Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1988, 348/S-17
Actes 17[e] Séminaire Lotharingien, p. 69-95

LINÉARISATION DE PRODUITS DE POLYNÔMES DE MEIXNER, KRAWTCHOUK ET CHARLIER

PAR

JIANG ZENG

RÉSUMÉ. — Soit $(p_n(x))$ $(n \geq 0)$ une suite de polynômes orthogonaux par rapport à une fonctionnelle $\mathcal{L}$. On propose un calcul de la fonctionnelle $\mathcal{L}(\prod_{i=1}^{m} p_{n_i}(x))$ pour les polynômes de Meixner, Krawtchouk et Charlier, à l'aide de techniques combinatoires. Cette approche combinatoire permet de raffiner plusieurs résultats analytiques connus.

ABSTRACT. — Let $(p_n(x))$ $(n \geq 0)$ be a sequence of orthogonal polynomials with respect to a functional $\mathcal{L}$. We propose a calculation of the functional $\mathcal{L}(\prod_{i=1}^{m} p_{n_i}(x))$ for the Meixner, Krawtchouk and Charlier polynomials, with the help of combinatorial techniques. This combinatorial approach permits to refine several classical analytical results.

1. Introduction

Les coefficients de *linéarisation* d'une suite de polynômes orthogonaux $(p_n(x))$ sont les nombres $\alpha_{n,m,k}$ définis par : $p_n(x)p_m(x) = \sum_k \alpha_{n,m,k}p_k(x)$. De façon équivalente, si $\mathcal{L}$ est la fonctionnelle associée, le coefficient $\alpha_{n,m,k}$ est encore donné par : $\mathcal{L}(p_n p_m p_k) = \alpha_{n,m,k}\mathcal{L}(p_k p_k)$.

Beaucoup d'auteurs se sont proposés de calculer ces coefficients pour les polynômes hypergéométriques classiques en faisant apparaître des conditions simples pour la positivité de ces coefficients. Ils ont utilisé, soit des méthodes analytiques (*cf.* [As1, As2, Ea, Ra]), soit des méthodes combinatoires (*cf.* [Az-Gi-Vi, Fo-Ze2]). L'objet du présent mémoire est de reprendre à la fois les techniques analytiques et combinatoires des précédents auteurs, pour calculer effectivement $\mathcal{L}(\prod_{i=1}^{m} p_{n_i})$ pour les polynômes de Meixner, Krawtchouk et Charlier. On obtient ainsi plusieurs formules nouvelles dans le cas où les paramètres de ces polynômes ont des valeurs arbitraires.

Dans tout cet article, on adopte la notation classique : $(a)_0 = 1$ et $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$, si $n \geq 1$. On suppose que m est un entier ≥ 1 fixé et que $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ est une suite de m entiers positifs. Enfin, $[n]$ désigne l'intervalle $\{1, 2, \ldots, n\}$ des entiers.

Rappelons que les polynômes de Meixner $M_n(x;\beta,c)$ sont définis par

$$M_n(x;\beta,c)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)_k(\beta+k)_{n-k}(c^{-1}-1)^k \qquad (n\geq 0) \tag{1.1}$$

(*cf.* [Ch]), où $\beta>0$ et $0<c<1$. Ils sont orthogonaux par rapport à la fonction-poids discrète $(c^k(\beta)_k/k!)$ $(k\geq 0)$, portée par $\mathbb{N}$.

Les polynômes de Krawtchouk $(K_n(x;p,N))$ sont définis par :

$$K_n(x;p,N)=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-n)_k(-x)_k}{(-N)_k k!}\left(\frac{1}{p}\right)^k, \tag{1.2}$$

où $0<p<1$ et $n=0,1,\ldots,N$. Ils sont orthogonaux par rapport à la fonction-poids $\binom{N}{x}p^x(1-p)^{N-x}$, portée par les entiers $0,1,\ldots,N$. (*cf.* [Ch]).

Les polynômes de Charlier $C_n^{(a)}(x)$ sont eux définis par :

$$C_n^{(a)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)_k a^{-k}, \quad (a>0,\ n\geq 0) \tag{1.3}$$

et sont orthogonaux par rapport à la fonction-poids $a^k/k!$ portée par $\mathbb{N}$. (*cf.* [Ch]).

Les trois fonctionnelles correspondant à ces trois suites de polynômes sont données par [1] :

$$\mathcal{M}(\mathbf{n};\beta,c)=(-1)^{n_1+\cdots+n_m}(1-c)^{\beta}\sum_{x\geq 0}\prod_{i=1}^{m}M_{n_i}(x;\beta,c)\frac{c^x(\beta)_x}{x!}; \tag{1.4}$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{n};N,p) =\prod_{i=1}^{m}(-1)^{n_i}(-N)_{n_i}\sum_{x=0}^{N}\prod_{i=1}^{m}K_{n_i}(x;p,N)\binom{N}{x}p^x(1-p)^{N-x}; \tag{1.5}$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{n};a)=e^{-a}\prod_{i=1}^{m}(-a)^{n_i}\sum_{x\geq 0}\prod_{i=1}^{m}C_{n_i}^{(a)}(x)\frac{a^x}{x!}. \tag{1.6}$$

Nos résultats principaux concernant les fonctionnelles de Meixner et Krawtchouk reposent sur des propriétés statistiques d'une classe d'objets combinatoires, appelés *dérangements colorés*. On les introduit de la façon

[1] Les fonctionnelles de Meixner et de Krawtchouk auront le même support combinatoire. Pour des raisons d'homogénéité, on a dû adopter la notation $\mathcal{K}(\mathbf{n};N,p)$ pour la fonctionnelle de Krawtchouk, alors que le polynôme est noté classiquement $K_n(x;p,N)$.

suivante. D'abord toute suite $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ de m entiers positifs de somme n détermine, de façon unique, une application χ de $[n]$ sur $[m]$, donnée par $\chi(j) = i$, si $n_1 + \cdots + n_{i-1} < j \le n_1 + \cdots + n_i$ $(1 \le i \le m$; par convention, $n_0 = 0)$. On dit que χ est le *m-coloriage* de $[n]$ associé à la suite $\mathbf{n}$. On note $C_\mathbf{n}$ l'ensemble de tous les couples $(\chi(j), j)$, $(j = 1, \ldots, n)$. Par commodité, $\chi(j)$ est appelé la *couleur* de j. Soit π une permutation de $C_\mathbf{n}$, son *nombre de cycles* est noté $\operatorname{cyc}\pi$; on dit que π est un *dérangement (coloré)* de $C_\mathbf{n}$ si $\chi(j) \ne \chi(\pi(j))$ pour tout $j \in [n]$; on note $\mathcal{D}(\mathbf{n})$ l'ensemble des dérangements de $C_\mathbf{n}$. On dit, d'autre part, que π a une *excédance* en j $(1 \le j \le n)$, si $\chi(j) < \chi(\pi(j))$; on note $\operatorname{exc}\pi$ le nombre des excédances de π. On définit enfin le *poids* de π par : $w(\pi) = \beta^{\operatorname{cyc}\pi}\gamma^{\operatorname{exc}\pi}$. Le polynôme générateur de $\mathcal{D}(\mathbf{n})$ par w est alors défini par :

$$D(\mathbf{n}; \beta, \gamma) = \sum_{\pi} w(\pi) \qquad (\pi \in \mathcal{D}(\mathbf{n})).$$

Pour l'étude de la fonctionnelle de Charlier, on utilise la notion de partition de l'ensemble $C_\mathbf{n}$. Une telle partition π est dite *partition colorée*, si chaque bloc de π est constitué seulement par des éléments de couleurs différentes. Le nombre de blocs dans la partition π est noté $\operatorname{bloc}\pi$ et $\mathcal{PCS}(\mathbf{n})$ désigne l'ensemble des partitions colorées sans points isolés (c'est-à-dire, sans blocs réduits à un élément) de $C_\mathbf{n}$. Chaque partition π de $C_\mathbf{n}$ est munie d'un poids défini par : $\nu(\pi) = a^{\operatorname{bloc}\pi}$. Le polynôme générateur de $\mathcal{PCS}(\mathbf{n})$ par ν est défini par :

$$PCS(\mathbf{n}; a) = \sum_{\pi} \nu(\pi) \qquad (\pi \in \mathcal{PCS}(\mathbf{n})).$$

Le résultat essentiel de notre article consiste à établir les trois identités :

$$\mathcal{M}(\mathbf{n}; \beta, c) = D(\mathbf{n}; \beta, c^{-1}); \tag{1.7}$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{n}; N, p) = D(\mathbf{n}; -N, 1 - 1/p); \tag{1.8}$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{n}; a) = PCS(\mathbf{n}; a). \tag{1.9}$$

La première identité montre que $\mathcal{M}(\mathbf{n}; \beta, c)$ est un polynôme de variables β et c^{-1} à coefficients entiers positifs ; donc la positivité de $\mathcal{M}(\mathbf{n}; \beta, c)$ lorsque $\beta \ge 0$ et $0 < c < 1$ est évidente : $\mathcal{M}(\mathbf{n}; \beta, c) \ge 0$.

La seconde identité indique que $\mathcal{K}(\mathbf{n}; N, p)$ est un polynôme en les variables $(-N)$ et $(1 - 1/p)$ à coefficients entiers positifs, mais cette fois-ci l'interprétation de $\mathcal{K}(\mathbf{n}; N, p)$ ne donne pas d'information sur son signe immédiatement. On a besoin de faire appel à l'algèbre des fonctions symétriques.

