EINE KOMBINATORISCHE UNGLEICHUNG

Michael Drmota (Wien)

Sei $A = \{a_1,\ldots,a_\alpha\}$, $\alpha \geq 2$, ein endliches Alphabet und bezeichne A^* die Menge aller endlichen Worte über A. Ein Wort $v = v_1\ldots v_n$ $(v_i \in A)$ heißt Teilwort des Wortes $u = u_1\ldots u_m$ $(u_i \in A)$, falls für jedes k $(1 \leq k \leq n)$ ein j_k $(j_1 < \ldots < j_n)$ mit $v_k = u_{j_k}$ existiert. Weiters bezeichne $(u;v)$ die Anzahl, wie oft v als Teilwort in u vorkommt und $|v|$ die Länge des Wortes v. Damit kann die s-Diskrepanz eines Wortes $u \in A^*$ definiert werden:

$$D_s(u) = \max_{|v|=s} \left| (u;v)\binom{|u|}{s}^{-1} - \alpha^{-s} \right| \qquad (1 \leq s \leq |u|) \quad .$$

Es soll nun die s-Diskrepanz des Wortes $u = (a_1\ldots a_\alpha)^n$ explizit berechnet werden. Der Spezialfall $\alpha = 2$ wurde bereits in [1] behandelt. In [2] wird gezeigt, daß

$$((a_1\ldots a_\alpha)^n;v) = \binom{n+d(v)}{s}$$

gilt, wobei $d(v)$ die Anzahl der geschlossenen Zweierblöcke der Form $a_i a_{i+k}$, $1 \leq i \leq \alpha$, $1 \leq k \leq \alpha-i$, im Wort v ist. Daraus folgt

$$\binom{n}{s} \leq ((a_1\ldots a_\alpha)^n;v) \leq \binom{n+s-1-\left[\frac{s-1}{\alpha}\right]}{s} \qquad ,$$

wobei beide Extremfälle eintreten können. Kann man nun die Ungleichung

$$\binom{n+s-1-\left[\frac{s-1}{\alpha}\right]}{s} + \binom{n}{s} \geq 2\binom{\alpha n}{s}\alpha^{-s} \tag{1}$$

zeigen, erhält man für die s-Diskrepanz die explizite Formel:

<u>SATZ:</u>

$$D_s((a_1\ldots a_\alpha)^n) = \binom{n+s-1-\left[\frac{s-1}{\alpha}\right]}{s}\binom{\alpha n}{s}^{-1} - \alpha^{-s} \tag{2}$$

Zum Beweis von (1) betrachte man zunächst den Fall $n \geq s$. Schreibt man $s-1$ in der Form $s-1 = \alpha g+k$, $0 \leq k \leq \alpha-1$, dann ist (1) äquivalent zu

$$(n+\alpha g+k-g)\ldots(n+1) + (n-g-1)\ldots(n-\alpha g-k) \geq 2(n-\tfrac{1}{\alpha})\ldots(n-1+\tfrac{1}{\alpha})(n-1-\tfrac{1}{\alpha})\ldots(n-g-\tfrac{k}{\alpha}), \tag{3}$$

wenn die gemeinsamen Faktoren gekürzt werden. Mit dem für $x \geq 0$ konvexen Polynom

$$f(x) = \prod_{j=1}^{(\alpha-1)g+k} (n-g-j+x(j+\tfrac{g}{2}))$$

folgt aus der Jensenschen Ungleichung $f(0) + f(2) \geq 2\,f(1)$, das heißt

$$(n+\alpha g+k-g)\ldots(n+1) + (n-g-1)\ldots(n-\alpha g-k) \geq 2(n-\tfrac{g}{2})^{(\alpha-1)g+k}. \tag{4}$$

(3) folgt dann aus (4), $((\alpha-1)g+k)(n-g/2) \geq (\alpha-1)g(n-g/2) + k(n-g-(k+1)/(2\alpha))$ und aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel. Für den Fall $n < s$ gilt (1) ebenfalls. Dies kann man mit Hilfe der Ungleichung

$$\prod_{i=1}^{j}(1+x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{j} x_i \qquad (x_i \geq 0)$$

und unmittelbarer Überprüfung des Falles $s = 3$ sofort nachweisen.

[1] P. Kirschenhofer und R.F. Tichy, Gleichverteilung und Formale Sprachen, SB Österr. Akad.Wiss., Math.-naturw. Kl. II, <u>189</u> (1980), 291 - 319.

[2] P. Kirschenhofer und R.F. Tichy, Gleichverteilte Folgen auf Diskreten Räumen, in: Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 14éme Session (V. Strehl ed.), Publication de l'I.R.M.A. Strasbourg <u>323</u>/S14 (1986), 89 - 108.