}$ . Ebenso erhält man die Gruppen der 1-Ketten

$$C_1(G) := \mathbb{Z}^K \ni c = \sum_k \delta_k c(k) = \sum_k k c(k) \text{ und } C_1(G, \mathbb{A}) := \mathbb{Z}^K \otimes \mathbb{A} = \mathbb{A}^K \ni c = (c(k)); k \in K = \sum_k k \otimes c(k).$$

Eine 1-Kette  $c \in C_1(G, \mathbb{A})$  wird auch als Kantenbewertung oder Fluß mit Werten in  $\mathbb{A}$  bezeichnet. Durch Anwendung von  $\text{Hom}(-, \mathbb{A})$  statt  $(-) \otimes \mathbb{A}$  erhält man die Gruppen  $C^0(G, \mathbb{A}) := \text{Hom}(\mathbb{Z}^V, \mathbb{A}) = \mathbb{A}^V$  der 0-Coketten oder Potentiale mit Werten in  $\mathbb{A}$  und der 1-Coketten  $C^1(G, \mathbb{A}) := \text{Hom}(\mathbb{Z}^K, \mathbb{A}) = \mathbb{A}^K$ . Es ist zwar  $C_1(G, \mathbb{A}) = C^1(G, \mathbb{A})$  in diesem Sonderfall der algebraischen Topologie, die Unterscheidung zwischen Ketten und Coketten ist der Systematik wegen trotzdem sinnvoll.

Ist  $k : v \rightarrow w$  eine Kante, so wird  $-k \in -K \subseteq \mathbb{Z}^K$  als künstliche neue Kante zu  $k$  in der umgekehrten Richtung betrachtet. Man definiert  $\text{Dom}(-k) := \text{Cod}(k) = w$  und  $\text{Cod}(-k) := \text{Dom}(k) = v$  und schreibt auch  $-k : w \rightarrow v$ . In der Homotopie- (statt: Homologie-)theorie wird meistens  $k^{-1}$  statt  $-k$  geschrieben (vergl. [6], S. 162). Ein Kantenweg  $\omega$  ist ein  $r$ -Tupel,  $r \geq 0$ ,

$$(11) \omega = (v(0) \xrightarrow{k(1)} v(1) \dots \xrightarrow{k(r)} v(r))$$

von Ecken  $v(i)$  und Kanten  $k(i) \in K \cup (-K)$  mit  $\text{Cod}(k(i)) = \text{Dom}(k(i+1)), i = 1, \dots, r-1$ . Man schreibt wieder  $\omega : v(0) \rightarrow v(r)$ . Der Weg  $\omega$  heißt geschlossen, falls  $v(0) = v(r)$  ist. Sind die  $v(i)$  paarweise verschieden, so nennt man  $\omega$  einen Kantenbogen. Schließlich

## HOMOLOGIE VON GRAPHEN

heißt  $\omega$  ein Kreis (Circuit), falls  $r \geq 1$ ,  $\omega$  geschlossen und die  $v(0), \dots, v(r-1)$  paarweise verschieden sind und falls, im Fall  $r=2, k(1)+k(2) \neq 0$  gilt. Auf  $V$  ist die Zusammenhangsrelation " $v \sim w: \Leftrightarrow$  Es gibt einen Kantenzug  $\omega$  von  $v$  nach  $w$ " eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen heißen bekanntlich Komponenten von  $G$ . Die Menge

(12)  $\pi_0(G) := V/\sim$  heißt 0-te Homotopiemenge

von  $G$ . Für einen ohne Einschränkung zusammenhängenden Graphen wird auch die im allgemeinen nicht kommutative Fundamentalgruppe  $\pi_1(G)$  betrachtet (vergleiche [6], S. 162 ff). Im allgemeinen genügt die kommutative erste Homologiegruppe  $H_1(G)$  (siehe unten).

