

ENDLICHE FUNKTIONEN
UND SPEZIELLE FUNKTIONEN :
EINE KOMBINATORISCHE THEORIE
ZU EINER IDENTITÄT VON P. BROCK
UND DEREN ERWEITERUNGEN

VON

VOLKER STREHL

INHALT

Einleitung	24
I. — Brock's Identität, Beweise und Verallgemeinerungen	25
II. — Ein kombinatorischer Beweis für Brock's Identität	32
III. — PLI-Endofunktionen	36
IV. — Matching-Polynome und PLI-Bäume	45
V. — Identitäten vom Brock-Typ	54
Anhang A : Graphische Darstellungen	62
Anhang B : Matching-Polynome	66

Volker STREHL,
I.M.M.D., Informatik I,
Universität Erlangen-Nürnberg,
Martensstrasse 3,
D-8520 Erlangen.

Einleitung

Der Beweis der folgenden Identität wurde 1960 von P. BROCK in ^[1] (%) als Aufgabe gestellt:

Für $A, B \geq 0$ sei

$$H(A, B) := \sum_{i=0}^A \sum_{j=0}^B \binom{i+j}{j} \binom{A-i+j}{j} \binom{B+i-j}{B-j} \binom{A-i+B-j}{B-j}.$$

Dann ist:

$$H(A, B) - H(A-1, B) - H(A, B-1) = \binom{A+B}{A}^2. \quad (1)$$

[Dabei soll natürlich $H(-1, B) = H(A, -1) = 0$ sein.]

Diese Aufgabe ist von verschiedenen Autoren auf unterschiedliche Weise gelöst worden; dabei hat der von L. CARLITZ in ^[2] (%) eingeschlagene Weg zu interessanten Verallgemeinerungen dieser Identität geführt. Darüber soll im ersten Abschnitt berichtet werden. Im zweiten Abschnitt werde ich einen kombinatorischen Beweis von BROCK's Identität skizzieren, der sich eng an dem Sortierproblem orientiert, bei dessen Untersuchung R.M. BAER und P. BROCK ursprünglich dieses Resultat gefunden haben. Schliesslich werde ich in den folgenden Abschnitten ein ganz anderes kombinatorisches Modell vorstellen, aus dem sich alle anderen vorher zitierten Resultate ganz zwanglos ergeben. Dieses Modell führt auch noch auf eine weitere Stufe der Verallgemeinerung, aber wichtiger als dies scheint mir die Tatsache zu sein, dass auf diesem Wege die bislang nur mittels ingenieuser Transformationen formaler Reihen erzielten Resultate eine ganz natürliche Interpretation (und damit auch relative elementare Beweise) im Rahmen einer Klasse von Abzählproblemen für endliche Funktionen erfahren.

(%) Referenzen zu den in der Einleitung angesprochenen Arbeiten befinden sich am Ende von Abschnitt I

I BROCK's Problem, Beweise und Verallgemeinerungen

Die eingangs zitierte Identität von BROCK hatte sich, wie der Titel der Aufgabenstellung in ^[1] ausweist, bei der Untersuchung von Sortierproblemen ergeben. In ^[3] haben R.M BAER und P. BROCK die Frage untersucht, in welchem Umfang eine zu sortierende zufällige Permutation schon teilweise geordnet ist und wie man dies eventuell beim Herstellen der totalen Ordnung ausnutzen könne. Dies führt natürlich auf die Frage nach der Existenz (möglichst langer) auf- bzw. absteigender Teilfolgen in einer Permutation. Zu dieser Problematik haben BAER und BROCK nur partielle Lösungen beitragen können, und man kann vielleicht sagen, dass Teile ihres Ansatzes zum Zeitpunkt der Publikation bereits durch C.E.SCHENSTED's bahnbrechende Arbeit ^[4] überholt waren, die kurz zuvor erschienen war (vgl. dazu die Anmerkungen auf p.286 und p.296 von ^[3]). In ihrer Arbeit konzentrieren sich BAER und BROCK u.a. auf Permutationen der Zahlen $[0..n+m] = \{0, 1, 2, \dots, n+m\}$ (%), wobei $m, n \geq 0$ fest gewählt sind, die (mindestens) eine aufsteigende Teilfolge der Länge $m+1$ und (mindestens) eine absteigende Teilfolge der Länge $n+1$ haben. (Es ist leicht zu sehen, dass es dann keine längeren auf- bzw. absteigenden Teilfolgen geben kann). Aus der sog. ROBINSON-SCHENSTED-Korrespondenz entnimmt man unmittelbar die Aussage,

dass die Anzahl solcher Permutationen gleich $\binom{m+n}{m}^2$ ist - die zugehörigen Paare

von Standard-Tableaux haben ja Hakenform (mit Armen der Länge $m+1$ bzw. $n+1$). Damit ist der rechten Seite von BROCK's Identität eine kombinatorische Bedeutung gegeben; die Kunst besteht nun darin, dieselbe Klasse von Objekten so zu zählen, dass der links stehende Ausdruck einen guten Sinn macht. In ^[3] (siehe Appendix 1) wird diese Aufgabe auf eine sehr verwickelte Weise gelöst. Die Autoren haben allerdings nicht gesehen, wie man den Zahlen $H(m, n)$ eine unmittelbare kombinatorische Bedeutung zuordnen kann - dies macht ihren Beweis so kompliziert. Im Abschnitt II der vorliegenden Arbeit werde ich erklären, was die Zahlen $H(m, n)$ denn wirklich zählen und wie daraus ein relativ einfacher Beweis von BROCK's Identität folgt.

Die von BROCK in ^[1] gestellte Aufgabe wurde von D. SLEPIAN in ^[5] gelöst - es ist in den SIAM Reviews nicht erwähnt, ob der Redaktion noch weitere Lösungen zugegangen sind. SLEPIAN kleidete das Problem in den Formalismus der erzeugenden Funktionen und löste das so transformierte Problem unter Zuhilfenahme von komplexer Integration (!). Dieser Ansatz wurde von CARLITZ

(%) Die Notation $[a..b]$ zur Bezeichnung des Intervalles $\{a, a+1, \dots, b\}$ von natürlichen Zahlen wird durchgehend verwendet; falls $b < a$ ist, ist diese Menge leer

aufgegriffen, der in [2] eine "elementaren" Beweis veröffentlichte und zeigte, wie man die von ihm entwickelte Technik der Umformung der vorliegenden formalen Reihen auch zum Beweis von Verallgemeinerungen verwenden kann. Auf Einzelheiten der raffinierten Umformungen möchte ich hier nicht eingehen; zum Verständnis der nachfolgenden Ausführungen genügt es, Folgendes zu wissen:

BROCK's Identität ist ja offensichtlich äquivalent zu

$$\sum_{m,n \geq 0} H(m,n) u^m v^n = (1-u-v)^{-1} \times \sum_{m,n \geq 0} \binom{m+n}{m}^2 u^m v^n .$$

CARLITZ beweist zunächst:

$$\sum_{i,j,k,l \geq 0} \binom{i+j}{j} \binom{j+k}{k} \binom{k+l}{l} \binom{l+i}{i} u^i v^j w^k x^l =$$

$$\{ [(1-v)(1-x)-w+u(1-w)]^2 - 4u(1-v-w)(1-w-x) \}^{-1/2}$$

- dies ist der schwierige Teil seines Beweises - und folgert daraus (mittels elementarer Umformungen) obige Identität von formalen Reihen, indem er die Variablen u und w ,bzw. v und x , identifiziert.

Im nächsten Schritt betrachtet er, für $m,n,p \geq 0$,

$$H(m,n,p) :=$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^p \binom{i+j}{j} \binom{j+k}{k} \binom{k+m-i}{m-i} \binom{m+n-i-j}{n-j} \binom{n+p-j-k}{p-k} \binom{i+p-k}{i} .$$

und beweist, um eine erzeugende Funktion für diese $H(m,n,p)$ zu erhalten, erst einmal eine geschlossene Form für die erzeugende Funktion

$$\sum_{i,j,k,l,r,s \geq 0} \binom{i+j}{j} \binom{j+k}{k} \binom{k+l}{l} \binom{l+r}{r} \binom{r+s}{s} \binom{s+i}{i} u^i v^j w^k x^l y^r z^s$$

(die er nicht einmal explizit hinschreibt, da sie ihm zu kompliziert erscheint), aus der er mittel der Variablenidentifikation

$$u \equiv x \quad , \quad v \equiv y \quad , \quad w \equiv z$$

zu

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n,p \geq 0} H(m,n,p) u^m v^n w^p = \\ & (1-u-v-w)^{-1} \times \sum_{m,n,p \geq 0} \binom{m+n}{n} \binom{n+p}{p} \binom{p+m}{m} u^m v^n w^p \end{aligned}$$

kommt, was offenbar äquivalent ist zu

$$H(m, n, p) - H(m-1, n, p) - H(m, n-1, p) - H(m, n, p-1) = \binom{m+n}{n} \binom{n+p}{p} \binom{p+m}{m} \quad (2)$$

Er wirft in diesem Zusammenhang die Frage nach einem kombinatorischen Beweis dieser Identität auf - ein solcher wurde 1985 von C.A. CHURCH, jr. angegeben ^[6]; (siehe dazu einige Anmerkungen am Ende von Abschnitt II).

CARLITZ verallgemeinert die Problemstellung sofort zu der Aufgabe, eine geschlossene Form für die erzeugende Funktion (in r Variablen) für sog. "Zyklen von Binomialkoeffizienten"

$$\binom{n_1+n_2}{n_2} \binom{n_2+n_3}{n_3} \dots \binom{n_r+n_1}{n_1}$$

zu finden, um auf diesem Weg eine erzeugende Funktion (in r Variablen) bzw. eine Rekursionformel vom BROCK-Typ für die

$$H(n_1, n_2, \dots, n_r) = \sum_{\substack{i_s + i_{r+s} = n_s \\ 1 \leq s \leq r}} \binom{i_1+i_2}{i_2} \binom{i_2+i_3}{i_3} \dots \binom{i_{2r}+i_1}{i_1}$$

zu bekommen. Er zeigt, dass im ersten Fall die erzeugende Funktion die Form

$$[P^2 - 4u_1QR]^{-1/2}$$

hat, wobei P, Q, R gewisse Polynome in den r Variablen u_1, u_2, \dots, u_r sind, die ihrerseits mit Hilfe von Polynomen $f_n(u_1, u_2, \dots, u_n)$ definiert werden, die rekursiv durch

$$f_1(u_1) = 1 - u_1$$

$$f_n(u_1, u_2, \dots, u_n) = (1 - u_n) \cdot f_{n-1}\left(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, \frac{u_{n-1}}{1 - u_n}\right)$$

bestimmt sind. Es zeigt sich, dass die erzeugende Funktion für die $H(n_1, n_2, \dots, n_r)$ mit Hilfe der f -Polynome durch die erzeugende Funktion der Zyklen von Binomialkoeffizienten (mit $2r$ Variablen, wobei paarweise identifiziert wird) ausgedrückt werden kann. Als Beispiel expliziert CARLITZ dann den Fall $r=4$:

$$\begin{aligned}
 & H(n_1, n_2, n_3, n_4) - & (3) \\
 & H(n_1-1, n_2, n_3, n_4) - H(n_1, n_2-1, n_3, n_4) - \\
 & H(n_1, n_2, n_3-1, n_4) - H(n_1, n_2, n_3, n_4-1) + \\
 & H(n_1-1, n_2, n_3-1, n_4) + H(n_1, n_2-1, n_3, n_4-1) = \\
 & \binom{n_1+n_2}{n_2} \binom{n_2+n_3}{n_3} \binom{n_3+n_4}{n_4} \binom{n_4+n_1}{n_1}
 \end{aligned}$$

Der Leser möge sich die Aufgabe stellen, angesichts der Identitäten (1),(2) und (3) den allgemeinen Fall einer Identität vom BROCK-Typ zu erraten.