Comme démontré dans le COROLLAIRE 10, on a la forme explicite de la fonctionnelle sous la forme :

$$(1.10)\quad \mathcal{K}(\mathbf{n}; N, p) = \prod_{i=1}^{m} n_i! \sum_{s\geq 0}(-N)_s(p-1)^s \sum_{\lambda} a_{\lambda\mu} \prod_{i=2}^{m} \frac{(1-(1-1/p)^{i-1})^{k_i}}{k_i!},$$

où μ est la partition (constante) $\mu = (1^{n_1}2^{n_2}\dots m^{n_m})$, où λ varie dans l'ensemble des partitions $(1^0 2^{k_2}\dots m^{k_m})$ de l'entier $n = n_1 + \cdots + n_m$ satisfaisant $k_2 + \cdots + k_m = s$ et où les $a_{\lambda\mu}$ sont des coefficients de changement de base s'exprimant à l'aide des nombres de Kostka (*cf.* COROLLAIRE 10). On montrera comment cette formule permet d'établir directement un résultat fondamental sur la positivité de la fonctionnelle de Krawtchouk (*cf.* COROLLAIRE 11).

Les techniques de démonstration font appel aux méthodes du composé partitionnel [Fo-Sch, Fo] et d'autre part prolongent, dans un contexte combinatoire, des calculs analytiques faits par ASKEY et ISMAIL [As-Is]. Ces deux derniers auteurs ont établi l'identité (1.1) lorsque $\beta = 1$. La formule (1.4), valable pour m quelconque se spécialise pour $m = 3$ en une formule obtenue par ASKEY et GASPER [As-Ga]. L'interprétation combinatoire des fonctionnelles de Krawtchouk et Charlier est nouvelle.

Après la présente introduction, l'article s'ouvre sur trois chapitres et un appendice. Le deuxième chapitre contient toutes les techniques combinatoires utilisées. On y prolonge un calcul de déterminant introduit pas ASKEY et ISMAIL [1s-Is] (*cf.* THÉORÈME 1), à l'aide de la β-extension du "Master Theorem", établi par FOATA et ZEILBERGER [Fo-Ze2]. En fait, pour mener le calcul de la fonctionnelle à son terme, il faut non seulement évaluer le polynôme générateur des dérangements, mais trouver la relation entre ce dernier et le polynôme générateur de toutes les permutations (voir THÉORÈMES 3 et 4).

Il suffit, dans le troisième chapitre, d'appliquer les résultats établis dans le chapitre précédent pour démontrer les trois identités (1.1), (1.2) et (1.3).

Il est remarquable de constater que *toutes* les fonctionnelles des polynômes orthogonaux hypergéométriques classiques sont des fonctions génératrices de *dérangements*. Le chapitre 4 montre qu'il y a une cohérence totale entre les diverses interprétations combinatoires de ces fonctionnelles. On retrouve, pour celles-ci, le même tableau qu'ASKEY et WILSON [As-Wi] avaient construit pour les polynômes eux-mêmes.

L'appendice propose une démonstration analytique d'une identité (COROLLAIRE 2), déjà établie à l'aide de techniques combinatoires.

L'auteur tient à remercier M. D. FOATA pour son aide et ses suggestions durant toute la préparation de ce travail.

2. Calcul permutationnel et partitionnel

2.1. Trois lemmes fondamentaux. — Soient A un ensemble fini et S un sous-ensemble de A. Chaque injection π de S dans A peut s'identifier avec son graphe : les sommets sont les éléments de A, les arcs sont les flèches allant de i à j si $\pi(i) = j$. On désigne par $\operatorname{cyc} \pi$ le nombre de cycles du graphe et l'on définit le poids de π par $w(\pi) = \beta^{\operatorname{cyc} \pi}$. On note enfin $\operatorname{Inj}(S, A)$ l'ensemble des injections de S dans A et $|A|$ le cardinal de A. Le polynôme générateur de $\operatorname{Inj}(S, A)$ par le nombre de cycles prend la forme simple exprimée dans le lemme suivant (*cf.* [Fo-St]).

LEMME 1. — *Soient* $0 \leq k \leq n$, $|A| = n$ *et* $|S| = n - k$, *on a*

$$w(\operatorname{Inj}(S, A)) = \sum_{\pi} w(\pi) = (\beta + k)_{n-k} \qquad (\pi \in \operatorname{Inj}(S, A)). \tag{2.1}$$

Remarque. — Lorsque $k = 0$, à savoir $S = A$, l'ensemble $\operatorname{Inj}(S, A)$ se compose des permutations de A. La formule (2.1) se réduit alors au résultat classique (*cf.* [Ri]) :

$$\sum_{\pi} w(\pi) = \sum_{\pi} \beta^{\operatorname{cyc} \pi} = (\beta)_n \qquad (\pi \in \mathfrak{S}_n). \tag{2.2}$$

Dans l'introduction, on a défini l'ensemble $C_{\mathbf{n}}$ de tous les couples $(\chi(j), j)$, $(j = 1, \ldots, n)$, ainsi que l'ensemble des *dérangements* $\mathcal{D}(\mathbf{n})$ de $C_{\mathbf{n}}$, définis à l'aide de la fonction χ. On introduit, en plus, l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ des permutations de $C_{\mathbf{n}}$. On munit ensuite chaque permutation π de $C_{\mathbf{n}}$ du poids $\nu(\pi)$ défini par

$$\nu(\pi) = \beta^{\operatorname{cyc} \pi} \prod_{j=1}^{n} b(\chi(j), \chi(\pi(j))) \tag{2.3}$$

et on pose :

$$\nu(\mathcal{P}(\mathbf{n})) = \sum_{\pi} \nu(\pi) \qquad (\pi \in \mathcal{P}(\mathbf{n})). \tag{2.4}$$

La fonction génératrice $\nu(\mathcal{P}(\mathbf{n}))$ a une forme explicite donnée par la β-extension du "Master Theorem" (*cf.* [Fo-Ze]). Dans l'énoncé suivant, V_m désigne le déterminant classique du "Master Theorem", à savoir, $\det(\delta_{ij} - b(i, j)x_j)$ $(1 \leq i, j \leq m)$.

LEMME 2 (β-extension du "Master Theorem"). — *On a l'identité :*

$$\sum \frac{x_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{x_m^{n_m}}{n_m!} \nu(\mathcal{P}(\mathbf{n})) = V_m{}^{-\beta}, \tag{2.5}$$

où la sommation de gauche est faite sur toutes les suites $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ *de* m *entiers positifs.*

La formule exponentielle va jouer un rôle important dans cet article. Nous rappelons ici la méthode du *composé partitionnel* (*cf.* [Fo-Sch], [Fo2]) permettant un calcul simple de plusieurs fonctions génératrices exponentielles. Étant donné un ensemble fini A, une *partition* de A est une collection $\pi = \{S_1, \ldots, S_r\}$ de ses sous-ensembles non vides, mutuellement disjoints, dont l'union est égale à A. On appelle *bloc* chaque part S_i dans π, et l'on note $\operatorname{bloc}\pi$ le nomber de blocs de π. On note enfin $\Pi[n]$ (resp. $S[n]$) l'ensemble des partitions (resp. partitions en un bloc) de $[n]$ et on pose

$$\Pi^{(+)} = \bigcup_{n\geq 1} \Pi[n], \qquad S^{(+)} = \bigcup_{n\geq 1} S[n].$$

On peut identifier $\Pi^{(+)}$ au *composé partitionnel abélien* (*cf.* [Fo2]) de $S^{(+)}$.

Rappelons qu'une *application multiplicative* est une application μ de $S^{(+)}$ dans une algèbre de polynômes, telle que si π est une partition $\{S_1, \ldots, S_r\}$, où chaque S_i est un bloc de taille n_i, le polynôme $\mu(\pi)$ est donné par le produit $\mu(S[n_1]) \ldots \mu(S[n_r])$. On peut alors considérer les polynômes :

$$\mu\{\Pi[n]\} = \sum\{\mu(\pi) : \pi \in \Pi[n]\} \quad \text{et} \quad \mu\{S[n]\} = \sum\{\mu(\pi) : \pi \in S[n]\}.$$

Comme démontré dans [Fo2], ils sont reliés par la formule exponentielle exprimée ci-après.

LEMME 3. — *Si* μ *est une application multiplicative, on a l'identité :*

$$1 + \sum_{n\geq 1} \mu\{\Pi[n]\}\frac{u^n}{n!} = \exp\Bigl(\sum_{n\geq 1} \mu\{S[n]\}\frac{u^n}{n!}\Bigr). \tag{2.6}$$

2.2. Permutations et dérangements. — Dans l'introduction on a défini le poids

$$w(\pi) = \beta^{\operatorname{cyc}\pi}\gamma^{\operatorname{exc}\pi} \tag{2.7}$$

d'une permutation π de $C_{\mathbf{n}}$. On a aussi défini le polynôme générateur $\mathcal{D}(\mathbf{n})$. Nous rappelons ci-après cette définition et introduisons, en plus, le polynôme générateur $P(\mathbf{n};\beta,\gamma)$ de *toutes* les permutations de $C_{\mathbf{n}}$:

$$\tag{2.8} \begin{aligned} P(\mathbf{n};\beta,\gamma) &= \sum_{\pi} w(\pi) \qquad (\pi \in \mathcal{P}(\mathbf{n}));\\ D(\mathbf{n};\beta,\gamma) &= \sum_{\pi} w(\pi) \qquad (\pi \in \mathcal{D}(\mathbf{n})). \end{aligned}$$

Les fonctions génératrices de ces deux polynômes ont des formes explicites, qui sont exprimées ci-dessous à l'aide des fonctions symétriques élémentaires $e_1,\ldots,e_m$ des variables $x_1,\ldots,x_m$.

THÉORÈME 1. — *On a les identités*

$$\tag{2.9} \begin{aligned} &\sum_{\mathbf{n}} \frac{x_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{x_m^{n_m}}{n_m!} P(\mathbf{n};\beta,\gamma)\\ &\qquad = [1 - e_1 - (\gamma-1)e_2 - \cdots - (\gamma-1)^{m-1}e_m]^{-\beta}; \end{aligned}$$

$$\tag{2.10} \begin{aligned} &\sum_{\mathbf{n}} \frac{x_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{x_m^{n_m}}{n_m!} D(\mathbf{n};\beta,\gamma)\\ &\qquad = [1 - \gamma e_2 - \gamma(1+\gamma)e_3 - \cdots - \gamma(1+\gamma+\cdots+\gamma^{m-2})e_m]^{-\beta}; \end{aligned}$$

où les sommations sont faites sur toutes les suites $\mathbf{n} = (n_1,\ldots,n_m)$ *de* m *entiers positifs.*

Remarque. — Lorsque $\beta = 1$, ASKEY et ISMAIL [As-Is] ont obtenu la seconde identité avec une interprétation combinatoire analogue.