Homologie und Cohomologie: Sei weiter  $G=(V,K)$  ein endlicher Graph. Als orientierten Rand einer Kante  $k \in K$  bezeichnet man die 0-Kette

$$(13) \partial(k) := \text{Dom}(k) - \text{Cod}(k) \in V - V \otimes \mathbb{Z}^V = C_0(G).$$

Um diesen Rand sinnvoll definieren zu können, braucht man also die Algebraisierung, d.h. den Übergang  $V \rightarrow \mathbb{Z}^V$ . Diese Abbildung wird eindeutig  $\mathbb{Z}$ -linear fortgesetzt zum Randoperator

$$(14) \partial: \mathbb{Z}^K = C_1(G) \rightarrow \mathbb{Z}^V = C_0(G), k \mapsto \partial(k), \partial(c)(v) = \sum \{c(k); k: v \rightarrow ?\} - \sum \{c(k); k: ? \rightarrow v\}, c \in \mathbb{Z}^K.$$

Als  $V \times K$ -Matrix in  $\mathbb{Z}^{V \times K}$  nach der Identifikation (1) heißt  $\partial$  die Inzidenzmatrix von  $G$  und hat die Gestalt

$$\partial(v, k) = 1, \text{ falls } v = \text{Dom}(k) \neq \text{Cod}(k)$$

$$(15) \partial(v, k) = -1, \text{ falls } v = \text{Cod}(k) \neq \text{Dom}(k)$$

$$\partial(v, k) = 0 \text{ sonst.}$$

Abgeleitet von  $\partial$  erhält man die zerfallende exakte Folge von endlich erzeugten freien Gruppen

$$(16) 0 \rightarrow \text{Kern}(\partial) \subset \mathbb{Z}^K \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^V \xrightarrow{\text{kan}} \pi_0(G) \rightarrow 0.$$

Dabei ist  $\text{kan}$  auf der Basis  $V$  von  $\mathbb{Z}^V$  gegeben durch  $\text{kan}(v) = [v] :=$  die  $v$  enthaltende Komponente  $\in \pi_0(G)$ . Die Exaktheit an der Stelle  $\mathbb{Z}^V$  ist leicht, aber nicht trivial. Man nennt

$$(17) H_1(G) := \text{Kern}(\partial) \text{ bzw. } H_0(G) := \mathbb{Z}^{\pi_0(G)}$$

die erste bzw. nullte Homologiegruppe von  $G$ . Die Elemente von  $H_1(G)$  heißen 1-Zyklen. Ist  $\omega = (v(0) \xrightarrow{k(1)} \dots \xrightarrow{k(r)} v(r))$  ein geschlossener Weg, so ist  $[\omega] := k(1) + \dots + k(r)$  ein 1-Zyklus. Die Dimension

$$(18) b_i(G) := [H_i(G): \mathbb{Z}], b_0(G) = \#(\pi_0(G)), i=0,1,$$

heißt  $i$ -te Bettizahl von  $G$ . Für  $b_1(G)$  sind auch die Namen Zusammenhangszahl (nach [4], S. 53) und zyklomatische Zahl gebräuchlich. Die freie Gruppe

$$(19) B_0(G) := \text{Bild}(\partial) = \text{Spaltengruppe von } \partial \in \mathbb{Z}^{V \times K}$$

mit ihrer Dimension Rang( $G$ ):= $\text{Rang}(\partial) = [B_0(G): \mathbb{Z}]$  heißt Ranggruppe oder Gruppe der 0-Ränder von  $G$ . Die Euler-Charakteristik der exakten Folge (16) liefert die Gleichung

$$(20) b_1(G) - \#(K) + \#(V) - b_0(G) = 0, \text{ also } \text{Rang}(G) = \#(K) - b_1(G) = \#(V) - b_0(G) \geq 0,$$

U. OBERST

welche viele der üblichen graphentheoretischen Rechnungen enthält. Aus (16) wird durch Tensorierung  $(-)\otimes A$  mit der abelschen Gruppe  $A$  und der Identifikation (4) die zerfallende exakte Folge

$$(21) 0 \rightarrow H_1(G, A) := H_1(G) \otimes A = \text{Kern}(\partial_A) \subset A^K \xrightarrow{\partial_A} A^V \xrightarrow{\text{kan}_A} \Pi_0(G) := H_0(G, A) \rightarrow 0$$