Eine andere Richtung der Verallgemeinerung von BROCK's Identität wird von CARLITZ in der Arbeit [7] unternommen. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass die klassische erzeugende Funktion für die JACOBI-Polynome, siehe dazu beispielsweise [8], [9], [10],

$$\sum_{j,k \geq 0} \binom{\alpha+j+k}{j} \binom{\beta+j+k}{k} u^j v^k = \frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1-u+v+R)^\alpha(1+u-v+R)^\beta},$$

wobei $R = [(1-u-v)^2 - 4uv]^{1/2}$ ist, ja auch (im Falle $\alpha=\beta=0$ zumindest) als eine erzeugende Funktion für Zyklen (der Länge 2) von Binomialkoeffizienten gelesen werden kann. [Man ersetze in der obigen Gleichung u durch $\frac{x-1}{2}t$ und v durch $\frac{x+1}{2}t$, um die übliche Form von JACOBI's erzeugender Funktion wiederzuerkennen]. CARLITZ gibt nun in [7] geschlossene Formeln für die analog gebildeten erzeugenden Summationen

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j,k \geq 0} \binom{\alpha+i+j}{i} \binom{\beta+j+k}{j} \binom{\gamma+k+i}{k} u^i v^j w^k, \\
 & \sum_{i,j,k,l \geq 0} \binom{\alpha+i+j}{i} \binom{\beta+j+k}{j} \binom{\gamma+k+l}{k} \binom{\delta+l+i}{l} u^i v^j w^k t^l
 \end{aligned}$$

an, wobei der zweite Fall - ganz analog wie oben für den Fall der $H(m, n)$ angedeutet - auf eine Rekursion für die

$$H(m, n | \alpha, \beta, \gamma, \delta) := \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{\alpha+i+j}{i} \binom{\beta+j+m-i}{j} \binom{\gamma+m-i+n-j}{m-i} \binom{\delta+n-j+i}{n-j}$$

führt, welche BROCK's Identität verallgemeinert:

$$H(m, n | \alpha, \beta, \gamma, \delta) - H(m-1, n | \alpha, \beta, \gamma, \delta) - H(m, n-1 | \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \quad (4)$$

$$\binom{\alpha + \gamma + m + n}{m} \binom{\beta + \delta + m + n}{n}.$$

CARLITZ drückt in dieser Arbeit ^[7] die Absicht aus, eine gemeinsame Verallgemeinerung von seinen Resultaten in ^[2] und (4) zu finden. In der Tat wird das von ihm intendierte Resultat einige Jahre später von SINGHAL ^[11] gefunden:

Die erzeugende Funktion

$$F(u_1, \dots, u_n | \alpha_1, \dots, \alpha_n) := \quad (5a)$$

$$\sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} \binom{\alpha_1 + i_1 + i_2}{i_1} \binom{\alpha_2 + i_2 + i_3}{i_2} \dots \binom{\alpha_n + i_n + i_1}{i_n} u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}$$

kann geschrieben werden in der Form

$$F \times \prod_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{2Q_k}{P_k + F^{-1}} \right)^{\alpha_k}, \quad (5b)$$

wobei $F = [U_n^2 - 4u_1 \dots u_n]^{-1/2}$. Dabei sind die Q_k, P_k, U_n Polynome in den Variablen u_1, \dots, u_n , Varianten der schon von CARLITZ verwendeten Polynome, die sich wiederum durch die induktiv definierten f -Polynome ausdrücken lassen. Für $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ erhält man CARLITZ' Resultat als Spezialfall. Aus diesem allgemeinen Resultat (für $2r$ Variable) kann SINGHAL durch passende Identifikation

$$u_1 \equiv u_{r+1}, \dots, u_r \equiv u_{2r}$$

die erzeugende Funktion für die

$$H(n_1, \dots, n_r | \alpha_1, \dots, \alpha_r) = \sum_{\substack{i_s + i_{r+s} = n_s \\ 1 \leq s \leq r}} \binom{\alpha_1 + i_1 + i_2}{i_1} \binom{\alpha_2 + i_2 + i_3}{i_2} \dots \binom{\alpha_{2r} + i_{2r} + i_1}{i_{2r}}$$

[hierbei sind also n_1, \dots, n_r nicht-negative ganze Zahlen, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ Parameter] in der Form

$$\sum_{n_1, \dots, n_r \geq 0} H(n_1, \dots, n_r | \alpha_1, \dots, \alpha_r) u_1^{n_1} \dots u_r^{n_r} = \quad (6)$$

$$U_r^{-1} \times \sum_{n_1, \dots, n_r \geq 0} \binom{\alpha_1 + \alpha_{r+1} + n_1 + n_2}{n_1} \dots \binom{\alpha_r + \alpha_{2r} + n_r + n_1}{n_r} u_1^{n_1} \dots u_r^{n_r}$$

schreiben, was äquivalent zu einer Rekursionsformel à la BROCK für die

$H(n_1, \dots, n_r \mid \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ ist.

Abschliessend sei erwähnt, dass sich auch die Arbeit von SINGHAL auf die von CARLITZ entwickelte Technik stützt, also auf raffinierten Manipulationen mit formalen Reihen beruht. Ich möchte hier zwei Zeugen zitieren, die sich ihrerseits auch mit CARLITZ' Arbeiten zur BROCK-Identität auseinandergesetzt haben. G.E. ANDREWS schreibt in einer unveröffentlichten Arbeit ^[12] im Bezug auf ^[2] und nachfolgende Arbeiten von "... *ingenueous generating function techniques* ...", und J. RIORDAN schreibt im Kapitel 4.4 von ^[13] wo das Wesentliche von ^[2] wiedergegeben wird: "... *The treatment of these sums by multivariable generating functions, which appears in a beautiful pair of papers by CARLITZ (1964) and (1965), seems both natural and inevitable...*"

Ich möchte dieser analytisch-manipulativen Methode in den Abschnitten III bis V der vorliegenden Arbeit einen kombinatorischen Ansatz gegenüberstellen, der einen relativ einfachen, von der Konzeption her sehr übersichtlichen, Beweis all dieser Resultate gestattet; dabei findet auch die "naturnotwendige" Struktur dieser Identitäten - so scheint mir - eine Erklärung. Insbesondere zeigt sich, dass die in den Arbeiten von CARLITZ und SINGHAL auftretenden Polynome f_n, Q_k, P_k , und U_n sogenannte matching-Polynome (oder Varianten davon) einfacher Graphen (Geraden bzw. Zyklen) sind, die im kombinatorischen Modell eine konkrete Bedeutung haben. Darüberhinaus wird es dieser Ansatz erlauben, eine weitere Stufe der Verallgemeinerung zu erreichen, ohne dass die kombinatorische Methode dadurch komplizierter wird.

Literatur

1. Brock P., On a binomial identity arising from a sorting problem, problem 60-2, *SIAM Review* 2 (1960), p.40.
2. Carlitz L., A binomial identity arising from a sorting problem, *SIAM Review* 6 (1964), pp. 20-30.
3. Baer R.M. and P. Brock, Natural sorting, *SIAM Journal* 10 (1962), pp. 284-304.
4. Schensted C., Longest increasing and decreasing sequences, *Canad. J. Math.* 13 (1961), pp. 179-191.
5. Slepian D., Solution to problem 60-2, *SIAM Review* 4 (1962), pp.396-398.
6. Church,jr. C.A., Combinatorial proof for a sorting problem identity, *Fibonacci Quart.* 33 (1985), pp.366-368.
7. Carlitz L., Some generating functions and a binomial identity, *Duke Math. J.* 35 (1968), pp. 541-548.
8. Rainville E., *Special Functions*, Chelsea, 1960.
9. Szegő G., *Orthogonal Polynomials*, AMS Colloquium Publ., vol. 23, (4th. ed., 2nd printing), Providence, 1978.
10. Foata D. et P. Leroux, Polynômes de Jacobi, interprétation combinatoire et fonction génératrice, *Proc. Amer. Math. Soc.* 87 (1983), pp. 47-54
11. Singhal J.P., A generating function and a binomial identity, *Duke Math. J.* 39 (1972), pp. 25-30.
12. Andrews G.E., q-analogs of the Brock numbers, unpublished manuscript.
13. Riordan J., *Combinatorial Identities*, Wiley, 1968.

II Ein kombinatorischer Beweis für BROCK's Identität

Wie eingangs erwähnt, soll in diesem Abschnitt ein kombinatorischer Beweis für BROCK's Identität skizziert werden, der sich eng an der ursprünglichen Problemstellung von BAER und BROCK orientiert. Es bezeichne also für $m, n \geq 0$ $X_{m,n}$ die Menge aller Permutationen von $[0..m+n] := \{0, 1, 2, \dots, m+n\}$, die (mindestens) eine aufsteigende Teilfolge der Länge $m+1$ und (mindestens) eine absteigende Teilfolge der Länge $n+1$ besitzen. Für Permutationen $\sigma \in X_{m,n}$ gelten folgende Aussagen, die allesamt leicht nachzuprüfen sind (siehe auch ^[1]):

1. Alle aufsteigenden Teilfolgen von σ haben eine Länge $\leq m+1$;
Alle absteigenden Teilfolgen von σ haben eine Länge $\leq n+1$.
2. Jede aufsteigende Teilfolge maximaler Länge von σ und jede absteigende Teilfolge maximaler Länge von σ haben genau ein Element gemeinsam. Solche Elemente sollen σ -*zentral* genannt werden.
[N.B.: wenn es mehrere aufsteigende (absteigende) Teilfolgen der Länge $m+1$ (der Länge $n+1$) gibt, so gibt es genau eine absteigende (aufsteigende) Teilfolge maximaler Länge].

3. Die zentralen Elemente eines $\sigma \in X_{m,n}$ bilden ein maximales (auf- oder absteigendes) Intervall, d.h. es gibt $x_\sigma, y_\sigma \in [0..m+n]$ mit

$$x_\sigma \leq j \leq y_\sigma \text{ impliziert } \sigma(j) = \sigma(x_\sigma) + j - x_\sigma ,$$

beziehungsweise

$$x_\sigma \leq j \leq y_\sigma \text{ impliziert } \sigma(j) = \sigma(x_\sigma) - j + x_\sigma .$$

und die $\sigma(j)$ ($j \in [x_\sigma..y_\sigma]$) sind genau die σ -zentralen Elemente.

[N.B.: ist $\sigma(i)$ σ -zentral und $|i-j|=1$, $|\sigma(i)-\sigma(j)|=1$, so ist auch $\sigma(j)$ σ -zentral].

