Asymptotische Entwicklungen für unvollständige Gammafunktionen

A. Guthmann

Sei ν eine natürliche Zahl und

$$E_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \Gamma(w)^\nu x^{-w} dw \;, \quad c>0, \; x>0.$$

Also $E_1(x)=e^{-x}$, $E_2(x)=2K_0(2\sqrt{x})$, mit der Besselfunktion K_0.

Analytische Eigenschaften: $E_\nu(x)= \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^j}{j!}(\log x)^j H_j^{(\nu)}(x)$, wobei $H_j^{(\nu)}$ eine ganze Funktion ist.

Differentialgleichung: Sei $DF(x)=-xF'(x)$; dann $D^\nu E_\nu(x)=xE_\nu(x)$ (Verallgemeinerung der Differentialgleichung für Exponential- und Besselfunktion).

Asymptotische Entwicklung: Für $\nu \geq 1$, $x\to\infty$ gilt

$$E_\nu(x^\nu)=(2\pi)^{\frac{\nu-1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} e^{-\nu x} x^{-\frac{\nu-1}{2}} H_\nu(x^\nu), \quad H_\nu(x^\nu) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(\nu)} x^{-j} \;, \quad a_j^{(\nu)} \text{ rational.}$$

Es gilt $\Gamma(a)^\nu = \int_0^\infty E_\nu(t)t^{a-1}dt$. Die unvollständige Gammafunktion der Ordnung ν ist dann

$$\Gamma_\nu(a,x) = \int_x^\infty E_\nu(t)t^{a-1}dt, \quad a>0, \; x\geq 0.$$

Problem: Asymptotische Entwicklung für $a\to\infty$ gleichmäßig in x.

Funktionalgleichung: $\Gamma_\nu(a,x)=-\frac{x^a}{a} \sum_{j=0}^{\nu-1} a^{-j} D^j E_\nu(x) + a^{-\nu}\Gamma_\nu(a+1,x)$.

Asymptotische Entwicklung: Sei $Q_\nu(a,x)=\Gamma_\nu(a,x)\Gamma(a)^{-\nu}$, $a>0$, $l\geq 0$, $m>0$, $\eta =(2\nu(\nu l^{1/\nu} - \log l -\nu))^{1/2}$, $\operatorname{sgn}(\eta)=\operatorname{sgn}(l-1)$. Dann gilt

$$Q_\nu(a,la^\nu)=\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\eta\left(\frac{a}{2\nu}\right)^{1/2}\right) + \nu(2\pi a\nu)^{-1/2}e^{-a\eta^2/2\nu}\sum_{k=0}^{m-1} \psi_k(\eta)a^{-k} +R$$

$$R = R_m(a,\eta) = a^{-m}\left(\frac{a}{2\pi\nu}\right)^{1/2} \int_\eta^\infty e^{-au^2/2\nu} K(u)du \;, \quad K \text{ geeignet,}$$

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty \exp(-t^2)dt \;, \quad \psi_k \text{ analytisch in } \{z\in\mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)|<\varepsilon\}$$

für ein $\varepsilon > 0$.