wobei  $\partial_A$  die Matrizenmultiplikation mit  $\partial \in Z^{V \times K}$  ist und durch (14) für  $c \in A^K$  gegeben ist. Die Gruppen  $H_i(G, A)$  heißen Homologiegruppen, die Elemente von  $H_1(G, A)$  1-Zyklen mit Werten in  $A$ . Diese 1-Zyklen heißen auch Ströme, weil nach (14) ein Fluß  $c \in A^K$  genau dann ein Zykel ist, wenn er quellenfrei ist (Kirchhoff, Maxwell). Anwendung von  $\text{Hom}(-, A)$  auf (16) liefert die ebenfalls zerfallende exakte Folge

$$(22) 0 \leftarrow \text{Hom}(H_1(G), A) \xleftarrow{\text{Res}_A} \text{Res}_A^K \xleftarrow{\partial_A^*} A^V \xleftarrow{\text{kan}_A^*} \Pi_0(G) \leftarrow 0.$$

Dabei ist der Corandoperator  $\partial_A^*$  die Matrizenmultiplikation mit  $\partial^T \in Z^{K \times V}$ , und es gilt

$$(23) \partial_A^*(a)(k) = a(\text{Dom}(k)) - a(\text{Cod}(k)), k \in K, a \in A^V.$$

Weiter ist

$$(24) \text{kan}_A^*(\tilde{a})(v) = \tilde{a}([v]), v \in V, [v] \in \Pi_0(G), \tilde{a} \in A^{\Pi_0(G)},$$

$$(25) \text{Res}(c) = c \upharpoonright H_1(G), c \in A^K = \text{Hom}(Z^K, A).$$

Auch hat die Gruppe

$$(26) B^1(G, A) := \text{Bild}(\partial_A^*) = \text{Kern}(\text{Res})$$

der  $A$ -wertigen 1-Coränder oder Büschelformen (siehe [4], S. 128) eine große Bedeutung. Wegen (23) nennt man die 1-Coränder auch Spannungen oder Potentialdifferenzen (Kirchhoff 1847) (vergl. [1], S. 144), sofern man  $a(v), v \in V$ , als Potential im Punkt  $v$  betrachtet. Die leicht zu beweisende Exaktheit von (22) bedeutet anders die

(27) Folgerung (i) (Exaktheit bei  $A^V$ ) Die Spannung  $\partial_A^*(a), a \in A^V$ , ist genau dann Null, wenn  $a$  auf den Komponenten von  $G$  konstant ist. (ii) (bei  $A^K$ )  $H_1(G)^\perp = B^1(G, A)$ . Hier bezieht sich  $\perp$  auf die Bilinearform  $\langle -, - \rangle : Z^K \times A^K \rightarrow A$  von (8). ■

Schnitte und Invarianten: Für  $A=Z$  erhält man  $B^1(G) := B^1(G, Z)$  und

$$\partial^T = \partial^* = \partial_2^* : Z^V \rightarrow Z^K, \partial^*(v) = \delta_v = \sum \{k; v = \text{Dom}(k)\} - \sum \{k; v = \text{Cod}(k)\}.$$

Sind allgemeiner  $W \subseteq V$  eine Teilmenge und  $\delta_W \in \{0, 1\}^V \subseteq Z^V$  ihre charakteristische Funktion, so ist

$$(28) \partial^*(\delta_W) = \sum \{k; k \in K^+(W)\} - \sum \{k; k \in K^-(W)\} \text{ mit } K^+(W) := \{k \in K; \text{Dom}(k) \in W, \text{Cod}(k) \in W' := V \setminus W\}$$

und  $K^-(W) := K^+(W')$ . Die Mengen  $K(W) := K^+(W) \cup K^-(W)$  heißen Schnitte von  $G$  und Schnittmengen, falls zusätzlich  $W$  und  $W'$  zusammenhängend sind (vergl. [2], S. 13, 82, [8], S. 41). Aus diesem Grund wird  $B^1(G)$  auch sinnvoll als Schnittgruppe bezeichnet. Aus (27) erhält man die

(29) Folgerung und Definition (Invarianten): Es ist  $H_1(G)^\perp = B^1(G) \subseteq Z^K$  bezüglich des positiv definierten Standardskalarproduktes  $\langle -, - \rangle$  auf  $Z^K$ . Insbesondere sind daher  $B^1(G) + H_1(G) = B^1(G) \oplus H_1(G)$  eine direkte Summe und  $Z^K / B^1(G) + H_1(G)$  eine endliche Gruppe. Die invarianten Faktoren