Sei nun

$$H_{m,n} = \{ (\sigma, j) ; \sigma \in X_{m,n} , \sigma(j) \text{ ist } \sigma\text{-zentral} \}$$

die Menge der "zentral-punktierten" Permutationen. Die Punktierung j kann am Anfang des Intervalls der zentralen Elemente liegen, also $j=x_\sigma$; andernfalls gilt $x_\sigma < j \leq y_\sigma$ und das zentrale Intervall zI ist entweder auf- oder absteigend. Daraus ergibt sich eine Zerlegung von $X_{m,n}$ in die drei paarweise disjunkten Mengen

$$S_{m,n} = \{ (\sigma, x_\sigma) \in H_{m,n} \} ,$$

$$U_{m,n} = \{ (\sigma, j) \in H_{m,n} ; j > x_\sigma , zI \text{ aufsteigend} \} ,$$

$$D_{m,n} = \{ (\sigma, j) \in H_{m,n} ; j > x_\sigma , zI \text{ absteigend} \} .$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt nun:

ENDLICHE FUNKTIONEN

- i. $\#S_{m,n} = \#X_{m,n}$
- ii. $\#U_{m,n} = \#H_{m-1,n}$
- iii. $\#D_{m,n} = \#H_{m,n-1}$
- iv. $\#H_{m,n} = H(m,n) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{i+j}{i} \binom{j+m-i}{j} \binom{m-i+n-j}{m-i} \binom{n-j+i}{n-j}$

Aus diesen vier Tatsachen, die sogleich erläutert werden, und der bereits eingangs erwähnten Aussage

$$\#X_{m,n} = \binom{m+n}{m}^2$$

folgt nun BROCK's Identität unmittelbar:

$$\#H_{m,n} = \#S_{m,n} + \#U_{m,n} + \#D_{m,n} = \#X_{m,n} + \#H_{m-1,n} + \#H_{m,n-1}.$$

Zur Eigenschaft i. ist nichts weiter zu sagen.

Eigenschaft ii. folgt aus der Tatsache, dass man eine Bijektion $(\sigma, j) \rightarrow (\tau, j-1)$ von $U_{m,n}$ auf $H_{m-1,n}$ definieren kann, bei der der Übergang von σ zu τ durch Identifikation von j und $j-1$ bei den Argumenten, sowie von $\sigma(j)$ und $\sigma(j-1)$ bei den Werten geschieht, also

$$\tau(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{falls } x < j \text{ und } \sigma(x) < \sigma(j) \\ \sigma(x-1) & \text{falls } x < j \text{ und } \sigma(x) > \sigma(j) \\ \sigma(x)+1 & \text{falls } x \geq j \text{ und } \sigma(x) \leq \sigma(j) \\ \sigma(x+1)-1 & \text{falls } x \geq j \text{ und } \sigma(x) > \sigma(j) \end{cases}$$

Man beachte hier insbesondere das N.B. in Punkt 3. oben.

Eigenschaft iii. verifiziert man entsprechend.

Schliesslich zu Eigenschaft iv: (%)

Um alle $\sigma \in X_{m,n}$ mit vorgegebenem zentralem Element $y = \sigma(x)$ zu konstruieren, wählt man $i \in [0..m]$, $j \in [0..n]$ so dass $x = i + n - j$, $y = i + j$. Zur Vereinfachung der Notation sei ferner $k := m - i$, $l := n - j$, also $x = i + l$. Nun wählt man Teilmengen

$$\begin{aligned} I &\subseteq [0..x-1] && \text{mit } \#I = i \quad , \\ J &\subseteq [0..y-1] && \text{mit } \#J = j \quad , \\ K &\subseteq [x+1..m+n] && \text{mit } \#K = k \quad , \\ L &\subseteq [y+1..m+n] && \text{mit } \#L = l \quad . \end{aligned}$$

Die Anzahl der Wahlmöglichkeiten ist

$$\binom{x}{i} \binom{y}{j} \binom{m+n-x}{k} \binom{m+n-y}{l} = \binom{i+j}{i} \binom{j+k}{j} \binom{k+l}{k} \binom{l+i}{l} .$$

Sei nun

$$\begin{aligned} I' &= [0..y-1] - J, && \text{also } \#I' = y - j = i \quad , \\ J' &= [x+1..m+n] - K, && \text{also } \#J' = m+n-x-k = j \quad , \\ K' &= [y+1..m+n] - L, && \text{also } \#K' = m+n-y-l = k \quad , \\ L' &= [0..x-1] - I, && \text{also } \#L' = x-i = l \quad . \end{aligned}$$

Eine Permutation σ von $[0..m+n]$ kann man dann so definieren:

σ bildet I bzw. K streng monoton steigend auf I' bzw. K' ab ;

σ bildet J' bzw. L' streng monoton fallend auf J bzw. L ab ;

ausserdem gelte $\sigma(x) = y$.

Dann ist σ streng monoton steigend längs $I \cup \{x\} \cup K$ (Länge $i+1+k = m+1$) und streng monoton fallend längs $L' \cup \{x\} \cup K'$ (Länge $l+1+j = n+1$); $y = \sigma(x)$ ist nach Konstruktion σ -zentral. Da sich all dies umkehren lässt, folgt iv.

(%) Eine Illustration der nachfolgend beschriebenen Konstruktion findet sich im Anhang A-1

Ein anderer kombinatorischer Beweis von BROCK's Identität wurde von C.A. CHURCH,jr. in ^[2] publiziert. CHURCH verwendet als Modell Paare von Pfaden im ganzzahligen Gitter $[0..m] \times [0..n]$, wobei ein Pfad mit (1,0)- bzw. (0,1)-Schritten von (0,0) nach (m,n) läuft, der andere mit (1,0)- bzw. (0,1)-Schritten von $(0,n)$ nach $(m,0)$. Die Anzahl solcher Pfadpaare ist natürlich $\binom{m+n}{m}^2$, und zu den BROCK-Zahlen $H(m,n)$ und der BROCK-Identität kommt man über die Beobachtung, dass die beiden Pfade eines solchen Paares auf einem horizontalen oder vertikalen Intervall übereinstimmen müssen. Dieser Ansatz führt auch auf einen kombinatorischen Beweis von CARLITZ' Identität (2) aus Abschnitt I. Kritisch ist allerdings anzumerken, dass die Beweisführung von CHURCH ergänzungsbedürftig und nicht leicht nachzuvollziehen ist - in der Tat ist das eben skizzierte Modell der Pfadpaare erst aus D. ZEILBERGER's Bemühen entstanden, CHURCH's Beweis transparenter zu gestalten; vgl hierzu auch I. GESSEL's Review, ^[3].

Es ist nicht schwer zu sehen, dass der hier gegebene Beweis von BROCK's Identität und der von CHURCH(-ZEILBERGER) einander sehr ähnlich sind. Man kann die jeweils gezählten Objekte in natürlicher Weise bijektiv aufeinander abbilden, wobei sich die Art des Zählens mitüberträgt; insbesondere entsprechen die Konzepte des *zentralen Intervalls* bei der von BAER und BROCK beschriebenen Klasse von Permutationen und des *gemeinsamen Intervalls* bei den Pfadpaaren einander.

Auf die Arbeit von CHURCH und die (nicht publizierten) Ergänzungen von ZEILBERGER hat mich I. GESSEL aufmerksam gemacht, nachdem ich den hier beschriebenen Beweis gefunden hatte. Für seine Hinweise und Erläuterungen möchte ich ihm an dieser Stelle danken.

Literatur

1. Baer R.M. and P. Brock, Natural sorting, *SIAM Journal* 10 (1962), pp. 284-304.
2. Church,jr. C.A., Combinatorial proof for a sorting problem identity, *Fibonacci Quart.* 33 (1985), pp. 366-368.
3. Gessel I., Review von ^[2], *Mathematical Reviews*,

III PLI-Endofunktionen

In diesem Abschnitt wird nun ein kombinatorisches Modell vorgestellt, mit dessen Hilfe man alle im ersten Abschnitt besprochenen Resultate (und weitere) in einheitlicher Form herleiten kann. Die Idee ist dabei, die formalen Reihen des ersten Abschnitts als erzeugende Funktionen geeigneter kombinatorischer Strukturen zu deuten und - wann immer möglich - Identitäten oder Umformungen von formalen Reihen zu gewinnen aus strukturellen Eigenschaften von oder konkreten Manipulationen an den kombinatorischen Objekten.

Die Objekte, mit denen wir uns hier befassen werden, stellen eine Verallgemeinerung der *Jacobi-Endofunktionen* dar, die von D. FOATA und P. LEROUX eingeführt worden, um im Sinne der eben kurz skizzierten Programmatik einen rein kombinatorischen (und den vielleicht einzigen wirklich elementaren) Beweis von JACOBI's erzeugender Funktion für die JACOBI-Polynome zu geben. Wegen CARLITZ' Beobachtung, dass man beim Beweis der (α, β) -parametrisierten Form von BROCK's Identität ein Analogon von JACOBI's Formel verwenden kann, lag es nahe diesen Ansatz aufzugreifen und geeignet zu verallgemeinern. Dabei werden nun Endofunktionen endlicher Mengen betrachtet, wobei jedes Element der Grundmenge zu einer von p "Punktsorten" gehört. Die einschränkende Bedingung an die Endofunktionen besteht nun darin, dass die Menge der p Sorten eine zyklische Ordnung trägt und dass Elemente einer jeden Sorte nur in Elemente dieser Sorte selbst oder der "folgenden" (im Sinne der zyklischen Ordnung) abgebildet werden dürfen. Ausserdem sollen sich die Endofunktionen auf jeder Punktsorte injektiv verhalten. Für $p = 2$ sind dies genau die JACOBI-Endofunktionen von FOATA/LEROUX ^[1]; für weitere Anwendungen und Verallgemeinerungen dieses kombinatorischen Modells siehe z.B. ^[2], ^[3], ^[4], ^[5].

Nun zur präzisen Definition:

Es sei $p \geq 1$ eine natürliche Zahl. Eine periodische, lokal-injektive Endofunktion (%) (kurz: *PLI-Endofunktion*) der Periodenlänge p ist ein Paar $\Phi = (S, f)$, wobei

---- $S = (S_1, \dots, S_p)$ ein geordnetes System von p paarweise disjunkten (endlichen) Mengen ist; die Vereinigung $S_1 \cup \dots \cup S_p$ wird mit $|S|$ bezeichnet.

(%) Eine graphische Veranschaulichung wird im Anhang A-II gegeben

ENDLICHE FUNKTIONEN

---- f eine Endofunktion von $|S|$ ist mit den Eigenschaften:

---- $f(S_j) \subseteq S_j \cup S_{j+1}$ ($1 \leq j \leq p$), wobei $S_{p+1} \equiv S_1$;

---- die Fragmente $f_j : S_j \rightarrow S_j \cup S_{j+1} : s \rightarrow f(s)$ von f sind injektiv ($1 \leq j \leq p$).