Démonstration. — Pour $1 \le i,j \le m$, posons

$$\tag{2.11} b(i,j) = \begin{cases} \gamma, & \text{si } i < j;\\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En substituant $b(i,j)$ dans le LEMME 2 et en posant $n = n_1 + \cdots + n_m$, on trouve :

$$\begin{aligned} \nu(\mathcal{P}(\mathbf{n})) &= \sum_{\pi\in\mathcal{P}(\mathbf{n})} \beta^{\operatorname{cyc}\pi} \prod_{j=1}^{n} b(\chi(j),\chi(\pi(j)))\\ &= \sum_{\pi\in\mathcal{P}(\mathbf{n})} \beta^{\operatorname{cyc}\pi}\gamma^{\operatorname{exc}\pi}. \end{aligned}$$

Le déterminant $\det(\delta_{i,j} - b(i,j)x_j)$ devient :

$$V_m = (-1)^m x_1 \dots x_m \begin{vmatrix} 1 - x_1^{-1} & \gamma & \dots & \gamma & \gamma \\ 1 & 1 - x_2^{-1} & \dots & \gamma & \gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 - x_{m-1}^{-1} & \gamma \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 - x_m^{-1} \end{vmatrix}$$
$$= 1 - e_1 - (\gamma - 1)e_2 - \dots - (\gamma - 1)^{m-1} e_m.$$

(*cf.*, par exemple, MUIR [Mu, p. 441]).

L'identité (2.10) est démontrée de façon analogue. Il suffit de prendre pour $b(i,j)$ les valeurs :

$$b(i,j) = \begin{cases} \gamma, & \text{si } i < j\,; \\ 0, & \text{si } i = j\,; \\ 1, & \text{si } i > j. \end{cases}$$

On notera qu'à cause des valeurs $b(i,i) = 0$, la somme $\nu(\mathcal{P}(\mathbf{n}))$ est égale à $D(\mathbf{n}; \beta, \gamma)$. Le déterminant de MacMahon devient :

$$V_m = (-1)^m x_1 \dots x_m \begin{vmatrix} -x_1^{-1} & \gamma & \dots & \gamma & \gamma \\ 1 & -x_2^{-1} & \dots & \gamma & \gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & -x_{m-1}^{-1} & \gamma \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -x_m^{-1} \end{vmatrix},$$

qu'on peut encore exprimer sous la forme :

$$V_m = 1 - \gamma e_2 - \gamma(1+\gamma)e_3 - \dots - \gamma(1 + \gamma + \dots + \gamma^{m-2})e_m.$$

(*cf.* MUIR [Mu, p. 441] et ASKEY et ISMAIL [As-Is, § 3].) □

L'identité (2.9) permet de donner une formule explicite pour le polynôme $P(\mathbf{n}; \beta, \gamma)$ donnée dans le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. — *On a l'identité*

$$P(\mathbf{n}; \beta, \gamma) = (1 - \gamma^{-1})^\beta (1 - \gamma)^n \sum_{k \geq 0} \prod_{i=1}^{m} (-k)_{n_i} \frac{\gamma^{-k} (\beta)_k}{k!}, \tag{2.12}$$

où $n = n_1 + \dots + n_m$.

Remarque. — Lorsque $m = 1$, en appliquant la formule binomiale, on retrouve (2.2). Lorsque tous les n_i valent 1, on retrouve une formule apparaissant dans le mémoire de VIENNOT [Vi, formule (66), p. II-37].

Démonstration. — Il suffit de vérifier que le membre de droite de (2.11) satisfait la formule (2.9). En effet, en substituant dans (2.9) $P(\mathbf{n};\beta,\gamma)$ par le membre de droite de (2.12), on a

$$\begin{aligned}(1-\gamma^{-1})^{\beta}\sum_{k\geq 0}\Big(\prod_{i=1}^{m}\sum_{n_i\geq 0}(1-\gamma)^{n_i}(-k)_{n_i}\frac{x_i^{n_i}}{n_i!}\Big)\frac{\gamma^{-k}(\beta)_k}{k!}\\ &= (1-\gamma^{-1})^{\beta}\sum_{k\geq 0}\prod_{i=1}^{m}(1-(1-\gamma)x_i)^k\frac{\gamma^{-k}(\beta)_k}{k!}\\ &= (1-\gamma^{-1})^{\beta}[(1-\gamma^{-1}\prod_{i=1}^{m}(1-(1-\gamma)x_i)]^{-\beta}\\ &= [1-e_1-(\gamma-1)e_2-\cdots-(\gamma-1)^{-1}e_m]^{-\beta},\end{aligned}$$

en appliquant par deux fois la formule binomiale. □

Dans (2.12), en faisant γ tendre vers 1 et en utilisant l'identité (2.2), on obtient le corollaire ci-dessous, qui permet d'interpréter la fonctionnelle de produits de polynômes de Laguerre (voir THÉORÈME 8 ci-après) à partir de celle de Meixner.

COROLLAIRE 2. — *On a :*

$$\lim_{\gamma\to 1}(1-\gamma^{-1})^{\beta}(1-\gamma)^{n_1+\cdots+n_m}\sum_{k\geq 0}\prod_{i=1}^{m}(-k)_{n_i}\frac{\gamma^{-k}(\beta)_k}{k!}=(\beta)_{n_1+\cdots+n_m}.$$

On se propose maintenant de trouver une formule analogue pour $D(\mathbf{n};\beta,\gamma)$ dans le cas où m est quelconque (≥ 3). Soient

$$\lambda=(1^{k_1}2^{k_2}\dots m^{k_m})\qquad\text{et}\qquad \mu=(1^{n_1}2^{n_2}\dots m^{n_m})$$

deux *partitions* d'entiers, la plus grande part étant $\leq m$. Comme il est bien connu (*cf.* [Macd. p.65]), chaque élément $e_\lambda=e_1^{k_1}\cdots e_m^{k_m}$ s'exprime à l'aide des fonctions symétriques monomiales $\sum x^\mu$ par l'équation $e_\lambda=\sum_\mu a_{\lambda\mu}\sum x^\mu$. Les coefficients $a_{\lambda\mu}$ sont des entiers positifs, qui ont une expression simple en fonction des nombres de Kostka (*cf.* [Macd, p. 65]).

COROLLAIRE 3. — *On a l'identité*

$$\text{(2.13)}\quad D(\mathbf{n};\beta,\gamma) = \Big(\prod_{i=1}^{m}n_i!\Big)\sum_{s\geq 0}(\beta)_s\Big(\frac{\gamma}{1-\gamma}\Big)^{s}\sum_{\lambda}a_{\lambda\mu}\prod_{i=2}^{m}\frac{(1-\gamma^{i-1})^{k_i}}{k_i!},$$

où μ est la partition (constante) $\mu = (1^{n_1}2^{n_2}\cdots m^{n_m})$ et où la seconde sommation est faite sur toutes les partitions $\lambda = (1^0 2^{k_2}\cdots m^{k_m})$ de l'entier $(n_1+\cdots+n_m)$ satisfaisant à $k_2+\cdots+k_m=s$.

Démonstration. — On développe le membre de droite de (2.10) à l'aide de la formule binomiale, puis à l'aide de la formule multinomiale. On obtient :

$$\begin{aligned}&[1-\gamma e_2-\gamma(1+\gamma)e_3-\cdots-\gamma(1+\gamma+\cdots+\gamma^{m-2})e_m]^{-\beta}\\&\quad=\sum_s\frac{(\beta)_s}{s!}\frac{\gamma^s}{(1-\gamma)^s}\sum\frac{s!}{k_2!k_3!\cdots k_m!}\prod_{i=2}^m(1-\gamma^{i-1})^{k_i}e_\lambda,\end{aligned}$$

où $k_2+\cdots+k_m=s$ et $\lambda=(1^0 2^{k_2}\cdots m^{k_m})$. On exprime ensuite les e_λ en termes des fonctions symétriques monomiales $\sum x^\mu$ et l'on identifie avec le premier membre de l'identité (2.10). □

Lorsque $m=3$, la formule (2.13) se spécialise en une formule apparaissant comme une *β-extension* de l'identité de Pfaff-Saalschütz (voir § 2.5, PROPOSITION 3).

2.3. Partitions colorées. — Considérons de nouveau l'ensemble $C_{\mathbf{n}}$ associé à la suite $\mathbf{n}=(n_1,\ldots,n_m)$ de m entiers positifs. Comme déjà dit dans l'introduction, une partition π de $C_{\mathbf{n}}$ est dite *partition colorée*, si chaque bloc de π est constitué seulement par des éléments de couleurs différentes. Notons $\mathcal{PC}(\mathbf{n})$ (resp. $\mathcal{PCS}(\mathbf{n})$) l'ensemble des partitions colorées (resp. partitions colorées sans points isolés) de $C_{\mathbf{n}}$ et introduisons pour chaque partition colorée π de $C_{\mathbf{n}}$ le poids :

$$\nu(\pi)=a^{\operatorname{bloc}\pi}.$$

Les polynômes générateurs de $\mathcal{PC}(\mathbf{n})$ et $\mathcal{PCS}(\mathbf{n})$ sont définis respectivement par :

$$\begin{aligned}PC(\mathbf{n};a)&=\sum_\pi\nu(\pi)\qquad(\pi\in\mathcal{PC}(\mathbf{n})),\\PCS(\mathbf{n};a)&=\sum_\pi\nu(\pi)\qquad(\pi\in\mathcal{PCS}(\mathbf{n})).\end{aligned}$$

A l'aide du LEMME 3, on peut donner des formules explicites pour les fonctions génératrices de ces deux polynômes.