## HOMOLOGIE VON GRAPHEN

$$d_G(1^r) = d(1) | d(2) | \dots | d(r), k | d(i), i=1, \dots, r,$$

dieser endlichen Gruppe sind Invarianten von  $G$  unter Isomorphie und werden im folgenden als "die Invarianten" von  $G$  bezeichnet. ■

Die Berechnung und Bedeutung der Invarianten wird unten behandelt. Aus der Exaktheit und Zerfällung von (22) folgt noch

$$(30) B^1(G, A) = B^1(G) \otimes A.$$

Spannende Bäume und Fundamentalbasen: Ist  $G=(V, K) = G_1 \dot{\cup} G_2$  die disjunkte Vereinigung von Untergraphen, so gilt  $H_0(G) = H_0(G_1) \oplus H_0(G_2)$  usw. Daher mache ich im folgenden ohne Einschränkung die

(31) Annahme:  $G=(V, K)$  sei zusammenhängend, d.h.  $b_0(G) = \#(\pi_0(G)) = 1$  und  $(V, L)$  sei ein spannender Baum von  $G$ .

Die Menge  $L$  sei also eine Teilmenge von  $K$  derart, daß  $b_0(V, L) = 1$  und  $b_1(V, L) = 0$  gilt. Nach (20), angewandt auf  $(V, K)$  und  $(V, L)$ , ist damit gleichwertig, daß  $(V, L)$  zusammenhängend ist und  $\#(L) = \#(K) - b_1(V, K)$  gilt. Daß  $(V, L)$  tatsächlich ein Baum, d.h. ein zusammenhängender Graph ohne Kreise, ist und überhaupt die ganze grundlegende Theorie der (spannenden) Bäume, Wälder, Kreise, Cokreise, des Zusammenhangs mit der Matroidtheorie u.ä. folgt besonders einfach aus der oben dargestellten Homologie mit ganzzahligen Koeffizienten. Für jede "Baumkante"  $l \in L$  hat  $(V, L \setminus \{l\})$  genau zwei Komponenten,  $V(1) \subseteq V$  sei die  $\text{Dom}(l)$  enthaltende. Sei dann nach (28)

$$(32) c(1) := \delta^*(\delta_{V(1)}^1) = \sum \{k; k \in K^+(1)\} - \sum \{k; k \in K^-(1)\} \in B^1(G), l \in L, \text{ mit}$$

$$K^+(1) := K^+(V(1)) = \{k \in K; \text{Dom}(k) \subseteq V(1), \text{Cod}(k) \not\subseteq V(1)\} \text{ und } K^-(1) := K^-(V(1)) = K^+(V(1)')$$

Für jede "Cobaumkante"  $k \in K \setminus L$  bezeichne  $(k(1), \dots, k(m(k))), k(i) \in L \cup \{-L\}$ , den eindeutigen Kantenbogen in  $(V, L)$  von  $\text{Cod}(k)$  nach  $\text{Dom}(k)$ . Dann ist

$$(33) z(k) := k + k(1) + \dots + k(m(k)) \in H_1(G), k \in K \setminus L.$$

Offenbar gilt für  $l \in L$  bzw.  $k \in K \setminus L$

$$x(1) \equiv 1 \in (Z^{K \setminus L}), z(k) \equiv k \in (Z^L).$$

Daraus und aus der Orthogonalität  $B^1(G) \perp H_1(G)$  von (29) folgt der

(34) Satz: Voraussetzungen und Bezeichnungen wie oben. Ist  $A$  eine abelsche Gruppe, so gilt

$$(i) A^K = B^1(G, A) \oplus A^{K \setminus L} = B^1(G) \otimes A \oplus Z^{K \setminus L} \otimes A$$

$$a = \sum \{c(1) \otimes a(1); l \in L\} + \sum \{k \otimes \langle z(k), a \rangle; k \in K \setminus L\}$$

$$(ii) A^K = H_1(G, A) \oplus A^L = H_1(G) \otimes A \oplus Z^L \otimes A$$

$$a = \sum \{z(k) \otimes a(k); k \in K \setminus L\} + \sum \{1 \otimes \langle c(1), a \rangle; l \in L\}$$