Anders ausgedrückt heisst das: S ist eine geordnete Partition der Trägermenge $|S|$ mit p Teilen S_j , ($1 \leq j \leq p$), die evtl. auch leer sein können. Jedes $s \in S_j$ hat höchstens zwei Urbilder unter f , höchstens eines in S_j und höchstens eines in S_{j-1} , wobei entsprechend $S_0 \equiv S_p$ zu lesen ist. (%)

Für eine (endliche) Menge T bezeichne dann $J^{(p)}(T)$ die Menge der PLI-Endofunktionen $\Phi = (S, f)$ mit $|S| = T$. Von Interesse sind nun die (exponentiellen) erzeugenden Funktionen der PLI-Endofunktionen, wobei die folgenden Parameter von $\Phi = (S, f)$ in Betracht gezogen werden:

---- die Verteilung der Klassengrößen $\#S_j := \text{card}(S_j)$ ($1 \leq j \leq p$);

---- die Anzahlen der Zyklen von f innerhalb von S_j ($1 \leq j \leq p$), also die Anzahl der Zyklen $\text{cyc}(f_j)$ der Fragmente f_j ($1 \leq j \leq p$).

Seien nun $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ und $X = (x_1, \dots, x_p)$ Vektoren von jeweils p Variablen. Jeder PLI-Endofunktion $\Phi = (S, f)$ wird ein Gewicht

$$w_{X,A}(\Phi) = \prod_{1 \leq j \leq p} (1 + \alpha_j)^{\text{cyc}(f_j)} x_j^{\#S_j}$$

zugeordnet. Als erzeugende Funktion wird nun betrachtet:

$$J^{(p)}(X | A) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum \{ w_{X,A}(\Phi) ; \Phi \in J^{(p)}([1..n]) \}$$

Das nächste Resultat erklärt das Interesse an diesen kombinatorischen Objekten: ihre erzeugende Funktion ist genau diejenige, die in SINGHAL's Arbeit die wesentliche Rolle spielt.

(%) Die Konvention, Indices *modulo p* zu lesen, wird in diesem und dem folgenden Abschnitt beibehalten.

Satz 1 :
$$J^{(p)}(X | A) = \sum_n \prod_{1 \leq j \leq p} \binom{\alpha_j + n_j + n_{j+1}}{n_j} X^n$$

[Dabei läuft die Summation über alle $n = (n_1, \dots, n_p) \in N^p$ und X^n steht als Abkürzung für $x_1^{n_1} \dots x_p^{n_p}$].

Beweis: Für disjunkte (endliche) Mengen S, T bezeichne $L(S, T)$ die Menge aller injektiven Funktionen $g : S \rightarrow S \cup T$. Für jedes solche g bezeichne $cyc(g)$ die Anzahl der Zyklen von g innerhalb von S . Ist nun γ eine Variable (%), so gilt bekanntlich (siehe z.B. [6], [5]) :

$$\sum \{ \gamma^{cyc(g)} ; g \in L(S, T) \} = (\gamma + \#T)_{\#S}.$$

Setzt man also für $g \in L(S, T)$:

$$v_{x, \alpha}(g) := (1 + \alpha)^{cyc(g)} x^{\#S},$$

so gilt für jede geordnete Partition $S = (S_1, \dots, S_p)$ und jede Endofunktion $f : |S| \rightarrow |S|$:

$$\Phi = (S, f) \in J^{(p)}(|S|) \quad \text{gdw} \quad f_j \in L(S_j, S_{j+1}), \quad (1 \leq j \leq p);$$

$$w_{X, A}(\Phi) = \prod_{1 \leq j \leq p} v_{x, \alpha_j}(f_j).$$

Also gilt für jedes solche S :

$$\sum_f \{ w_{X, A}(\Phi) ; \Phi = (S, f) \in J^{(p)} \} = \prod_{1 \leq j \leq p} (1 + \alpha_j + \#S_{j+1})_{\#S_j} x_1^{\#S_1} \dots x_p^{\#S_p}.$$

Ist $n = (n_1, \dots, n_p) \in N^p$, so lässt die Menge $[1..|n|]$ (mit $|n| = n_1 + \dots + n_p$) genau $\binom{|n|}{n_1, n_2, \dots, n_p}$ geordnete Partitionen $S = (S_1, \dots, S_p)$ mit $\#S_j = n_j$ ($1 \leq j \leq p$) zu. Daher gilt also:

$$J^{(p)}(X | A) = \sum_n \prod_{1 \leq j \leq p} \frac{(1 + \alpha_j + n_{j+1})_{n_j}}{n_j!} X^n = \sum_n \prod_{1 \leq j \leq p} \binom{\alpha_j + n_j + n_{j+1}}{n_j} X^n \quad \blacksquare$$

(%) In der nachfolgenden Gleichung und auch weiterhin bezeichne $(\gamma)_k$, wo k eine natürliche Zahl ist, das Polynom $\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+k-1)$, der Zusammenhang mit den Binomialkoeffizienten ist also $\binom{\gamma}{k} = (\gamma-k+1)_k / k!$.

Damit ist SINGHAL's erzeugende Funktion kombinatorisch identifiziert worden, und zwar, grob gesagt, als eine (exponentielle) erzeugende Funktion für periodisch-verkettete Injektionen. Nun wird es darum gehen, diese PLI-Endofunktionen in anderer Weise zu "lesen", und zwar in der klassischen Weise (siehe etwa ^[7], ^[8]), in der man endliche Funktionen als "Permutationen von Bäumen" interpretiert. Dies wird auf eine zweite Darstellung der erzeugenden Funktion für die PLI-Endofunktionen führen. Zuvor einige Terminologie betreffend die Struktur von endlichen Endofunktionen:

Sei S eine (endliche) Menge und $f : S \rightarrow S$ eine Endofunktion von S . Dann bezeichne: R_f die Menge der f -rekurrenten Elemente von S , ρ_f die von f auf R_f induzierte Permutation, $T_f := S - R_f$. Für jedes $s \in T_f$ sei $f^*(s)$ das früheste Element der Folge

$$f(s), f^2(s), f^3(s), \dots,$$

welches zu R_f gehört. Dann ist also f^* eine Abbildung von T_f in R_f , auf deren Fasern $T_{f,s} := (f^*)^{-1}(s)$ ($s \in R_f$) die Funktion f eine Baumstruktur induziert. Bezeichne nun für das Folgende

$$t_{f,s} : T_{f,s} \rightarrow T_{f,s} \cup \{s\}$$

die von f auf der f^* -Faser von s induzierte zusammenhängende, azyklische, in s kontrahierende Abbildung. s ist also die "Wurzel" dieser Baumstruktur.

[N.B: s selbst wird natürlich nicht zur f^* -Faser von s gerechnet].

Diese Auffassung von Endofunktionen als Permutationen ihrer rekurrenten Elemente, die als Wurzeln von Bäumen nicht-rekurrenter Elemente fungieren, ist nun auf den Fall der PLI-Endofunktionen zu übertragen. Dazu benötigt man das Konzept des PLI-Baumes (%):

Ein *PLI-Baum* (der Periodenlänge p) vom Typ j ($1 \leq j \leq p$) ist ein Tripel

$$\tau = (T, r, t)$$

wobei gilt:

---- $T = (T_1, \dots, T_p)$ ist eine Familie von paarweise disjunkten (endlichen) Mengen;

---- $r \notin T$ ist ein separates Element, die Wurzel von τ ;

$$\bigcup_{1 \leq i \leq p} T_i$$

(%) Eine Illustration dazu ist im Anhang A-III zu finden.

- $t : |T| \rightarrow |T| \cup \{r\}$ ist eine in r kontrahierende Abbildung;
- $t(T_i) \subseteq T_i \cup T_{i+1}$ für $1 \leq i \leq p$, $i \neq j$, sowie $t(T_j) \subseteq T_j \cup \{r\} \cup T_{j+1}$;
- die Fragmente von t , d.h. $t_i : T_i \rightarrow T_i \cup T_{i+1}$ ($1 \leq i \leq p$, $i \neq j$) bzw. $t_j : T_j \rightarrow T_j \cup \{r\} \cup T_{j+1}$ sind injektiv.

Mit $T_j^{(p)}(S)$ soll dann die Menge der PLI-Bäume vom Typ j mit (T, r, t) mit $|T| = S$ bezeichnet werden.

Anschaulich gilt also: jeder Knoten des Baumes gehört zu einer (von p möglichen) Sorten von Punkten; die Wurzel r hat einen einzigen Vorgänger (im funktionalen Sinne, Kanten zur Wurzel hin gerichtet), und dieser gehört zur Sorte j ; jeder andere Knoten des Baumes hat höchstens zwei Vorgänger, und zwar, wenn der Knoten selbst zu T_i gehört, so liegt höchstens ein Vorgänger in T_i selbst und höchstens ein Vorgänger in T_{i-1} .

Die zuletzt erwähnte Eigenschaft bringt es mit sich, dass man bei den Vorgängern eines Knotens zwischen "linkem" (zur gleichen Menge T_i gehörig) und "rechtem" (zur "vorhergehenden" Menge T_{i-1} gehörig) Vorgänger unterscheiden kann. Es handelt sich also bei den PLI-Bäumen um binäre Bäume in üblichen Sinne, bei denen nun allerdings nicht nur deren Anzahl (in Abhängigkeit von der Knotenzahl) interessiert (die durch die CATALAN-Zahlen gegeben ist, solange man sie als unnummerierte Objekte betrachtet), sondern auch die Zugehörigkeit von Knoten zu den Klassen T_i ($1 \leq i \leq p$). Daher ist ein PLI-Baum $\tau = (T, r, t)$ mit dem Gewicht

$$v_x(\tau) = x_1^{\#T_1} \cdots x_p^{\#T_p} = X^{\#T}$$

zu bewerten, und man betrachtet die (exponentielle) erzeugende Funktion für (numerierte) PLI-Bäume vom Typ j :

$$T_j^{(p)}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum \{ v_x(\tau) ; \tau \in T_j^{(p)}([1..n]) \}$$

Dann gilt wegen der Binärbaum-Struktur der PLI-Bäume der

Satz 2 :

Die erzeugenden Funktionen $T_j^{(p)}(X)$ ($1 \leq j \leq p$) sind die (eindeutig bestimmten) Lösungen in $Q[[X]]$ (de facto sogar in $Z[[X]]$) des Systems

$$(*) \quad Y_i = 1 + x_i \cdot Y_i \cdot Y_{i-1} \quad (1 \leq i \leq p).$$

Dieses System kann man explizit lösen; dies soll aber erst weiter unten ausgeführt werden. Vorläufig geht es ja nur um die Struktur von PLI-Endofunktionen, und

dafür kann man folgendes festhalten:

Eine PLI-Endofunktion lässt sich eindeutig zerlegen in:

- eine PLI-Permutation (R, ρ_f) , wobei $R = (R_1, \dots, R_p)$ mit $R_i = R_f \cap S_i$ ($1 \leq i \leq p$);
- eine (durch R_f indizierte) Familie $(\tau_s)_{s \in R_f}$ von PLI-Bäumen $\tau_s = (T_{f,s} \cap S, s, t_{f,s})$ wobei $T_{f,s} \cap S := (T_{f,s} \cap S_1, \dots, T_{f,s} \cap S_p)$.

Dabei ist noch folgender Zusammenhang (%) zu beachten:

- Für jedes $s \in R_f \cap S_j$ gilt:
wenn $\rho_f^{-1}(s) \in S_j$, und wenn $T_{f,s}$ nicht leer ist, dann ist τ_s vom Typ $j-1$;
wenn $\rho_f^{-1}(s) \in S_{j-1}$, und wenn $T_{f,s}$ nicht leer ist, dann ist τ_s vom Typ j .