THÉORÈME 2. — *On a les identités :*

$$\sum_{\mathbf{n}}\frac{x_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{x_m^{n_m}}{n_m!}PC(\mathbf{n};a)=\exp(ae_1+\cdots+ae_m);\tag{2.14}$$

$$\sum_{\mathbf{n}}\frac{x_1^{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{x_m^{n_m}}{n_m!}PCS(\mathbf{n};a)=\exp(ae_2+\cdots+ae_m);\tag{2.15}$$

où les sommations sont faites sur toutes les suites $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ *de* m *entiers positifs.*

Démonstration. — Pour chaque partition π de $[n]$ et chaque application φ de $[n]$ dans $[m]$, on définit :

$$\theta(\pi, \varphi) = \begin{cases} 1, & \text{si la restriction de } \varphi \text{ à chaque bloc de } \pi \text{ est injective;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application θ permet d'introduire pour chaque $\pi \in \Pi[n]$ le poids comme suit :

$$\mu(\pi) = \sum_{\varphi:[n]\to[m]} \theta(\pi, \varphi) a^{\text{bloc}\,\pi} \prod_{i=1}^{n} x_{\varphi(i)}.$$

On vérifie facilement que μ est une application multiplicative. Ceci revient à dire que $\mu(\pi)$ est le produit de tous les poids des blocs. Par ailleurs, pour toute suite $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ de m entiers positifs de somme n, posons

$$\nu\{\Pi[n]\} = \sum_{\pi} \theta(\pi, \chi) a^{\text{bloc}\,\pi} \qquad (\pi \in \Pi[n]);$$
$$\nu\{S[n]\} = \sum_{\pi} \theta(\pi, \chi) a^{\text{bloc}\,\pi} \qquad (\pi \in S[n]);$$

où χ est le m-coloriage de $[n]$ associé à la suite $\mathbf{n}$. On vérifie également :

$$\mu\{\Pi[n]\} = \sum_{\mathbf{n}} \frac{n!}{n_1! \cdots n_m!} x_1^{n_1} \cdots x_1^{n_m} \nu\{\Pi[n]\}\,; \tag{2.16}$$

$$\mu\{S[n]\} = \sum_{\mathbf{n}} \frac{n!}{n_1! \cdots n_m!} x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m} \nu\{S[n]\}\,; \tag{2.17}$$

où les sommations de droite sont faites sur toutes les suites $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ de m entiers positifs de somme n. En substituant (2.16) et (2.17) dans (2.6) et en faisant $u = 1$, on obtient

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{x_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{x_m^{n_m}}{n_m!} \nu\{\Pi[n_1 + \cdots + n_m]\}$$
$$= \exp \sum_{\mathbf{n}} \frac{x_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{x_m^{n_m}}{n_m!} \nu\{S[n_1 + \cdots + n_m]\}\,;$$

où la sommation de gauche (resp. droite) est faite sur toutes les suites $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ de m entiers positifs (resp. de somme ≥ 1). On remarque d'abord : $\nu\{\Pi[n_1 + \cdots + n_m]\} = PC(\mathbf{n}; a)$; d'autre part,

$\nu\{S[n_1+\cdots+n_m]\}=0$ sauf si tous les n_i valent 0 ou 1, il en résulte : $\nu\{S[n_1+\cdots+n_m]\}=a\sigma_1+\cdots+a\sigma_m$. Ce qui établit (2.14).

On démontre l'identité (2.15) de façon analogue. Il suffit de prendre pour θ les valeurs suivantes :

$$\theta(\pi,\varphi)=\begin{cases}1, & \text{si } \pi \text{ n'a pas de point isolé}\\ & \text{et si la restriction de } \varphi \text{ à chaque bloc de } \pi \text{ est injective;}\\ 0, & \text{dans le cas contraire.} \quad \square\end{cases}$$

A l'aide du THÉORÈME 2, on peut donner une formule explicite du polynôme générateur $PC(\mathbf{n};a)$.

COROLLAIRE 4. — *On a l'identité :*

$$PC(\mathbf{n};a)=(-1)^{n_1+\cdots+n_m}e^{-a}\sum_{k\geq 0}\prod_{i=1}^{m}(-k)_{n_i}\frac{a^k}{k!}. \tag{2.18}$$

Remarque. — Lorsque tous les n_i sont égaux à 1, la formule (2.18) se réduit à une formule due à TOUCHARD (*cf.* [To]); si, de plus, $a=1$, le polynôme $PC(\mathbf{n};a)$ devient le nombre de Bell. On retrouve ainsi une formule bien connue due à DOBINSKI (*cf.* [Do]).

Démonstration. — Il suffit de vérifier que le membre de droite de (2.18) satisfait la même fonction génératrice (2.14) de $PC(\mathbf{n};a)$. Ceci est évident en appliquant la formule binomiale. $\square$

2.4. Relations entre polynômes générateurs de permutations et de partitions. — On se propose ici de trouver des relations simples entre les polynômes $D(\mathbf{n};\beta,\gamma)$ et $P(\mathbf{n};\beta,\gamma)$. Le théorème suivant joue un rôle important dans l'interprétation des $\mathcal{M}(\mathbf{n};\beta,c)$ et $\mathcal{K}(\mathbf{n};N,p)$. Pour chaque ensemble $C_{\mathbf{n}}$ associé à la suite $\mathbf{n}=(n_1,\cdots,n_m)$, on pose

$$A_i=\{(i,j): n_1+\cdots+n_{i-1}+1\leq j\leq n_1+\cdots+n_i\}$$

pour $i=1,\ldots,m$, qui est le sous-ensemble des éléments de couleur i de $C_{\mathbf{n}}$. Soit π une permutation de $C_{\mathbf{n}}$, $(\chi(j),j)$ est dit *point fixe* de π si $\chi(j)=\chi(\pi(j))$. On désigne par $\mathrm{Fix}\,\pi$ l'ensemble des points fixes de π. On établit d'abord le lemme suivant.

LEMME 4. — *Soient $T\subseteq C_{\mathbf{n}}$ et $|T\bigcap A_i|=n_i-k_i, i=1,\ldots,m$, on a alors*

$$\sum_{\mathrm{Fix}\,\pi\supseteq T}w(\pi)=P(\mathbf{k};\beta,\gamma)\prod_{i=1}^{m}(\beta+k_i)_{n_i-k_i}. \tag{2.19}$$

Remarque. — Ce lemme est déja donné par FOATA et ZEILBERGER lorsque $\gamma = 1$ ([Fo-Ze]). La démonstration donnée ici est essentiellement la même que celle donnée par ces auteurs.

Démonstration. — Posons $T_i = T \cap A_i$ pour $i = 1, \ldots, m$. D'après le LEMME 1, le membre de droite de (2.19) est la fonction génératrice du produit $\mathcal{P}(\mathbf{k}) \times \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Inj}(T_i, A_i)$ par le poids w. Donc pour démontrer le lemme, il suffit d'établir une bijection $\pi \to (\sigma, \pi_1, \ldots, \pi_m)$, conservant le poids,de $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ sur ce produit. Pour cet effet, on part d'une permutation π de $C_{\mathbf{n}}$, fixant tous les éléments de T. On écrit π sous forme de produit de cycles et l'on enlève tous les éléments de T dans chaque cycle. Ce qui reste est alors une permutation de $C_{\mathbf{n}} \setminus T$ écrite en produit de cycles. Evidemment, σ a les mêmes excédances de π. On définit ensuite π_i par la restriction de π sur T_i, qui est évidemment une injection de T_i dans A_i. On voit facilement que le nombre totale de cycles de $\sigma, \pi_1, \ldots, \pi_m$ est égal à $\operatorname{cyc} \pi$. D'autre part, l'application inverse peut se construire immédiatement. $\square$

A l'aide du LEMME 4, on démontre le théorème suivant.

THÉORÈME 3. — *On a l'identité*

$$\text{(2.20)} \quad D(\mathbf{n}; \beta, \gamma) = \sum_{k_1 \geq 0} \cdots \sum_{k_m \geq 0} P(\mathbf{k}; \beta, \gamma) \prod_{i=1}^{m} (-1)^{n_i - k_i} \binom{n_i}{k_i} (\beta + k_i)_{n_i - k_i}.$$

Démonstration. — D'après le principe d'inclusion-exclusion, on obtient immédiatement

$$D(\mathbf{n}; \beta, \gamma) = \sum_{T \subseteq C_{\mathbf{n}}} (-1)^{|T|} \sum_{\mathrm{Fix}\, \pi \supseteq T} w(\pi).$$

Par ailleurs, d'après le lemme précédent, pour tout sous-ensemble T de $C_{\mathbf{n}}$ tel que $|T \cap A_i| = n_i - k_i$ $(i = 1, \cdots, m)$, on a

$$(-1)^{|T|} \sum_{\mathrm{Fix}\, \pi \supseteq T} w(\pi) (\beta + k_i)_{n_i - k_i}.$$

Il y a évidemment $\prod_{i=1}^{m} \binom{n_i}{k_i}$ de tels sous-ensembles. D'où il résulte (2.20). $\square$

Remarque. — Au lieu d'utiliser le principe d'inclusion-exclusion, l'identité (2.20) peut s'établir d'une façon "plus combinatoire", à savoir, construisant une involution sur un ensemble adéquat avec un poids approprié associé à chaque élément. On peut se reporter à l'article de FOATA et ZEILBERGER [Fo-Ze1] pour cette démonstration lorsque $r = 1$. Enfin, on peut aussi démontrer (2.20) en identifiant les fonctions génératrices de ses deux membres. Il suffit, en fait, de remplacer $P(\mathbf{k};\beta,\gamma)$ par la formule (2.12) et d'utiliser la formule (2.9).

On a de même une évaluation analogue pour les polynômes générateurs de partitions. Le théorème suivant établit une relation entre les polynômes $PCS(\mathbf{n};a)$ et $PC(\mathbf{n};a)$. On peut le considérer comme l'analogue du THÉORÈME 3 dans le contexte des partitions colorées.