Dabei ist  $\langle -, - \rangle$  das "Skalarprodukt von (8). ■

Für  $A = \text{reelle oder komplexe Zahlen}$  ist dieser Satz seit Kirchhoff 1847 bekannt. Er

impliziert insbesondere die

(35) Folgerung (Fundamentalbasen): Die  $c(l), l \in L$ , bzw. die  $z(k), k \in K \setminus L$ , sind  $Z$ -Basen von  $B^1(G)$  bzw.  $H_1(G)$ . ■ Weiter gilt nicht nur  $H_1(G) \perp = B^1(G, A)$  nach (27), sondern auch

(36) Folgerung:  $B^1(G) \perp = H_1(G, A)$ . ■

Berechnung und Bedeutung der Invarianten: Weiter gelte die Annahme (31). Es seien

(37)  $d(1) | d(2) | \dots | d(r), l \in d(i), i=1, \dots, r$ ,

die Invarianten von  $G$  nach (29). Ich ordne  $K$  strikt an, und zwar so, daß  $l \prec k$  für  $l \in L, k \in K \setminus L$  gilt, und betrachte die Matrizen

(38)  $C \in Z^{K \times L}, C(-, l) := c(l), Z \in Z^{K \times (K \setminus L)}, Z(-, k) := z(k)$ ,

deren Spalten gerade die Fundamentalbasen von (35) sind, und dann auch die Matrix  $(CZ) \in Z^{K \times K}$ . Offenbar sind  $B^1(G)$  bzw.  $H_1(G)$  bzw.  $B^1(G) + H_1(G)$  gerade die Spaltengruppen von  $C$  bzw.  $Z$  bzw.  $(CZ)$ . Daraus und aus (34) folgt

(39) Satz: (Berechnung): Voraussetzungen und Bezeichnungen wie oben. Die Invarianten  $d(i)$  von  $G$  sind die von  $l$  verschiedenen Elementarteiler der Matrizen  $(CZ)$  (das ist klar), aber auch von

(40)  $C^T C = \langle \langle c(l(1)), c(l(2)) \rangle \rangle; l(1), l(2) \in L$  und

(41)  $Z^T Z = \langle \langle z(k(1)), z(k(2)) \rangle \rangle; k(1), k(2) \in K \setminus L$ .

Insbesondere gilt

(42)  $\det(CZ) = \pm \det(C^T C) = \pm \det(Z^T Z)$ .

Man berechnet die Invarianten  $d(i)$  nach (40) bzw. nach (41), je nachdem  $L$  weniger oder mehr als die Hälfte der Kanten von  $K$  enthält ( $\#(L) = \#(K) - b_1(G)$ , s.o). ■

Aus (34) folgt weiter

(43) Satz (Bedeutung) Voraussetzungen wie oben. Für abelsches  $A$  gilt

(44)  $B^1(G, A) \cap H_1(G, A) \cong \prod_{i=1, \dots, r} \{a \in A; d(i)a=0\}$

(45)  $A \otimes_{B^1(G, A)} H_1(G, A) \cong \prod_{i=1, \dots, r} A/d(i)A$ .

Die Isomorphismen (44) und (45) sind aus  $C$  und  $Z$  explizit zu bestimmen. ■

(46) Folgerung: (i) Es gilt

(47)  $A^K = B^1(G, A) \oplus H_1(G, A)$

genau dann, wenn für jeden Primfaktor  $p$  von  $d(r)$  die Abbildung  $A \rightarrow A, a \mapsto pa$ , bijektiv ist. (ii) Dies gilt insbesondere, falls  $A$  ein  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum oder, spezieller, ein Körper der Charakteristik Null ist. (iii) Ist  $A = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n, n > 0$ , zyklisch, so gilt (47) genau dann, wenn  $n$  und  $d(r)$  teilerfremd sind. ■

In den meisten Büchern über Graphentheorie wird (47) bewiesen nach Kirchhoff (1847),