Aus diesem Grund benötigt man die erzeugende Funktion für PLI-Permutationen in einer speziellen Form: es interessieren nicht nur die Kardinalitäten S_j ($1 \leq j \leq p$), sondern auch die Anzahlen der Übergänge von S_j nach S_j bzw. nach S_{j+1} .

Hier kommt ein bekanntes Resultat zur Hilfe:

Sei $S = (S_1, \dots, S_p)$ eine geordnete Partition von $|S|$ und σ eine beliebige Permutation von $|S|$. Dem Paar (S, σ) wird eine Bewertung

$$\Psi_{Z,A}(S, \sigma) = \prod_{1 \leq i, j \leq p} z_{ij}^{b_{ij}(\sigma)} \prod_{1 \leq k \leq p} (1 + \alpha_k)^{\text{cyc}(\sigma_k)}$$

zugeordnet. Dabei ist $Z = (z_{ij})$ eine $(p \times p)$ -Matrix von Variablen, mit denen die Anzahlen $b_{ij}(\sigma)$ der σ -Übergänge von S_i nach S_j , also die Anzahl der Paare $(a, \sigma(a)) \in S_i \times S_j$, registriert werden.

Sei

$$\Psi^{(p)}(Z | A) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum^{(n)} \{ \Psi_{Z,A}(S, \sigma) \},$$

wobei die innere Summe über alle Paare (S, σ) läuft, bei denen S eine geordnete Partition und σ eine Permutation von $[1..n]$ ist. Dann gilt:

Satz 3:
$$\Psi^{(p)}(Z | A) = [\det(E - Z) \times \prod_{1 \leq i \leq p} (1 - z_{ii})^{\alpha_i}]^{-1}$$

(%) Die Illustration in Anhang A-IV mag hilfreich sein

[Dabei bezeichnet E die $p \times p$ -Einheitsmatrix.]

Dieses ist im Fall $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ von FOATA [9] bewiesen worden. Es gehört in den Kreis von Resultaten (MACMAHON's Master Theorem, JACOBI's Formel, Inversionformel für Matrizen, Satz von CAYLEY-HAMILTON etc.), die traditionell der linearen Algebra zugerechnet werden, die aber in den letzten Jahren das Interesse der Kombinatoriker gefunden haben; die Arbeiten von FOATA, VIENNOT [10], ZEILBERGER [11], STRAUBING [12] beispielsweise legen davon ein eindrucksvolles Zeugnis ab.

Jedenfalls ist festzuhalten, dass man den zitierten Satz von FOATA mit rein kombinatorischen Mitteln beweisen kann, ebenso wie die anderen erwähnten klassischen Sätze.

Der allgemeinere Fall, der hier benötigt wird, ergibt sich aus sich aus dem speziellen Fall $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ ohne Schwierigkeiten: die entsprechende erzeugende Funktion für den Fall, dass S nur eine einzige nichtleere Klasse S_i enthält, ist offenbar:

$$\Psi^{(1)}((z_{ii}) | (\alpha_i)) = (1 - z_{ii})^{1 + \alpha_i} .$$

Trennt man nun bei beliebigen Paaren (S, σ) die "monochromatischen" (d.h. ganz in einem S_i liegenden) Zyklen von σ von den "gemischtfarbigen" Zyklen, so erhält man die Produktzerlegung der erzeugenden Funktion

$$\Psi^{(p)}(Z | A) = \frac{\Psi^{(p)}(Z | 0)}{\prod_{1 \leq i \leq p} \Psi^{(1)}((z_{ii}) | (0))} \times \prod_{1 \leq i \leq p} \Psi^{(1)}((z_{ii}) | (\alpha_i)).$$

Daraus folgt die Aussage des Satzes unmittelbar. \square

Für den Spezialfall der PLI-Permutationen gilt nun, dass $z_{ij} = 0$ falls $j \notin \{i, i + 1\}$; daher reduziert sich die erzeugende Funktion auf:

$$\left[\prod_{1 \leq j \leq p} (1 - z_{ii}) - \prod_{1 \leq j \leq p} z_{i, i+1} \right]^{-1} \times \prod_{1 \leq i \leq p} (1 - z_{ii})^{-\alpha_i}.$$

In diese erzeugende Funktion für die PLI-Permutationen hat man nun die erzeugenden Funktionen für die PLI-Bäume per Substitution einzubringen; gemäss einer früheren Bemerkung ist also in dem vorigen Ausdruck für $(1 \leq i \leq p)$

$$z_{ii} \text{ durch } x_i T_{i-1}^{(p)}(X) \text{ , und } z_{i-1,i} \text{ durch } x_i T_i^{(p)}(X)$$

zu ersetzen.

Damit erhält man also die erzeugende Funktion für die PLI-Endofunktionen in der

Form

$$\left[\prod_{1 \leq i \leq p} (1 - x_i T_{i-1}^{(p)}(X)) - \prod_{1 \leq i \leq p} x_i T_i^{(p)}(X) \right]^{-1} \times \prod_{1 \leq i \leq p} (1 - x_i T_{i-1}^{(p)}(X))^{-\alpha_i}$$

Dies kann man noch etwas eleganter schreiben: wegen des algebraischen Systems (*), das die erzeugende Funktion der PLI-Bäume bestimmt, gilt ja:

$$\left(1 - x_i T_{i-1}^{(p)}(X) \right)^{-1} = T_i^{(p)}(X) \quad (1 \leq i \leq p).$$

Satz 4 :

Die erzeugende Funktion für PLI-Endofunktionen der Periodenlänge p kann geschrieben werden in der Form:

$$J^{(p)}(X | A) = \frac{\prod_{1 \leq i \leq p} T_i^{(p)}(X)^{\alpha_i}}{\prod_{1 \leq i \leq p} (1 - x_i T_{i-1}^{(p)}(X)) - \prod_{1 \leq i \leq p} x_i T_i^{(p)}(X)},$$

wobei die $T_i^{(p)}$ ($1 \leq i \leq p$) die erzeugenden Funktionen für PLI-Bäume der Periodenlänge p vom Typ i sind.

Angesichts dieser Form der erzeugenden Funktion liegt es nahe, die formalen Reihen

$$a_p(X) := \prod_{1 \leq i \leq p} (1 - x_i T_{i-1}^{(p)}(X))$$

und

$$b_p(X) := \prod_{1 \leq i \leq p} x_i T_i^{(p)}(X)$$

näher zu studieren. Dies geschieht im folgenden Abschnitt.

Literatur

1. Foata D. et P. Leroux, Polynomes de Jacobi, interpretation combinatoire et fonction generatrice, *Proc. Amer. Math. Soc.* 87 (1983), pp. 47-54.
2. Strehl V., Combinatorics of Jacobi-configurations I: complete oriented matchings, *Proc. Colloque Combinatoire Enumerative, UQAM 1985*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1234, Springer 1986, pp. 294-307.
3. Strehl V., Combinatorics of Jacobi-configurations II: a rational approximation via matching polynomials, *Seminaire Lotharingien de Combinatoire*, 13e session, Bologna 1985, (G. Nicoletti, ed.), Publications de l'IRMA, Strasbourg 1986, pp. 112-133.
4. Strehl V., Combinatorics of Jacobi-configurations III: the Srivastava-Singhal generating relation revisited, *Discrete Mathematics*, (erscheint).
5. Leroux P. and V. Strehl, Jacobi polynomials: combinatorics of the basic identities, *Discrete Mathematics* 57 (1985), pp. 167-187.
6. Foata D. and V. Strehl, Combinatorics of Laguerre polynomials, *Proc. Waterloo Silver Jubilee Conference*, in: *Enumeration and Design* (D.M Jackson and S.A. Vanstone, eds.), Academic Press, 1984, pp. 123-140.
7. Comtet L., *Advanced Combinatorics*, Reidel, 1974.
8. Foata D., *La serie generatrice exponentielle dans les problemes d'enumeration*, Seminaire de Mathematiques Superieures, Presses de l'Universite de Montreal, 1974.
9. Foata D., A combinatorial proof of Jacobi's identity, *Annals of Discrete Mathematics* 6 (1980), pp.125-135.
10. Viennot G., Heaps of pieces I: basic definitions and combinatorial lemmas, *Proc. Colloque Combinatoire Enumerative, UQAM 1985*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1234, Springer 1986, pp. 321-350.
11. Zeilberger D., A combinatorial approach to matrix algebra, *Discrete Mathematics*, 56 (1985), pp. 61-72.
12. Straubing H., A combinatorial proof of the Cayley-Hamilton Theorem, *Discrete Mathematics*, 43 (1983), pp. 273-279.

IV MATCHING-POLYNOME und PLI-BÄUME

Ist $G = (V, E)$ ein Graph (endlich, ohne loops und Mehrfachkanten) mit Knotenmenge V und Kantenmenge E , so bezeichnet man als *matching* von G eine Teilmenge μ der Kantenmenge, bei der je zwei Kanten aus μ , aufgefasst als Knotenpaare, disjunkt sind. Als *matching-Polynom* von G definiert man üblicherweise das Polynom (in einer Variablen x)

$$\sum \{ (-x)^{\#\mu} ; \mu \in M(G) \} ,$$

wobei $M(G)$ die Menge aller matchings von G bezeichnet.

Wir betrachten hier nun eine spezielle Klasse von Graphen, entsprechend der Situation bei den PLI-Endofunktionen, und zwar die Zyklen der Länge p ($p > 1$).

Sei $C^{(p)} = (V^{(p)}, E^{(p)})$ der Graph bestehend aus der Knotenmenge $V^{(p)} = \{1, 2, \dots, p\}$ und der Kantenmenge $E^{(p)} = \{e_j ; 1 \leq j \leq p\}$, wobei $e_j = \{j, j+1\}$ ($1 \leq j \leq p$) und $e_p = \{p, 1\}$. [Entsprechend früherer Konvention sind Indices *modulo* p zu lesen, also $e_p \equiv e_0$ bzw. $e_{p+1} \equiv e_1$]. Wir werden hier das Konzept der matching-Polynome in etwas allgemeinerer Form verwenden, indem wir jeder Kante e_j eine eigene Variable x_j zuordnen. Ist also $\nu \subseteq E^{(p)}$ irgendeine Kantenmenge, so sei ihr das (mit Vorzeichen versehene) Monom in $Z[x_1, x_2, \dots, x_p]$:

$$X^{(\nu)} := \prod_j \{ -x_j ; e_j \in \nu \}$$

zugeordnet. Das matching-Polynom (in p Variablen $X = (x_1, \dots, x_p)$) ist dann definiert als

$$c_p(X) = \sum \{ X^{(\mu)} ; \mu \in M(C^{(p)}) \} .$$

[Für den Fall $p = 1$, also den Fall des einpunktigen Graphen, wird $c_1(x_1) = 1$ gesetzt, d.h. dieser Graph lässt nur das (Kanten-)leere matching zu, die Kante $(1, 1)$ ist nicht zulässige Kante eines matchings.]