THÉORÈME 4. — *On a l'identité :*

$$PCS(\mathbf{n};a) = \sum_{k_1\geq 0}\cdots\sum_{k_m\geq 0} PC(\mathbf{k};a)\prod_{i=1}^{m}(-1)^{n_i-k_i}\binom{n_i}{k_i}a^{n_i-k_i} \tag{2.21}$$

Démonstration. — La démonstration de ce théorème est tout à fait semblable à celle du THÉORÈME 3, à ceci près que nous devons remplacer les termes *permutations* par *partitions colorées* et *points fixes* par *points isolés*. Nous nous dispensons donc de la reproduire ici. $\square$

Comme signalé dans la remarque précédente, on peut aussi démontrer (2.21) en identifiant les fonctions génératrices des deux membres.

2.5. Évaluation de polynômes générateurs pour certains cas particuliers. — Lorsqu'on se restreint aux suites $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, les polynômes $PCS(\mathbf{n};a)$ et $D(\mathbf{n};\beta,\gamma)$ prennent des formes remarquables données dans les propositions suivantes.

PROPOSITION 1. — *On a l'identité :*

$$\begin{aligned} PCS(n_1,n_2,n_3;a) \\ &= \sum_{s\geq 0}\frac{n_1!n_2!n_3!a^s}{(s-n_1)!(s-n_2)!(s-n_3)!(n_1+n_2+n_3-2s)!}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Démonstration. — On développe les fonctions symétriques élémentaires e_1, e_2, e_3 en les x_i, puis on identifie les coéficients des monômes $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$ dans les deux membres de (2.15). $\square$

PROPOSITION 2. — *On a l'identité :*

$$\begin{aligned} D(n_1,n_2,n_3;\beta,\gamma) \\ &= \sum_{s\geq 0}\frac{n_1!\,n_2!\,n_3!\,(1+\gamma)^{n_1+n_2+n_3-2s}}{(s-n_1)!(s-n_2)!(s-n_3)!(n_1+n_2+n_3-2s)!}\gamma^s(\beta)_s. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Remarque. — On note qu'en faisant $\beta = 1$ dans l'identité précédente, le calcul du membre de gauche devient évident, à savoir

$$n_1!\,n_2!\,n_3! \sum_s \binom{n_1}{s-n_2}\binom{n_2}{s-n_3}\binom{n_3}{s-n_1}\gamma^s,$$

et on retrouve la formule classique de Pfaff-Saalschütz (*cf.* [Bai]) suivante :

$$\sum_{s\geq 0} \binom{n_1}{s-n_2}\binom{n_2}{s-n_3}\binom{n_3}{s-n_1}\gamma^s$$
$$= \sum_{s\geq 0} \frac{s!\,(1+\gamma)^{n_1+n_2+n_3-2s}\gamma^s}{(s-n_1)!\,(s-n_2)!\,(s-n_3)!\,(n_1+n_2+n_3-2s)!}.$$

C'est exactement sous cette forme que GOOD [Go] avait donné sa version de la formule de Pfaff-Saalschütz en appliquant le "Master Theorem" de MacMahon et que FOATA [Fo1] l'avait démontrée combinatoirement.

Remarque. — Les deux propositions 1 et 2 peuvent être aussi établies de façon authentiquement combinatoire. Cette approche fait l'objet d'un article séparé [Ze].

Démonstration. — Lorsque $m = 3$, la seconde sommation dans le membre de droite de (2.13) se réduit à une seule partition

$$\lambda = (2^{3s-n_1-n_2-n_3}3^{n_1+n_2+n_3-2s}).$$

D'autre part, le calcul de $a_{\lambda\mu}$ (avec $\mu = (1^{n_1}2^{n_2}3^{n_3})$) est facile. On trouve bien

$$a_{\lambda\mu} = \frac{(3s-n_1-n_2-n_3)!}{(s-n_1)!(s-n_2)!(s-n_3)!}. \quad \square$$

COROLLAIRE 5. — *Lorsque $n_3 = 0$, on a :*

$$D(n_1,n_2;\beta,\gamma) = n_1!\,\gamma^{n_1}(\beta)_{n_1}\delta_{n_1n_2}; \tag{2.24}$$

$$PCS(n_1,n_2;a) = n_1!\,a^{n_1}\delta_{n_1n_2}. \tag{2.25}$$

Ces deux identités, qui sont immédiates à partir de (2.22) et de (2.23), serviront à (re)démontrer les propriétés d'orthogonalité des polynômes de Meixner, Krawtchouk, d'une part, et de Charlier, d'autre part.

Notons, enfin, les évaluations de $D(\mathbf{n};\beta,\gamma)$ et $PCS(\mathbf{n};a)$ dans le cas m quelconque, mais $n_1 \geq n_2 + \cdots + n_m$.

PROPOSITION 3. — *On a :*

$$D(\mathbf{n};\beta,\gamma)=\begin{cases} n_1!\,\gamma^{n_1}(\beta)_{n_1}, & si\ n_1=n_2+\cdots+n_m\,; \\ 0, & si\ n_1>n_2+\cdots+n_m. \end{cases} \tag{2.26}$$

$$PCS(\mathbf{n};a)=\begin{cases} n_1!\,a^{n_1}, & si\ n_1=n_2+\cdots+n_m\,; \\ 0, & si\ n_1>n_2+\cdots+n_m. \end{cases} \tag{2.27}$$

Démonstration. — Il n'existe pas de dérangements colorés lorsque $n_1>n_2+\cdots+n_m$. Lorsqu'on a l'égalité, chaque dérangement coloré π détermine, de façon unique, un ensemble S_π de n_1 *arcs* :

$$[x\to\pi(x)]\qquad (x=(1,1),\ldots,(1,n_1)),$$

ayant chacun une excédance et une permutation π' de S_π donnée par

$$\pi':[x\to\pi(x)]\mapsto[\pi^2(x)\to\pi(\pi^2(x))]\qquad (x=(1,1),\ldots,(1,n_1)).$$

On remarque, par ailleurs, que π' a le même nombre de cycles que π. Cette application est évidemment bijective. La formule $n_1!\,(\beta)_{n_1}\gamma^{n_1}$ compte donc d'abord le nombre de façons de construire n_1 arcs, puis le nombre de permutations de ces arcs suivant le nombre de cycles, enfin impose une excédence à chaque arc. La formule (2.27) est évidente. $\square$

Remarque. — Lorsque $m=2$, on retrouve le COROLLAIRE 5.

3. Polynômes orthogonaux

3.1. Polynômes de Meixner. — On est prêt maintenant à interpréter la fonctionnelle $\mathcal{M}(\mathbf{n};\beta,c)$ définie en (1.4). On rappelle que $D(\mathbf{n};\beta,\gamma)$ est le polynôme générateur introduit en (2.4).

THÉORÈME 5. — *On a :*

$$\mathcal{M}(\mathbf{n};\beta,c)=D(\mathbf{n};\beta,c^{-1}). \tag{3.1}$$

Remarque. — Dans le cas $\beta=1$, cette identité a été démontrée par ASKEY et ISMAIL [As-Is].

Démonstration. — Dans (1.4) développant chaque polynôme de Meixner par la formule (1.1), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mathbf{n};\beta,c) \\ =\sum_{k_1\ge0}\cdots\sum_{k_m\ge0}F(\mathbf{k};\beta,c)\prod_{i=1}^{m}(-1)^{n_i-k_i}\binom{n_i}{k_i}(\beta+k_i)_{n_i-k_i},\end{aligned} \tag{3.2}$$

où

$$F(\mathbf{k};\beta,c)=(1-c)^{\beta}(1-c^{-1})^{k_1+\cdots+k_m}\sum_{k\geq 0}\prod_{i=1}^{m}(-k)_{k_i}\frac{c^k(\beta)_k}{k!}.$$

D'après le COROLLAIRE 1, on a

$$F(\mathbf{k};\beta,c)=P(\mathbf{k};\beta,c^{-1}).$$

Appliquant alors le THÉORÈME 2, on obtient bien (3.1). □

D'après ce théorème, $\mathcal{M}(\mathbf{n};\beta,c)$ est un polynôme de variables β et c^{-1} à coefficients entiers positifs; donc la positivité de $\mathcal{M}(\mathbf{n};\beta,c)$ lorsque $\beta\geq 0$ et $0<c<1$ devient évidente :

COROLLAIRE 6. — *Soient $\beta\geq 0$ et $0<c<1$, on a :*

$$\mathcal{M}(\mathbf{n};\beta,c)\geq 0.$$

En appliquant les propositions données dans la section 2.5, on obtient les corollaires suivants :

COROLLAIRE 7 (Linéarisation). — *On a :*

$$\mathcal{M}(n_1,n_2,n_3;\beta,c)=\sum_{s\geq 0}\frac{n_1!\,n_2!\,n_3!\,(1+c^{-1})^{n_1+n_2+n_3-2s}}{(s-n_1)!\,(s-n_2)!\,(s-n_3)!\,(n_1+n_2+n_3-2s)!}c^{-s}(\beta)_s. \tag{3.3}$$

Remarque. — L'identité (3.3) est déja donnée par ASKEY et GASPER [As-Ga] sous une forme équivalente (c'est-à-dire à une constante près).

COROLLAIRE 8 (Orthogonalité). — *On a :*

$$\mathcal{M}(n_1,n_2;\beta,c)=n_1c^{-n_1}(\beta)_{n_1}\delta_{n_1n_2}. \tag{3.4}$$

COROLLAIRE 9. — *On a :*

$$\mathcal{M}(\mathbf{n};\beta,c)=\begin{cases}n_1!\,c^{-n_1}(\beta)_{n_1}, & \textit{si } n_1=n_2+\cdots+n_m\,;\\ 0, & \textit{si } n_1>n_2+\cdots+n_m.\end{cases} \tag{3.5}$$

3.2. Polynômes de Krawtchouk. — L'interprétation de la fonctionnelle $\mathcal{K}(\mathbf{n};N,p)$ définie en (1.5) relève du même modèle que celui utilisé pour $\mathcal{M}(\mathbf{n};\beta,c)$.