## HOMOLOGIE VON GRAPHEN

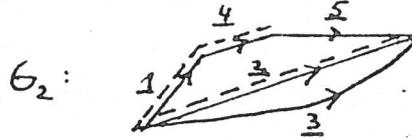
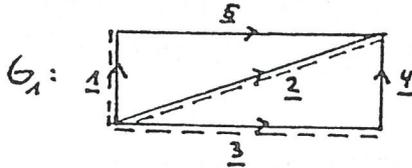
falls  $A$  der Körper der reellen Zahlen ist. In diesem Fall ist der Beweis sehr einfach, denn dann ist  $B^1(G, A)$  der Spaltenraum von  $\partial^T \in \mathbb{Z}^{K \times V} \subseteq A^{K \times V}$ ,  $H_1(G, A)$  der Lösungsraum von  $\partial \in \mathbb{Z}^{V \times K} \subseteq A^{V \times K}$  und die orthogonale Zerlegung

$A^K = \text{Bild}(\partial^T) \oplus \text{Kern}(\partial)$  ist einfache euklidische Geometrie.

(48) Folgerung: Ist  $A = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n, n > 0$ , zyklisch, so gilt

$$B^1(G, A) \cap H_1(G, A) \cong A^K / B^1(G, A) + H_1(G, A) \cong \prod_{i=1, \dots, r} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \text{ ggT}(d(i), n).$$

(49) Beispiel: Wir betrachten die Graphen



mit den verdoppelt hervorgehobenen Baumkanten.

Berechnung für  $G_1$ : Es ist  $L = \{1, 2, 3\}$ ,  $K \setminus L = \{4, 5\}$ . Man berechnet die Invarianten nach (41). Es ist  $z(4) = 4 - 2 + 3$ ,  $z(5) = 5 - 2 + 1$ , also

$$z^T Z = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$G_1$  hat 8 als einzige Invariante.

Berechnung für  $G_2$ : Es ist  $L = \{1, 2, 4\}$ ,  $K \setminus L = \{3, 5\}$ ,  $z(3) = 3 - 2$ ,  $z(5) = 5 - 2 + 1 + 4$ , also

$$z^T Z = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \text{ d.h.}$$

$G_2$  hat 7 als einzige Invariante. Für  $A = \mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$  folgt nach (46) und (48)

$$B^1(G_1, \mathbb{Z}_2) \cap H_1(G_1, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^5 / B^1 + H_1 \cong \mathbb{Z}_2, \text{ aber } \mathbb{Z}_2^5 = \mathbb{Z}_2^K = B^1(G_2, \mathbb{Z}_2) \oplus H_1(G_2, \mathbb{Z}_2).$$

Die neuen Invarianten unterscheiden  $G_1$  und  $G_2$ , die andererseits in  $\#(V) = 4, \#(K) = 5, b_0 = 1, b_1 = 2$  übereinstimmen.

Allgemein wie in dem obigen Beispiel gilt, daß  $\langle z(k), z(k) \rangle, k \in K \setminus L$ , die Anzahl der in  $z(k)$  vorkommenden Kanten ist. Analoges gilt für  $c(1)$  und die gemischten Produkte  $\langle z(k), z(k') \rangle, \langle c(1), c(1') \rangle$ . Eine weitergehende geometrische Deutung der ganzen Matrizen  $C^T C$  und  $Z^T Z$  und ihrer Invarianten ist mir augenblicklich nicht bekannt. ■

Andere Beispiele, in denen elementare homologische Algebra grundsätzliche Ergebnisse über Graphen impliziert, sind folgende.

(50) Zusammenziehung (Kontraktion) (vergleiche [6], S. 169 unten, [8], Ch. 2): Seien  $G = (V, K)$  ein Graph und  $K = S \cup T$  disjunkte Vereinigung von Teilmengen. Das kommutative exakte Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}^S & \xrightarrow{\partial} & \mathbb{Z}^K & \xrightarrow{\text{proj}} & \mathbb{Z}^T \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}^V & = & \mathbb{Z}^V & \rightarrow & 0 \rightarrow 0 \end{array}$$

und das Schlangenlemma (siehe [5], S. 50) liefern die exakte Folge

$$(51) \quad 0 \rightarrow H_1(V, S) \subset H_1(V, K) \xrightarrow{\text{proj}_Z T} Z^T \xrightarrow{\mathcal{D}_{G \times T}} Z^{\mathcal{T}_0(V, S)} \xrightarrow{\text{kan}} Z^{\mathcal{T}_0(G)} \rightarrow 0,$$

wobei der verbindende Homomorphismus  $\mathcal{D}$  gegeben ist durch

$$(52) \quad \mathcal{D}(t) = [\text{Dom}(t)] - [\text{Cod}(t)], \quad t \in T,$$

$[v]$  = die  $v$  enthaltende Komponente von  $(V, S)$ .