Dieses Polynom $c_p(X)$ lässt eine andere interessante Darstellung zu, die eng mit der kombinatorischen Struktur von matchings zusammenhängt. (%)

(%) Im Anhang B sind die ersten Werte der Polynome $c_p(X)$ angegeben

Als *Erweiterung* eines matchings $\mu \in M(C^{(p)})$ bezeichnen wir nun jede Kantenmenge $\nu \in E^{(p)}$ mit der Eigenschaft

$$\mu \subseteq \nu \quad \text{und} \quad \text{wenn } e_i \in \nu - \mu, \text{ dann } e_{i+1} \in \mu \quad (1 \leq i \leq p).$$

Eine Erweiterung ν von μ entsteht also dadurch, dass man zu einigen Kanten des matchings μ auch die jeweils unmittelbar "links" davon befindlichen (und daher nicht zu μ gehörigen !) Kanten mit in ν aufnimmt. Jedes $\mu \in M(C^{(p)})$ besitzt also $2^{\# \mu}$ verschiedene Erweiterungen; diese Menge wird mit $ext(\mu)$ bezeichnet.

Es ist leicht zu sehen, dass es zu jedem $\nu \subseteq E^{(p)}$ - ausgenommen den Extremfall $\nu = E^{(p)}$ - genau ein $\mu \in M(C^{(p)})$ gibt mit $\nu \in ext(\mu)$: ist nämlich $\langle i..j \rangle$ mit $1 \leq i, j \leq p$ ein zyklisches Intervall, d.h.

$$\langle i..j \rangle = \begin{cases} \{i, i+1, \dots, j\} & \text{falls } 1 \leq i \leq j \leq p, \\ \{i, i+1, \dots, p, 1, \dots, j\} & \text{falls } 1 \leq j < i \leq p, \end{cases}$$

mit $e_{i-1} \notin \nu$, $e_{j+1} \notin \nu$, und $e_k \in \nu$ für $k \in \langle i..j \rangle$, so muss im Falle $\nu \in ext(\mu)$ e_j zu μ gehören (wegen $e_{j+1} \notin \nu$, daher $e_{j+1} \notin \mu$), dann ist aber $e_{j-1} \notin \mu$ (da μ ein matching ist), somit muss wiederum e_{j-2} zu μ gehören, falls es zu ν gehört usw.

μ ist also durch ν bereits eindeutig bestimmt. Dieses Argument trifft nur dann nicht zu, wenn $\nu = E^{(p)}$ ist, wenn es also überhaupt keine "Lücke" in der Kantenfolge von ν gibt. In diesem Fall gilt aber:

-- wenn p gerade ist, dann gibt es zwei verschiedene $\mu \in M^{(p)}$ mit $E^{(p)} \in ext(\mu)$:

$$\mu_u = \{e_i; i \text{ ungerade}\} \quad \text{und} \quad \mu_g = \{e_i; i \text{ gerade}\};$$

-- wenn p ungerade ist, dann gibt es überhaupt kein $\mu \in M^{(p)}$ mit $E^{(p)} \in ext(\mu)$, denn ist $p = 2k + 1$, so müsste ein geeignetes μ mindestens $k + 1$ Kanten haben, kann also kein matching sein.

Betrachten wir nun für den Graphen $C^{(p)}$ die für die Kantenbewertungen verwendeten Variablen x_i und die davon abhängigen Größen y_i ($1 \leq i \leq p$) mit

$$y_i = 1 + x_i \cdot y_i \cdot y_{i-1} \quad (1 \leq i \leq p)$$

(wobei dann y_0 mit y_p identifiziert wird). Die y_i sind - wie schon in Satz 2 erwähnt - durch dieses System eindeutig bestimmte Elemente des Ringes $Z[[X]]$. Ordnen wir nun jeder Kante e_i von $C^{(p)}$ das Gewicht

ENDLICHE FUNKTIONEN

$$z_i := x_i \cdot y_{j-1}$$

zu und bilden zu jedem $\nu \subseteq E^{(p)}$ das Monom

$$Z^{(\nu)} := \prod_j \{ -z_j ; e_j \in \nu \}$$

so gilt das

Lemma 1: Für jedes $\mu \in M(C^{(p)})$ ist

$$X^{(\mu)} = \sum_{\nu} \{ Z^{(\nu)} ; \nu \in \text{ext}(\mu) \} .$$

Der Beweis beruht auf der simplen Tatsache:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i \cdot y_{i-1} - (y_{i-1} - 1) \cdot x_i \\ &= x_i \cdot y_{i-1} - (x_{i-1} \cdot y_{i-2} \cdot y_{i-2}) \cdot x_i \\ &= (1 - x_{i-1} \cdot y_{i-2}) \cdot x_i \cdot y_{i-1} \\ &= (1 - z_{i-1}) \cdot z_i , \end{aligned}$$

also

$$-x_i = (1 - z_{i-1}) \cdot (-z_i)$$

für $1 \leq i \leq p$, Indices *mod* p . Dies beschreibt aber gerade das lokale Verhalten der Erweiterungen:

---- ist e_i in μ vorhanden (Bewertung: $-x_i$), so muss e_i in ν vorhanden sein (Bewertung: $-z_i$) und e_{i-1} kann (Bewertung: $-z_{i-1}$) oder kann nicht (Bewertung: 1) in ν vorhanden sein. ■

Dieses Lemma, zusammen mit der Tatsache, dass die $\text{ext}(\mu)$ ($\mu \in M(C^{(p)})$) paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung die Menge der Teilmengen ν von $E^{(p)}$ ausschöpft - bis auf das Problem mit $\nu = E^{(p)}$, je nachdem ob p gerade oder ungerade ist - führt somit zu:

Satz 5:
$$c_p(X) = \sum \{ Z^{(\nu)} ; \nu \subseteq E^{(p)} \} + (-1)^p \cdot Z^{(E^{(p)})}$$

Andererseits ist aber offensichtlich

$$\sum \{ Z^{(\nu)} ; \nu \subseteq E^{(p)} \} = \prod_{1 \leq i \leq p} (1 - z_i) = \prod_{1 \leq i \leq p} (1 - x_i \cdot y_{i-1})$$

und

$$Z^{(E^{(p)})} = \prod_{1 \leq i \leq p} (-z_i) = (-1)^p \cdot \prod_{1 \leq i \leq p} x_i \cdot y_{i-1} = (-1)^p \cdot \prod_{1 \leq i \leq p} x_i \cdot y_i ,$$

so dass man schliessen kann:

$$\text{Satz 6 : } c_p(X) = \prod_{1 \leq i \leq p} (1 - x_i \cdot y_{i-1}) + \prod_{1 \leq i \leq p} x_i \cdot y_i ,$$

wobei die $y_i = y_i(X)$ ($1 \leq i \leq p$) durch das System (*) bestimmt sind.

Vergleicht man dieses Resultat mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts, so kann man notieren:

$$c_p(X) = a_p(X) + b_p(X) .$$

Nun gilt aber, wiederum wegen (*) :

$$\begin{aligned} a_p(X) \cdot b_p(X) &= \prod_{1 \leq i \leq p} (1 - x_i \cdot y_{i-1}) \cdot x_i \cdot y_i \\ &= \prod_{1 \leq i \leq p} (x_i \cdot y_i - x_i \cdot y_{i-1} \cdot x_i \cdot y_i) \\ &= \prod_{1 \leq i \leq p} x_i \end{aligned}$$

Damit kennt man $a_p(X)$ und $b_p(X)$ explizit.

Satz 7 :

Die formalen Reihen $a_p(X)$ und $b_p(X)$ sind die Lösungen (in $Z[[X]]$) der quadratischen Gleichung

$$y^2 - c_p(X) \cdot y + x_1 \cdots x_p = 0 .$$

Damit gilt also explizit:

$$a_p(X) = \frac{c_p(X) + \sqrt{c_p^2 - 4x_1 \cdots x_p}}{2}$$

und

$$b_p(X) = \frac{c_p(X) - \sqrt{c_p^2 - 4x_1 \cdots x_p}}{2}$$

[Die Vorzeichen der Wurzel, die jeweils zu nehmen sind, erhält man durch Vergleich der Reihenentwicklungen]

Damit lässt sich nun auch der im Satz auftretende Nenner der erzeugenden Funktion der PLI-Endofunktionen explizit mit Hilfe der matching-Polynome $c_p(X)$ ausdrücken:

Satz 8 :

Für die erzeugende Funktion der PLI-Endofunktionen der Periodenlänge p gilt

$$J^{(p)}(X | A) = \frac{\prod_{1 \leq i \leq p} [T_i^{(p)}(X)]^{\alpha_i}}{[c_p(X)^2 - 4x_1 \cdots x_p]^{1/2}} .$$

Insbesondere ist damit eine elegante, kompakte Form für die erzeugende Funktion $J^{(p)}(X | 0)$ gefunden worden, interessanterweise ohne das System (*) explizit zu lösen, also ohne die $T_i^{(p)}$ explizit zu bestimmen.

Korollar 1 :

Die erzeugende Funktion für PLI-Endofunktionen der Periodenlänge p ohne Berücksichtigung der Zyklenzahlen, d.h. mit $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$ ist gegeben durch:

$$J^{(p)}(X | 0) = [c_p(X)^2 - 4x_1 \cdots x_p]^{-1/2} .$$

Will man nun die $J^{(p)}(X | A)$ ebenfalls explizit angeben, so kommt man nicht umhin, die erzeugenden Funktionen $T_i^{(p)}(X)$ ($1 \leq i \leq p$) zu bestimmen - es genügt natürlich, eine von ihnen, etwa $T_1^{(p)}$ oder $T_p^{(p)}$ auszurechnen, die anderen ergeben sich dann wegen der zyklisch-symmetrischen Natur der Problemstellung daraus durch zyklische Permutation der Variablen:

$$T_i^{(p)}(x_1, x_2, \cdots, x_p) = T_1^{(p)}(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_p, x_1, \cdots, x_{i-1}) .$$

Zur Lösung dieser Aufgabe kann man verschiedene Wege einschlagen: so kann man beispielsweise das System (*), geschrieben in der Form

$$y_i = \frac{1}{1 - x_i y_{i-1}} \quad (1 \leq i \leq p)$$

dazu verwenden, eine (endliche) Kettenbruchdarstellung für y_p zu finden:

$$y_p = \frac{1}{1 - \frac{x_{p-1}}{1 - \frac{x_{p-2}}{\dots}}}$$

$$1 - \frac{x_2}{1 - x_1 y_p}$$

aus der man eine quadratische Gleichung für y_p gewinnt, die man dann explizit löst. Dieser formale Ansatz lässt sich durchaus konstruktiv interpretieren, weiss man doch seit den Arbeiten von Ph. FLAJOLET ^[1], ^[2] (siehe auch R. KEMP ^[3] und I. GOULDEN/D. JACKSON ^[4]) mit welchen kombinatorische Strukturen solche Kettenbrüche in Verbindung zu bringen sind. Direkter wäre in diesem Falle noch der Ansatz, erzeugende Funktionen für gewisse "baumartige" Strukturen ("tree-like-walks") als Quotienten von matching-Polynomen darzustellen, vgl. dazu Arbeiten von Ch. GODSIL ^[5], M. DESAINTE-CATHERINE ^[6], G. VIENNOT ^[7]); er liesse sich auf die hier gegebene Situation der PLI-Endofunktionen unmittelbar anwenden. Hier soll aber eine vierte Alternative besprochen werden, die einen ganz schnellen Zugang zu dem gewünschten Resultat liefert, da bereits wesentliche Vorarbeit in dieser Richtung geleistet worden ist.