THÉORÈME 6. — *On a :*

$$\mathcal{K}(\mathbf{n}; N, p) = D(\mathbf{n}; -N, 1 - 1/p). \tag{3.6}$$

Démonstration. — Dans (1.5) développant chaque polynôme de Krawtchouk par la formule (1.2), on obtient

$$\begin{aligned}(3.7)\quad & \mathcal{K}(\mathbf{n}; N, p) \\ &= \sum_{k_1 \geq 0} \cdots \sum_{k_m \geq 0} G(\mathbf{k}; N, p) \prod_{i=1}^{m} (-1)^{n_i - k_i} \binom{n_i}{k_i} (-N + k_i)_{n_i - k_i},\end{aligned}$$

où

$$G(\mathbf{k}; N, p) = p^{-k_1 - \cdots - k_m} \sum_{k \geq 0} \prod_{i=1}^{m} (-k)_{k_i} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

A l'aide du COROLLAIRE 1, on vérifie facilement que l'on a :

$$G(\mathbf{k}; N, p) = P(\mathbf{k}; -N, 1 - 1/p).$$

Appliquant alors le THÉORÈME 3, on obtient bien (3.6). □

Le THÉORÈME 6 affirme que $\mathcal{K}(\mathbf{n}; N, p)$ est un polynôme en les variables $(-N)$ et $(1 - 1/p)$ à coefficients entiers positifs, mais cette fois-ci l'interprétation de $\mathcal{K}(\mathbf{n}; N, p)$ ne donne pas d'information sur son signe immédiatement. En fait, il y a deux cas à considérer, comme nous allons l'indiquer après l'énoncé du prochain corollaire. Celui-ci donne une formule nouvelle de la fonctionnelle $\mathcal{K}(\mathbf{n}; N, p)$ dans le cas $\mathbf{n}$ quelconque.

COROLLAIRE 10. — *On a :*

$$\begin{aligned}(3.8)\quad & \mathcal{K}(\mathbf{n}; N, p) \\ &= \prod_{i=1}^{m} n_i! \sum_{s \geq 0} (-N)_s (p-1)^s \sum_{\lambda} a_{\lambda\mu} \prod_{i=2}^{m} \frac{(1 - (1 - 1/p)^{i-1})^{k_i}}{k_i!},\end{aligned}$$

où μ est la partition (constante) $\mu = (1^{n_1} 2^{n_2} \ldots m^{n_m})$, où λ varie dans l'ensemble des partitions $(1^0 2^{k_2} \ldots m^{k_m})$ de l'entier $(n_1 + \cdots + n_m)$ satisfaisant $k_2 + \cdots + k_m = s$ et où $a_{\lambda\mu}$ est donné par $e_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu} \sum x^\mu$.

Démonstration. — On reporte (3.6) dans (2.13) et on trouve bien (3.8). □

COROLLAIRE 11. — *On a les deux inégalités :*

$$\mathcal{K}(\mathbf{n}; N, p) \geq 0, \qquad \frac{1}{2} \leq p < 1; \tag{3.9}$$

$$(-1)^n \mathcal{K}(\mathbf{n}; N, p) \geq 0, \qquad 0 < p < \frac{1}{2}; \tag{3.10}$$

où n désigne la somme des entiers n_1, n_2 et n_3.

Remarque. — L'approche de DUNKL-RAMIREZ [Du-Ra] en termes de caractères de groupes n'a permis à ces auteurs que d'obtenir l'identité (3.8) dans le cas $m = 3$ et pour $(1/2) \leq p < 1$. Ils n'ont donc pu établir que (3.9) toujours dans le cas $m = 3$.

Démonstration. — Ces inégalités sont une conséquence de l'identité (3.8). D'abord le facteur $(-N)_s(p-1)^s$ est toujours positif pour $0 < p < 1$. Ensuite, lorsque $(1/2) \leq p < 1$, on a $-1 \leq 1-(1/p) < 0$ et tous les termes du membre de droite de (3.8) sont positifs.

Lorsque $0 < p < 1/2$, on a $1 - (1/p) < -1$. Par conséquent, le signe de $\prod_{i=2}^{m}(1-(1-1/p)^{i-1})^{k_i}$ est égal à $(-1)^{s(m)}$, où $s(m)$ est la somme des k_i avec i *impair.* Comme $2k_2 + \cdots + mk_m = n_1 + \cdots + n_m$, on a :

$$s(m) \equiv n_1 + \cdots + n_m \pmod 2,$$

qui est indépendant de λ. On en tire immédiatement (3.10). □

Les corollaires suivants sont des conséquences immédiates des propositions correspondantes établies dans la section 2.5.

COROLLAIRE 12 (Linéarisation). — *On a :*

$$\mathcal{K}(n_1, n_2, n_3; N, p) = \sum_{s \geq 0} \frac{n_1!\, n_2!\, n_3!\, (2 - 1/p)^{n_1+n_2+n_3-2s}(1 - 1/p)^s}{(s - n_1)!\, (s - n_2)!\, (s - n_3)!\, (n_1 + n_2 + n_3 - 2s)!}(-N)_s.$$

Remarque. — On doit à EAGLESON [Ea] d'avoir calculé la fonction génératrice des $\mathcal{K}(n_1, n_2, n_3; N, p)$ et à ASKEY et GASPER [As-Ga], d'avoir su déduire du calcul d'EAGLESON l'identité du COROLLAIRE 12.

COROLLAIRE 13 (Orthogonalité). — *On a :*

$$\mathcal{K}(n_1, n_2; N, p) = n_1!\,(1 - (1/p))^{n_1}(-N)_{n_1}\delta_{n_1 n_2}.$$

COROLLAIRE 14. — *On a :*

$$\mathcal{K}(\mathbf{n}; N, p) = \begin{cases} n_1!\,(1 - 1/p)^{n_1}(-N)_{n_1}, & si\ n_1 = n_2 + \cdots + n_m\,; \\ 0, & si\ n_1 > n_2 + \cdots n_m. \end{cases}$$

3.3. Polynômes de Charlier. — L'interprétation de la fonctionnelle $\mathcal{C}(\mathbf{n}; a)$, qui est définie en (1.6), est liée à la notion de *partition colorée.*

On rappelle ici que $PCS(\mathbf{n};a)$ est le polynôme générateur des partitions colorées sans points fixes introduit dans la section 2.3.

THÉORÈME 7. — *On a :*

$$\mathcal{C}(\mathbf{n};a) = PCS(\mathbf{n};a). \tag{3.11}$$

Démonstration. — Dans (1.6) développons chaque polynôme de Charlier par la formule (1.3) ; on obtient

$$\mathcal{C}(\mathbf{n};a) = \sum_{k_1\geq 0}\cdots\sum_{k_m\geq 0} T(\mathbf{k};a)\prod_{i=1}^{m}(-1)^{n_i-k_i}\binom{n_i}{k_i}a^{n_i-k_i},$$

où

$$T(\mathbf{k};a) = (-1)^{k_1+\cdots+k_m}e^{-a}\sum_{k\geq 0}\prod_{i=1}^{m}(-k)_{k_i}a^k/k!.$$

Par ailleurs, d'après le COROLLAIRE 4, on a

$$T(\mathbf{k};a) = PC(\mathbf{k};a).$$

Appliquant alors le THÉORÈME 4, on trouve bien (3.11). $\square$

Le THÉORÈME 7 montre que $\mathcal{C}(\mathbf{n};a)$ est un polynôme en la variable a, à coefficients entiers positifs. La positivité de $\mathcal{C}(\mathbf{n};a)$ devient alors évidente lorsque $a>0$.

COROLLAIRE 15. — *Soit $a>0$, on a :*

$$\mathcal{C}(\mathbf{n};a)\geq 0.$$

Les corollaires suivants sont des conséquences immédiates des propositions correspondantes établies dans la section 2.5.

COROLLAIRE 16 (Linéarisation). — *On a :*

$$\mathcal{C}(n_1,n_2,n_3;a) = \sum_{s\geq 0}\frac{n_1!\,n_2!\,n_3!\,a^s}{(s-n_1)!\,(s-n_2)!\,(s-n_3)!\,(n_1+n_2+n_3-2s)!}.$$

COROLLAIRE 17 (Orthogonalité). — *On a :*

$$\mathcal{C}(n_1,n_2;a) = n_1!\,a^{n_1}\delta_{n_1n_2}.$$

COROLLAIRE 18. — *On a :*

$$\mathcal{C}(\mathbf{n};a) = \begin{cases} n_1!\,a^{n_1}, & si\ n_1 = n_2+\cdots+n_m\,;\\ 0, & si\ n_1 > n_2+\cdots+n_m.\end{cases}$$

4. Passage aux limites entre les fonctionnelles

On se rappelle que le tableu d'ASKEY [As-Wi], détaillé par LABELLE [La], classe les polynômes orthogonaux classiques d'après leur hiérarchie hypergéométrique. Nous reproduisons dans le tableau 1 la partie située au-dessous des polynômes de Krawtchouk et Meixner.

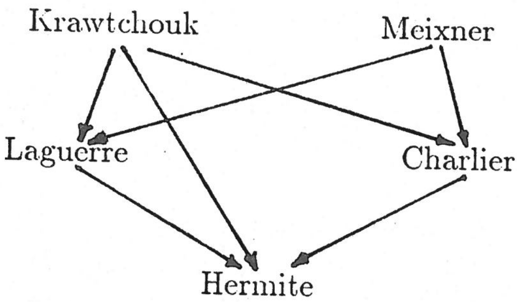

Tableau 1

Une flèche va du polynôme P au polynôme Q, si l'expression analytique de Q peut être obtenue de celle de P par un passage à la limite approprié. Par exemple, nous avons

$$2^n n! \lim_{\beta\to\infty} \beta^{-n} L_n^{(\beta^2/2)}(\beta^2/2 - \beta x) = H_n(x), \tag{4.1}$$

où $H_n(x)(n \geq 0)$ sont les polynômes d'Hermite définis comme suit :

$$\sum_{n\geq 0} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \exp(2xt - 2t^2), \tag{4.2}$$

ou

$$H_n(x) = n! \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{(n-2k)!k!}, \quad (n \geq 0). \tag{4.3}$$

Rappelons que les polynômes de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ sont définis par

$$\sum_{n\geq 0} L_n^{(\alpha)}(x) u^n = (1-u)^{-\alpha-1} \exp\frac{-xu}{1-u}, \tag{4.4}$$

ou

$$n! L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} (\alpha+1+k)_{n-k} x^k, \quad (n \geq 0). \tag{4.5}$$

Comme signalé par FOATA [Fo], les interprétations combinatoires des polynômes apparaissant dans le diagramme précédent sont connues et compatibles, en ce sens que toutes les formules de passage ont des démonstrations simples dans la géométrie de ces modèles.