Man erhält den neuen Graphen

$$(53) \quad G \times T := (\mathcal{T}_0(V, S), T) \quad (\text{vergl. [7], S. 32}) \quad \text{mit } \text{Dom}_{G \times T}(t) = [\text{Dom}_G(t)], \text{Cod}_{G \times T}(t) = [\text{Cod}_G(t)].$$

Dann ist  $\mathcal{D}_{G \times T} = \mathcal{D}$  in (51). Die Exaktheit von (51) impliziert die Isomorphismen

$$\text{proj}_{\text{ind}} : H_1(G)/H_1(V, S) \cong H_1(G \times T), \quad \text{kan}_{\text{ind}} : \mathcal{T}_0(G \times T) \cong \mathcal{T}_0(G),$$

insbesondere  $b_0(G \times T) = b_0(G)$ . Dies ist eine bedeutende Verschärfung von Th. II. 5 in [7].

(54) Mayer-Vietoris-Folge (nach L. Vietoris, 1891-, Prof. em. in Innsbruck): Sei  $G = (V, K) = G_1 \cup G_2$  Vereinigung der Untergraphen  $G_i = (V_i, K_i), i=1,2$ , also  $V = V_1 \cup V_2, K = K_1 \cup K_2$ . Auch  $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, K_1 \cap K_2)$  ist ein Untergraph. Das kommutative exakte Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Z^{K_1 \cap K_2} & \xrightarrow{(\text{inj}, -\text{inj})} & Z^{K_1} \times Z^{K_2} & \xrightarrow{+} & Z^K \rightarrow 0 \\ \mathcal{D}_{G_1 \cap G_2} \downarrow & & \mathcal{D}_{G_1 \cap G_2} \downarrow & & \mathcal{D}_{G_1} \times \mathcal{D}_{G_2} \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}_G \\ 0 & \rightarrow & Z^{V_1 \cap V_2} & \xrightarrow{(\text{inj}, -\text{inj})} & Z^{V_1} \times Z^{V_2} & \xrightarrow{+} & Z^V \rightarrow 0 \end{array}$$

und wieder das Schlangenlemma induzieren die exakte Folge

$$(55) \quad 0 \rightarrow H_1(G_1 \cap G_2) \xrightarrow{(\text{inj}, -\text{inj})} H_1(G_1) \times H_1(G_2) \xrightarrow{+} H_1(G) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z^{\mathcal{T}_0(G_1 \cap G_2)} \xrightarrow{(\text{inj}, -\text{inj})} Z^{\mathcal{T}_0(G_1)} \times Z^{\mathcal{T}_0(G_2)} \xrightarrow{+} Z^{\mathcal{T}_0(G)} \rightarrow 0,$$

wobei  $\mathcal{D}$  für  $c = \sum \{c(k_i) k_i, k_i \in K_i\} + \sum \{c(k) k; k \in K \setminus K_i\}$  gegeben ist durch

$$\mathcal{D}(c) = \sum c(k_i) ([\text{Dom}(k_i)] - [\text{Cod}(k_i)]) \in Z^{\mathcal{T}_0(G_1 \cap G_2)}.$$

Diese exakte Folge (55) ist nützlich für die Theorie der "schneidenden Paare", des  $n$ -Zusammenhangs u.ä. (vergl. [7], Ch. 2,3).

Literatur [1] Berge, Ghouila-Houri: Programming, Games and Transportation Networks, John Wiley 1965 [2] Berge: Graphs and Hypergraphs, North-Holland 1973 [3] Biggs, Lloyd, Wilson: Graph Theory 1736-1936, Clarendon Press 1986 [4] König: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Akademische Verlagsgesellschaft 1936 [5] Mac Lane: Homology, Springer 1963 [6] Seifert, Threlfall: Topologie, Teubner 1934 [7] Tutte: Graph Theory, Addison-Wesley 1984 [8] Welsh: Matroid Theory, Academic Press 1976.