Bezeichnen wir für $n \geq 1$ mit $L^{(n)}$ den (linearen) Graphen mit der Knotenmenge $\{1, 2, \dots, n\}$ und der Kantenmenge $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$, wobei $e_i = \{i, i+1\}$ ($1 \leq i \leq n$). Mit der Bewertung $-x_i$ für die Kante e_i definiert man wie früher das matching-Polynom ($\%$)

$$l_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) := \sum \{ X^\mu; \mu \in M(L^{(n)}) \} .$$

Ist nun $y_0 \in Z[[x_1, \dots, x_{n-1}]]$ beliebig vorgegeben, so sind durch das System

$$y_i = 1 + x_i \cdot y_i \cdot y_{i-1}, \quad (1 \leq i < n)$$

die $y_i \in Z[[x_1, \dots, x_{n-1}]]$ ($1 \leq i < n$) eindeutig bestimmt. Man zeigt, in völliger Analogie zum Beweis von *Lemma 1* und den Sätzen 5 und 6 :

Lemma 2:
$$l_n(x_1 \cdot y_0, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < n} (1 - x_i \cdot y_{i-1}) .$$

Angewandt auf den Fall $n = p + 1$ ergibt sich daraus, indem man nun noch $y_0 \equiv y_p$ fordert, d.h. y_0 und die übrigen y_i durch das System (*) eindeutig fixiert:

Satz 9: $a_p(X) = l_{p+1}(x_1 \cdot y_p, x_2, x_3, \dots, x_p)$.

Dabei ist $y_p = y_p(X)$ Bestandteil der Lösung des Systems (*).

Die offensichtliche Rekursionsformel für die Polynome l_n :

$$l_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = l_n(x_2, \dots, x_n) - x_1 \cdot l_{n-1}(x_3, \dots, x_n)$$

erlaubt es nun, y_p zu isolieren:

$$x_1 \cdot y_p = \frac{-a_p(X) + l_p(x_2, x_3, \dots, x_p)}{l_{p-1}(x_3, x_4, \dots, x_p)}$$

Setzen wir für $a_p(X)$ die explizite Darstellung aus Satz 7 ein und berücksichtigen noch

$$c_p(x_1, \dots, x_p) = l_p(x_2, \dots, x_p) - x_1 \cdot l_{p-1}(x_3, \dots, x_p),$$

was wegen der kombinatorischen Bedeutung der beteiligten Polynome offensichtlich ist, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_1 y_p &= \frac{-c_p(x_1, \dots, x_p) - \sqrt{+ 2 l_p(x_2, \dots, x_p)}}{2 l_{p-1}(x_3, \dots, x_p)} \\ &= \frac{l_p(x_2, \dots, x_p) + x_1 \cdot l_{p-1}(x_3, \dots, x_p) - \sqrt{}}{2 l_{p-1}(x_3, \dots, x_p)} \\ &= \frac{c_p(-x_1, x_2, \dots, x_p) - \sqrt{}}{2 l_{p-1}(x_3, \dots, x_p)}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\sqrt{} = [c_p(x_1, \dots, x_p)^2 - 4x_1 \dots x_p]^{1/2}$.

Damit ist das Ziel erreicht, die erzeugenden Funktionen $y_i(X) = T_i^{(p)}(X)$ für PLI-Bäume explizit zu bestimmen. Eine andere Form der Darstellung erhält man, wenn man noch einmal

(%) Die ersten Werte dieser Polynome sind im Anhang B angegeben.

$$y_1 = \frac{1}{1 - x_1 y_p}$$

ausnützt. Zunächst ist

$$1 - x_1 y_p = \frac{c_p(x_1, x_2, \dots, x_p) + \sqrt{-2l_p(x_2, \dots, x_p) + 2l_{p-1}(x_3, \dots, x_p)}}{2l_{p-1}(x_3, \dots, x_p)}.$$

Mit

$$\begin{aligned} c_p(x_1, \dots, x_p) &= l_p(x_3, \dots, x_p, x_1) - x_2 \cdot l_{p-2}(x_4, \dots, x_p), \\ l_p(x_2, \dots, x_p) &= l_{p-1}(x_3, \dots, x_p) - x_2 \cdot l_{p-2}(x_4, \dots, x_p), \\ c_p(x_1, -x_2, x_3, \dots, x_p) &= l_p(x_3, \dots, x_p, x_1) + x_2 \cdot l_{p-2}(x_4, \dots, x_p), \end{aligned}$$

folgt daraus

$$1 - x_1 y_p = \frac{c_p(x_1, -x_2, x_3, \dots, x_p) + \sqrt{-2l_p(x_2, \dots, x_p) + 2l_{p-1}(x_3, \dots, x_p)}}{2l_{p-1}(x_3, \dots, x_p)}.$$

Aufgrund der zyklischen Symmetrie kann man zusammenfassend feststellen:

Satz 10 :

Die erzeugenden Funktionen $T_i^{(p)}$ der PLI-Bäume (mit Periodenlänge p) vom Typ i ($1 \leq i \leq p$) lassen sich mit Hilfe von matching-Polynomen wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} T_i^{(p)}(X) &= \frac{c_p(x_1, \dots, x_i, -x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_p) - \sqrt{-2l_p(x_2, \dots, x_p) + 2l_{p-1}(x_3, \dots, x_p)}}{2x_{i-1} \cdot l_{p-1}(x_{i+3}, x_{i+4}, \dots, x_i)} \\ &= \frac{2l_{p-1}(x_{i+2}, x_{i+3}, \dots, x_{i-1})}{c_p(x_1, \dots, x_i, -x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_p) + \sqrt{-2l_p(x_2, \dots, x_p) + 2l_{p-1}(x_3, \dots, x_p)}}, \end{aligned}$$

wobei $\sqrt{} = [c_p(x_1, \dots, x_p)^2 - 4x_1 \cdots x_p]^{1/2}$.

Setzt man die zweite Form der $T_i^{(p)}(X)$ in den Ausdruck von *Satz 8* ein, so erhält man zusammen mit *Satz 1* die erzeugende Funktion (5) von SINGHAL.

Literatur

1. Flajolet Ph., Analyse d'algorithmes de manipulation d'arbres et de fichiers, *Cahiers du B.U.R.O.*, 38-39 (1981), pp. 1-209.
2. Flajolet Ph., Combinatorial aspects of continued fractions, *Discrete Mathematics*, 32 (1980), pp. 125-161.
3. Kemp R., *Fundamentals of the Average Case Analysis of Particular Algorithms*, Wiley-Teubner, 1984.
4. Goulden I.P. and D.M. Jackson, Path generating functions and continued fractions, Research report 83-36, University of Waterloo, 1983.
5. Godsil Ch., Matchings and walks in graphs, *Journ. Graph Theory*, 5 (1981), pp.285-291.
6. Desainte-Catherine M., *Couplages et pfaffiens en combinatoire, physique et informatique*, these 3e cycle, Bordeaux, 1983.
7. Viennot G., *A combinatorial theory for general orthogonal polynomials*, Lecture Notes, Universite du Quebec a Montreal, 1984.

V Identitäten vom BROCK-Typ

Seien nun p, q positive natürliche Zahlen. Wir betrachten nun PLI-Endofunktionen mit der Periodenlänge $p \cdot q = m$, also Paare $\Phi = (S, f)$ mit $S = (S_1, S_2, \dots, S_m)$, die den im Abschnitt III genannten Bedingungen genügen (jetzt natürlich mit $p \cdot q$ an Stelle von p). Wir werden jetzt die früher eingeführte Bewertung vergrößern, indem wir alle Variablen x_i identifizieren, die zu derselben Restklasse $\text{mod } p$ gehören ($1 \leq i \leq m$); d.h. die Punkte der Klassen S_i, S_j werden als zu derselben "Sorte" gehörig betrachtet, falls $i \equiv j \text{ mod } p$. Die Zählvariablen α_i für die Zyklen der f_i ($1 \leq i \leq m$) werden allerdings weiterhin unterschieden.

Sei also $X = (x_1, \dots, x_p)$ ein Vektor von p Variablen und $A = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq m}$ ein Vektor von m Variablen. Als Bewertung für PLI-Endofunktionen $\Phi(S, f)$ nehmen wir nun:

$$w_{X,A}^{(p,q)}(\Phi) = \prod_{1 \leq i \leq m} (1 + \alpha_i)^{\text{cyc}(f_i)} X^n$$

wobei $n = (n_1, \dots, n_p) \in N^p$ mit $n_i = \sum \{ \#S_j ; j \equiv i \text{ mod } p \}$.

Als erzeugende Funktion betrachten wir nun

$$J^{(p,q)}(X | A) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum^{(n)} \{ w_{X,A}^{(p,q)}(\Phi) \},$$

wobei die innere Summe über alle PLI-Endofunktionen der Periodenlänge $m = p \cdot q$ von $[1..n]$ läuft.

Es ist also

$$J^{(p,q)}(X | A) = J^{(m)}(\langle X, \dots, X \rangle_q | A)$$

wobei $\langle X, \dots, X \rangle_q$ die q -fache Repetition des Variablenvektors X ist:

$$\langle X, \dots, X \rangle_q = (x_1, x_2, \dots, x_p, x_1, \dots, x_p, \dots, x_1, \dots, x_p).$$

Notieren wir zunächst einmal die unmittelbare Konsequenz aus Satz 1:

Korollar 2:
$$J^{(p,q)}(X | A) = \sum_n H^{(p,q)}(n | A) \cdot X^n,$$

wobei die Summation über alle $n = (n_1, \dots, n_p) \in N^p$ läuft. Dabei ist

$$H^{(p,q)}(n | A) = \sum_I \binom{\alpha_1 + i_1 + i_2}{i_1} \binom{\alpha_2 + i_2 + i_3}{i_2} \dots \binom{\alpha_m + i_m + i_1}{i_m},$$

wobei summiert wird über alle $I = (i_1, i_2, \dots, i_m) \in N^m$ mit

$$\sum \{i_j; j \equiv k \pmod p\} = n_k \quad (1 \leq k \leq p).$$

Nun zu der Darstellung von $J^{(p,q)}(X | A)$, die sich aus der Interpretation der PLI-Endofunktionen als Permutationen von PLI-Bäumen ergibt. Aus der periodischen Repetition der Sortenvariablen folgt, dass PLI-Bäume vom Typ i bzw. vom Typ j ununterscheidbar sind, falls $i \equiv j \pmod p$. Sie sind auch nicht zu unterscheiden von den PLI-Bäumen der Periodenlänge p vom Typ i , falls $1 \leq i \leq p$. Dann sind aber auch die erzeugenden Funktionen $T_i^{(m)}(X)$ und $T_j^{(m)}(X)$ gleich und darüber hinaus auch gleich zu $T_i^{(p)}(X)$, falls $i \equiv j \pmod p$ und $1 \leq i \leq p$. Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} J^{(p,q)}(X | A) &= \frac{\prod_{1 \leq i \leq m} [T_i^{(m)}]^{\alpha_i}}{\prod_{1 \leq i \leq m} (1 - x_i T_{i-1}^{(m)}) - \prod_{1 \leq i \leq m} x_i T_i^{(m)}} \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i \leq p} [T_i^{(p)}]^{\hat{\alpha}_i}}{\prod_{1 \leq i \leq p} [1 - x_i T_{i-1}^{(p)}]^q - \prod_{1 \leq i \leq p} [x_i T_i^{(p)}]^q} \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i \leq m} [T_i^{(m)}]^{\hat{\alpha}_i}}{[a_p(X)]^q - [b_p(X)]^q} \end{aligned}$$

mit $\hat{\alpha}_i = \sum \{\alpha_j; j \equiv i \pmod p\}$, $(1 \leq i \leq p)$.