Introduisons maintenant les fonctionnelles des polynômes de Laguerre et d'Hermite :

$$\mathcal{L}(\mathbf{n};\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\prod_{i=1}^{m}(-1)^{n_i} n_i!\right)\int_0^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{m} L_{n_i}^{(\alpha)}(x)\right)x^{\alpha}e^{-x}\,dx\,; \tag{4.6}$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{n}) = (2^{n_1+\cdots+n_m}\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{m} H_{n_i}(x)\right)e^{-x^2}\,dx. \tag{4.7}$$

Les interprétations combinatoires de ces deux fonctionnelles sont déja données respectivement par FOATA et ZEILBERGER [Fo-Zel] et AZOR, GILLIS et VICTOR [Az-Gi-Vi]. On se propose ici de redémontrer d'abord l'interprétation combinatoire de $\mathcal{L}(\mathbf{n};\alpha)$ à partir de celle de $\mathcal{M}(\mathbf{n};\beta,\gamma)$ et l'interprétation de $\mathcal{H}(\mathbf{n})$ à partir de celle de $\mathcal{L}(\mathbf{n};\alpha)$. On démontre aussi que les interprétations combinatoires des fonctionnelles des polynômes apparaissant dans le diagramme sont compatibles dans le même sens que ci-dessus.

THÉORÈME 8 (Foata-Zeilberger). — *On a :*

$$\mathcal{L}(\mathbf{n};\alpha) = \mathcal{D}(\mathbf{n};\alpha+1,1). \tag{4.8}$$

Démonstration. — Dans (4.6) développant chaque polynôme de Laguerre $L_{n_i}^{(\alpha)}(x)$ par (4.5) et intégrant terme par terme en utilisant le fait que $(1/\Gamma(\alpha+1)\int_0^{\infty}e^{-x}x^{n+\alpha}dx = (\alpha+1)_n$ (*cf.* [Fo-Ze]), on obtient

$$\begin{aligned}(4.9)\quad &\mathcal{L}(\mathbf{n};\alpha)\\ &= \sum_{k_1\ge 0}\cdots\sum_{k_m\ge 0}(\alpha+1)_{k_1+\cdots+k_m}\prod_{i=1}^{m}(-1)^{n_i-k_i}\binom{n_i}{k_i}(\alpha+1+k_i)_{n_i-k_i}.\end{aligned}$$

En comparant (4.10) avec (3.2) et en appliquant le COROLLAIRE 2, on a immédiatement :

$$\mathcal{L}(\mathbf{n};\alpha) = \lim_{c\to 1}\mathcal{M}(\mathbf{n};\alpha+1,c). \tag{4.10}$$

D'autre part, l'identité $\mathcal{D}(\mathbf{n};\alpha+1,1) = \lim_{c\to 1}\mathcal{D}(\mathbf{n};\alpha+1,c^{-1})$ est évidente. En appliquant le THÉORÈME 5, on a (4.8). $\square$

On appelle *involution dérangée* toute involution de $C_{\mathbf{n}}$, qui est en même temps un dérangement de $C_{\mathbf{n}}$. On désigne par $\mathrm{Invd}(\mathbf{n})$ l'ensemble des involutions dérangées de $C_{\mathbf{n}}$.

THÉORÈME 9 (Azor-Gillis-Victor). — *On a :*

$$\mathcal{H}(\mathbf{n}) = |\mathrm{Invd}(\mathbf{n})|. \tag{4.12}$$

Démonstration. — C'est un exercice élémentaire d'analyse de vérifier

$$\lim_{\beta\to\infty} (\sqrt{2}\beta^{-1})^{n_1+\cdots+n_m}\mathcal{L}(\mathbf{n};\beta^2/2) = (-1)^{n_1+\cdots+n_m}\mathcal{H}(\mathbf{n}), \tag{4.12}$$

à l'aide de (4.2). Par ailleurs, on a

$$(\sqrt{2}\beta^{-1})^{n_1+\cdots+n_m}\mathcal{D}(\mathbf{n};\beta^2/2+1,1) = \sum_{\pi\in\mathcal{D}(\mathbf{n})} (\beta^2/2+1)^{\mathrm{cyc}\,\pi}(\sqrt{2}\beta^{-1})^{n_1+\cdots+n_m},$$

lorsque β tend vers ∞, tous les termes de la somme tendent vers zéro, sauf ceux qui satisfont $2\mathrm{cyc}\,\pi = \sum_{i=1}^m n_i$, c'est-à-dire ceux qui correspondent aux involutions dérangées de $C_{\mathbf{n}}$; or ces termes tendent vers 1. Par conséquent, d'après le THÉORÈME 8, on a

$$(-1)^{n_1+\cdots+n_m}\mathcal{H}(\mathbf{n}) = |\mathrm{Invd}(\mathbf{n})|.$$

Comme il n'existe pas d'involution dérangée lorsque $n_1+\cdots+n_m$ est impaire, on a donc

$$\mathcal{H}(\mathbf{n}) = |\mathrm{Invd}(\mathbf{n})|. \quad \square$$

Les interprétations combinatoires (THÉORÈME 5, 6, 7, 8 et 9) des fonctionnelles définies dans cet article permettent de trouver facilement les passages au limite entre ces fonctionnelles.

THÉORÈME 10. — *On a :*

$$\lim_{c\to 1} \mathcal{M}(\mathbf{n};\alpha+1,c) = \mathcal{L}(\mathbf{n};\alpha)\,; \tag{4.13}$$

$$\lim_{\beta\to\infty} (a/\beta)^{n_1+\cdots+n_m}\mathcal{M}(\mathbf{n};\beta,a/\beta) = \mathcal{C}(\mathbf{n};a)\,; \tag{4.14}$$

$$\lim_{\beta\to\infty} (\sqrt{2}/\beta)^{n_1+\cdots+n_m}\mathcal{L}(\mathbf{n};\beta^2/2) = \mathcal{H}(\mathbf{n})\,; \tag{4.15}$$

$$\lim_{a\to\infty} (1/\sqrt{a})^{n_1+\cdots+n_m}\mathcal{C}(\mathbf{n};a) = \mathcal{H}(\mathbf{n})\,; \tag{4.16}$$

$$\lim_{N\to\infty} (-a/n)^{n_1+\cdots+n_m}\mathcal{K}(\mathbf{n};N,a/N) = \mathcal{C}(\mathbf{n};a)\,; \tag{4.17}$$

$$\lim_{N\to\infty} (1/\sqrt{N})^{n_1+\cdots+n_m}\mathcal{K}(\mathbf{n};N,1/2) = \mathcal{H}(\mathbf{n}). \tag{4.18}$$

Démonstration. — L'identité (4.13) (resp. (4.15)) est, en fait, déja démontrée dans la démonstration du THÉORÈME 8 (resp. 9), si l'on part d'abord de l'interprétation de (4.8) (resp. (4.11)). Les autres identités sont démontrées de la façon analogue, à l'aide de leurs interprétations. □

5. Appendice : quelques remarques sur le Corollaire 2

Dans la section 2.2, on a établi, de façon relativement élaborée, le résultat analytique suivant (COROLLAIRE 2) :

$$\text{(5.1)}\quad \lim_{\gamma\to 1}(1-\gamma)^{\beta}(1-\gamma)^{n_1+\cdots+n_m}\sum_{k\geq 0}\prod_{i=1}^{m}(-k)_{n_i}\frac{\gamma^{-k}(\beta)_k}{k!}=(\beta)_{n_1+\cdots+n_m},$$

où $n_1,\ldots,n_m$ sont m entiers positifs. Il est intéressant de transcrire ce résultat en termes de fonctions hypergéométriques et de voir si les identités classiques sur ces fonctions permettent de retrouver (5.1). Rappelons que si r et s sont deux entiers positifs, $(a_1,\ldots,a_r)$ et $(b_1,\ldots,b_s)$ sont deux suites de paramètres (réels ou complexes), la fonction hypergéométrique ${}_rF_s$ est donnée par (*cf.* [Bai]) :

$${}_rF_s\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_r\\ b_1,\ldots,b_s\end{matrix};x\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\cdots(b_s)_n}\frac{x^n}{n!}.$$

Prenons $n_1=\max\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}$ et récrivons le membre de droite de (5.1) à l'aide de ces fonctions. On obtient l'énoncé équivalent :

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma\to 1}\gamma^{n_2+\cdots+n_m}&(1-\gamma^{-1})^{\beta+n_1+\cdots+n_m}\frac{(n_1!)^{m-1}(\beta)_{n_1}}{\prod_{i=1}^{m}(n_1-n_i)!}\\ &\times{}_mF_{m-1}\left(\begin{matrix}\beta+n_1,n_1+1,\ldots,n_1+1\\ n_1-n_2+1,n_1-n_3+1,\ldots,n_1-n_m+1\end{matrix};\gamma^{-1}\right)\\ &=(\beta)_{n_1+\cdots+n_m}.\end{aligned}$$

Si l'on supprime le facteur $\lim_{\gamma\to 1}\gamma^{n_2+\cdots+n_m}=1$ et si l'on pose $x=\gamma^{-1}$, on est conduit à l'énoncé

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(1-x)^{\beta+n_1+\cdots+n_m}&\frac{(n_1!)^{m-1}(\beta)_{n_1}}{\prod_{i=1}^{m}(n_1-n_i)!}\\ &\times{}_mF_{m-1}\left(\begin{matrix}\beta+n_1,n_1+1,\ldots,n_1+1\\ n_1-n_2+1,n_1-n_3+1,\ldots,n_1-n_m+1\end{matrix};x\right)\\ &=(\beta)_{n_1+\cdots+n_m},\end{aligned}$$

ou, de façon équivalente, à :

$$
(5.2)\quad \lim_{x\to 1}(1-x)^{\beta+n_1+\cdots+n_m}
\times {}_mF_{m-1}\left(\begin{matrix}\beta+n_1, n_1+1,\ldots,n_1+1\\ n_1-n_2+1, n_1-n_3+1,\ldots,n_1-n_m+1\end{matrix};x\right)
= \frac{\prod_{i=1}^m (n_1-n_i)!}{(n_1!)^{m-1}(\beta)_{n_1}}(\beta)_{n_1+\cdots+n_m}\left(=\frac{(\beta+n_1)_{n_2+\cdots+n_m}}{\prod_{i=2}^m(n_1-n_i+1)_{n_i}}\right).
$$

Pour $m\le 2$, l'identité (5.2) peut être vérifiée directement à l'aide de la formule binomiale, d'Euler et de Gauss. Lorsque $m=1$, l'énoncé (5.2), avant le passage à la limite, se réduit à

$$
(1-x)^{\beta+n_1}{}_1F_0\left(\begin{matrix}\beta+n_1\\ -\end{matrix};x\right)=1,
$$

qui n'est autre que l'identité binomiale.

Pour $m=2$, on peut appliquer la tranformation d'Euler (*cf.* [Ba, p. 8]) à la fonction ${}_mF_{m-1}={}_2F_1$,

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta+n_1, n_1+1\\ n_1-n_2+1\end{matrix};x\right)=(1-x)^{-\beta-n_1-n_2}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n_2-\beta+1,-n_2\\ n_1-n_2+1\end{matrix};x\right).
$$

Le premier membre de (5.2) devient donc :

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n_2-\beta+1,-n_2\\ n_1-n_2+1\end{matrix};x\right).
$$

On peut alors appliquer la formule de Gauss (*cf.* [Ba, p. 6]) lorsque x tend vers 1.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n_2-\beta+1,-n_2\\ n_1-n_2+1\end{matrix};x\right) &= \frac{\Gamma(n_1-n_2+1)\,\Gamma(n_1+n_2+\beta)}{\Gamma(n_1+1)\,\Gamma(n_1+\beta)}\\
&= \frac{(n_1-n_2)!\,(\beta)_{n_1+n_2}}{n_1!\,(\beta)_{n_1}}.
\end{aligned}
$$

Ce qui établit (5.2) dans le cas $m=2$.

Comme les tranformations utilisées ci-dessus (binomiale, Euler, Gauss) n'ont pas de généralisations analogues dans le cas m quelconque, il semble qu'une transformation appropriée reste à trouver. En fait, on a seulement besoin de connaître une formule asymptotique pour la série ${}_mF_{m-1}$ ci-dessus lorsque x tend vers 1.

BIBLIOGRAPHIE

[As1] ASKEY (Richard). — Linearization of the product of orthogonal polynomials, *Problems in Analysis* (A symposium in honor of Salomon Bochner), [Robert C. Gunning, ed.], p. 131–138. — Princeton, Princeton Univ. Press, 1970.

[As2] ASKEY (Richard). — *Orthogonal and Special Functions.* — Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics (*CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics*, **21**), 1975.

[As-Ga] ASKEY (Richard) and GASPER (G.). — Convolution structures for Laguerre polynomials, *J. d'Anal. Math.*, t. **31**, 1977, p. 46–48.

[As-Is] ASKEY (Richard) and ISMAIL (Mourad E.H.). — Permutation problems and special functions, *Canad. J. Math.*, t. **28**, 1976, p. 853–874.

[As-Wi] ASKEY (Richard) et WILSON (J.A.). — *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials.* — Providence, Amer. Math. Soc., 1985 (*Memoirs Amer. Math. Soc.*, **318**).

[Az-Gi-Vi] AZOR (R.), GILLIS (J.) and VICTOR (J.D.). — Combinatorial application of Hermite polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, t. **13**, 1982, p. 879–890.

[Ba] BAILEY (W.N.). — *Generalized Hypergeometric Series.* — Cambridge Univ. Press, 1935.

[Ca-Fo] CARTIER (Pierre) et FOATA (Dominique). — *Problèmes combinatoires de permutations et réarrangements.* — Berlin, Springer-Verlag, 1969 (*Lecture Notes in Math.*, **85**).

[Ch] CHIHARA (T.S.). — *An introduction to orthogonal polynomials.* — New York, Gordon and Breach, 1978.

[Do] DOBINSKI (G.). — Summierung der Reihe $\sum n^m/n!$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$,, *Arch. für Math. und Physik*, t. **61**, 1877, p. 333–336.

[Du-Ra] DUNKL (C.F.) and RAMIREZ (D.E.). — Krawtchouk polynomials and the symmetrization of hypergroups, *SIAM J. Math. Anal.*, t. **5**, 1974, p. 351–366.

[Ea] EAGLESON (G.K.). — A characterization theorem for positive definite sequences on the Krawtchouk polynomials, *Austral. J. Statist.*, t. **11**, 1969, p. 29–38.

[Ev-Gi] EVEN (S.) and GILLIS (J.). — Derangements and Laguerre polynomials, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. **79**, 1976, p. 135–143.

[Fo1] FOATA (Dominique). — Étude algébrique de certains problèmes d'analyse combinatoire et du calcul des probabilités, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, t. **14**, 1965, p. 81–241.

[Fo2] FOATA (Dominique). — *La série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumération.* — Montréal, Presses de l'Université de Montréal, 1974.

[Fo3] FOATA (Dominique). — Combinatoire des identités sur les polynômes orthogonaux, *Proc. Intern. Congress of Math.* [Warsaw. Aug. 16–24, 1983], p. 1541–1553. — Varsovie, 1983.

[Fo-La] FOATA (Dominique) et LABELLE (Jacques). — Modèles combinatoires pour les polynômes de Meixner, *Europ. J. Combin.*, t. **4**, 1983, p. 305–311.

[Fo-Sch] FOATA (Dominique) et SCHÜTZENBERGER (Marcel-Paul). — *Théorie géométrique des polynômes eulériens.* — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Math.*, **138**).

[Fo-St] FOATA (Dominique) and STREHL (Volker). — Combinatorics of Laguerre polynomials, *Enumeration and Design* [Waterloo. June–July 1982 : D.M. Jackson and S.A. Vanstone, eds.], p. 123–140. — Toronto, Academic Press, 1984.

[Fo-Ze1] FOATA (Dominique) and ZEILBERGER (Doron). — Weighted derangements and Laguerre polynomials, *Actes 8e Séminaire Lotharingien*, p. 17–25. — Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 229/S-08, 1984.

[Fo-Ze2] FOATA (Dominique) and ZEILBERGER (Doron). — Laguerre polynomials, weighted derangements and positivity, manuscrit, Strasbourg, 1987.

[Ge] GESSEL (Ira). — Aspects of orthogonal polynomials, exposé oral, Strasbourg, 1987.

[Gi-Je-Ze] GILLIS (J.), JEDWAB (J.) and ZEILBERGER (D.). — A combinatorial interpretation of the integral of the product of Legendre polynomials, manuscrit, Weizmann Inst., 1987.

[Go] GOOD (I.J.). — Proofs of some "binomial" identities by means of MacMahon's "Master Theorem", *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. **58**, 1962, p. 161–162.

[Ja] JACKSON (D.M.). — Laguerre polynomials and derangements, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. **80**, 1976, p. 213–214.

[La] LABELLE (Jacques). — Tableau d'Askey, *Polynômes orthogonaux et applications* [Bar-le-Duc. 1984 : C. Brezinski et al., eds.], p. XXXVI–XXXVII. — Berlin, Springer-Verlag, 1985 (*Lecture Notes in Math.*, **1175**).

[La-Ye] LABELLE (Jacques) and YEH (Y.N.). — A combinatorial model for Hahn polynomials, Univ. Québec à Montréal, manuscrit, 1987.

[Macd] MACDONALD (I.). — *Symmetric Functions and Hall Polynomials.* — Oxford, Clarendon Press, 1979.

[Mac] MACMAHON (Percy Alexander). — *Combinatory Analysis*, vol. 1. — Cambridge, Univ. Press, 1915. (Reprinted by Chelsea, New York, 1955).

[Mu] MUIR (T.). — *A treatise on the theory of determinants.* — London, Longmans, 1933 [Réimprimé par Dover, New York, 1960].

[Ra] RAHMAN (Mizan). — A non-negative representation of the linearization coefficients of the product of Jacobi polynomials, *Can. J. Math.*, t. **33**, 1981, p. 915–928.

[Ri] RIORDAN (John). — *An Introduction to Combinatorial Analysis.* — New York, John Wiley, 1959.

[Sa-Vi] DE SAINTE-CATHERINE (Myriam) and VIENNOT (Gérard). — Combinatorial interpretation of integrals of products of Hermite, Laguerre and Tchebycheff polynomials, *Polynômes orthogonaux et applications* [Bar-le-Duc. 1984 : C. Brezinski et al., eds.], p. 120–128. — Berlin, Springer-Verlag, 1985 (*Lecture Notes in Math.*, **1175**).

[Sz] SZEGÖ (Gabor). — *Orthogonal polynomials.* — Providence, R.I., Amer. Math. Soc. 1939 (*Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, **23**), [second printing of the fourth edition : 1978].

[To] TOUCHARD (J.). — Nombres exponentiels et nombres de Bernoulli, *Can. J. Math.*, t. **8**, 1956, p. 305–320.

[Vi] VIENNOT (Gérard). — Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux, Notes conf., Univ. Québec à Montréal, 1984.

[Ze] ZENG (Jiang). — Calcul saalschützien des partitions et dérangements colorés, en préparation.

Jiang ZENG,
Département de mathématique,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes,
F-67084 Strasbourg, France.