Den Nenner im letzten Ausdruck kann man umschreiben. Dazu definieren wir uns Polynome $\lambda_n(u, v) \in Z[u, v]$ ($n \geq 0$) durch

$$\lambda_n(u, v) = v^n \cdot l_n\left(\frac{u}{v^2}, \dots, \frac{u}{v^2}\right),$$

wobei die $l_n = l_n(x_1, \dots, x_n)$ wieder die matching-Polynome aus Abschnitt IV sind (%). Es gilt also:

↳

$$\lambda_n(u, v) = \sum \{ (-u)^{\#\mu} v^{n-2\mu} ; \mu \in M(L^{(n)}) \} .$$

Kombinatorisch haben diese Polynome also die Bedeutung von matching-Polynomen, bei den Kanten (Bewertung: $-u$) und freie Knoten (Bewertung: v) gezählt werden. Diese Polynome $\lambda_n(u, v)$ genügen der Rekursion

$$\begin{aligned} \lambda_0(u, v) &= 1, \quad \lambda_1(u, v) = v, \\ \lambda_{n+1}(u, v) &= v \cdot \lambda_n(u, v) - \lambda_{n-1}(u, v) \quad (n \geq 1), \end{aligned}$$

was sie sofort als Variante der Tschebycheff-Polynome ausweist. Es gilt nun das

Lemma 3: $u^n - v^n = (u - v) \cdot \lambda_{n-1}(u \cdot v, u + v) .$

Auf den kurzen und eleganten kombinatorischen Beweis (mittels Involutionprinzip) dieser Tatsache soll nicht verzichtet werden:

Betrachten wir Funktionen $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{+u, -u, v\}$ mit $f(1) \neq -u$ und

$$\text{wenn } f(i) = -u, \text{ dann } f(i-1) = v \quad (1 < i \leq n).$$

Für jede solche Funktion f sei

$$m(f) := \prod_{1 \leq i \leq n} f(i) ;$$

F_n bezeichne die Menge aller dieser Funktionen.

Interpretiert man den Ausdruck

$$\lambda_n(u \cdot v, u + v)$$

so, dass jedem matching $\mu \in M(L^{(n)})$ $2^{n-2\#\mu}$ Funktionen $f \in F_n$ folgendermassen zugeordnet werden:

- für jede Kante $e_i = (i, i+1) \in \mu$ wird $f(i) = v$ und $f(i+1) = -u$ gesetzt;
- für jeden *nicht* in einer der Kanten $e_i \in \mu$ enthaltenen Punkt j wird $f(j) = u$ oder $f(j) = v$ gesetzt;

so gilt offenbar:

$$\sum \{ m(f) ; f \in F_n \} = \lambda_n(u \cdot v, u + v) .$$

(%) Siehe Anhang B für die ersten Werte dieser Polynome

ENDLICHE FUNKTIONEN

Für jedes $f \in F_n$ sei nun $i_0(f)$ die früheste Stelle $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ mit $f(i-1) = v$ und $f(i) \in \{+u, -u\}$ - falls es eine solche Stelle überhaupt gibt (ansonsten ist sie nicht definiert). Eine Involution Γ von F_n kann nun folgendermassen definiert werden:

- wenn $i_0(f)$ existiert, dann entsteht $\Gamma(f)$ aus f , indem man das Vorzeichen an eben dieser Stelle $i_0(f)$ umkehrt. [Ersichtlich existiert dann $i_0(\Gamma(f))$ und ist gleich $i_0(f)$].
- wenn $i_0(f)$ nicht existiert, dann sei $\Gamma(f) = f$.

Γ ist eine Involution auf F_n , und es gilt

$$m(f) + m(\Gamma(f)) = 0, \text{ falls } \Gamma(f) \neq f.$$

Die Fixpunkte von Γ sind aber genau die $f^{(t)} \in F_n$, ($0 \leq t \leq n$) mit:

$$f^{(t)}(1) = \dots = f^{(t)}(t) = +u, \quad f^{(t)}(t+1) = \dots = f^{(t)}(n) = v.$$

Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lambda_n(u \cdot v, u + v) &= \sum \{ m(f) ; f \in F_n \} \\ &= \sum \{ m(f) ; f \in F_n, \Gamma(f) = f \} \\ &= \sum_{0 \leq t \leq n} \{ m(f^{(t)}) \} \\ &= \sum_{0 \leq t \leq n} u^t \cdot v^{n-t} \\ &= \frac{u^{n+1} - v^{n+1}}{u - v} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Da wir aus dem vorigen Abschnitt wissen, dass für die erzeugenden Funktionen $a_p(X)$ und $b_p(X)$ gilt:

$$a_p(X) + b_p(X) = c_p(X),$$

$$a_p(X) \cdot b_p(X) = x_1 \cdots x_p,$$

erhalten wir:

$$J^{(p,q)}(X | A) = \frac{\prod_{1 \leq i \leq p} [T_i^{(p)}]^{\hat{\alpha}_i}}{(a_p(X) - b_p(X)) \cdot \lambda_{q-1}(x_1 \cdots x_p, c_p(X))} .$$

Mit nochmaliger Anwendung von Satz 4 folgt dann:

Satz 11 :

$$J^{(p,q)}(X | A) = \frac{1}{\lambda_{q-1}(x_1 \cdots x_p, c_p(X))} \times J^{(p)}(X | \hat{A})$$

wobei $\hat{A} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p)$ mit $\hat{\alpha}_i = \sum \{ \alpha_j ; j \equiv i \text{ mod } p \}, (1 \leq i \leq p)$.

Dieses Resultat enthält nun - via Koeffizientenvergleich für die beteiligten Reihen, wenn man vorher noch das Nennerpolynom

$$\lambda_{q-1}(x_1 \cdots x_p, c_p(X)) , \tag{&}$$

das ich auch als *Rekursionspolynom* bezeichnen möchte, auf die linke Seite bringt - eine doppelt-unendliche Familie (durch die Parameter p und q indiziert) von Identitäten vom BROCK-Typ. Das Polynom (&) regelt ja gerade, welche Linearkombination von Koeffizienten des Typs $H^{(p,q)}(n | A)$ ein $H^{(p,1)}(m | \hat{A})$ ergibt. [Hierbei sind $n = (n_1, \dots, n_p)$ und $m = (m_1, \dots, m_p) \in N^p$, $A = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$, und dazu \hat{A} wie in Satz 11 beschrieben]. In dieser Linearkombination treten für $m \in N^p$ nur solche Parameter $n \in N^p$ auf, für die $n_1 \leq m_1, \dots, n_p \leq m_p$ gilt, und die Koeffizienten der Linearkombination hängen nur von den Differenzen $m_i - n_i$ ($1 \leq i \leq p$) ab, nicht aber von den absoluten Werten der m_i ($1 \leq i \leq p$). Man kann also von einer multivariaten Rekursion für die $H^{(p,q)}(n | A)$ mit konstanten Koeffizienten sprechen, in der die $H^{(p,1)}(m | \hat{A})$ als inhomogene Terme auftreten. Daher die Bezeichnung *Rekursionspolynom* für das Polynom (&).

Zur Illustration betrachten wir zunächst den Fall $q = 2$, das sind gerade die im Abschnitt I behandelten Ergebnisse! In diesem Fall ist - da ja $\lambda_1(u, v) = v$ ist - das Rekursionspolynom (&) gegeben durch das matching-Polynom

$$c_p(x_1, \dots, x_p) .$$

Die Fälle

$$\begin{aligned} p = 2 : \quad c_2(x_1, x_2) &= 1 - x_1 - x_2 \\ p = 3 : \quad c_3(x_1, x_2, x_3) &= 1 - x_1 - x_2 - x_3 \\ p = 4 : \quad c_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 \end{aligned}$$

liefern gerade die Identitäten (1), (2), und (3), wobei der Fall $p = 2$ ja auch (4) mit enthält. Die generelle Aussage, dass $c_p(x_1, \dots, x_p)$ das Rekursionspolynom im Fall $q = 2$ ist, ist äquivalent zu dem Resultat (6) von SINGHAL (bzw. zu dem von CARLITZ im unparametrisierten Fall).

Betrachten wir nun den kleinsten Fall, der *nicht* in den im Abschnitt I zitierten Resultaten enthalten ist: $q = 3, p = 2$. Wegen

$$\lambda_2(u, v) = v^2 - u$$

und

$$c_2(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2$$

erhält man für das Rekursionspolynom:

$$\begin{aligned} \lambda_2(x_1 \cdot x_2, c_2(x_1, x_2)) &= (1 - x_1 - x_2)^2 - x_1 \cdot x_2 \\ &= 1 - 2x_1 - 2x_2 + x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 . \end{aligned}$$

Als Identität vom BROCK-Typ (ich verzichte hier darauf, die α -parametrisierte Form anzugeben, die natürlich ganz analog aussieht) ergibt sich daraus:

Sei

$$h(n, m) = \sum_I \binom{i_1 + i_2}{i_1} \binom{i_2 + i_3}{i_2} \dots \binom{i_6 + i_1}{i_6} ,$$

wobei die Summation über alle $I = (i_1, i_2, \dots, i_6) \in N^6$ läuft mit:

$$i_1 + i_3 + i_5 = n \quad \text{und} \quad i_2 + i_4 + i_6 = m .$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} h(n, m) - 2h(n-1, m) - 2h(n, m-1) + h(n-2, m) + h(n-1, m-1) + h(n, m-2) \\ = \binom{n+m}{n} \binom{m+n}{m} = \binom{n+m}{n}^2 . \end{aligned}$$

Es lohnt sich, noch kurz auf den Fall $p = 2, q$ beliebig, also sozusagen das andere Extrem zu dem "klassischen" Fall $q = 2, p$ beliebig, einzugehen. In diesem Fall lautet das Rekursionspolynom also

$$\lambda_{q-1}(x_1 \cdot x_2, 1 - x_1 - x_2) .$$

In dem Artikel ^[1] wurde gezeigt, dass sich dieses Polynom auch noch anders schreiben lässt. Sei dazu

$$L_n(u, v) := l_n(u, v, u, v, u, \dots),$$

d.h. die Kanten des Graphen $L^{(n)}$ werden abwechselnd mit den Gewichten $-u$ und $-v$ belegt. Dann gilt die sog. *Verdoppelungsformel* :

$$\lambda_n(u \cdot v, 1 - u - v) = L_{2n+1}(u, v).$$

Das Rekursionspolynom ist in diesem Fall also das matching-Polynom

$$L_{2q-1}(x_1, x_2).$$

Ausserdem hat in diesem Fall das Gleichungssystem (*) für die PLI-Bäume

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + x_1 y_1 y_2 \\ y_2 &= 1 + x_2 y_2 y_1 \end{aligned}$$

eine sehr elegante Lösung (auf die Ausführung der Details möchte ich hier verzichten). Es gilt nämlich:

$$y_i = 1 + x_i \cdot \beta(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2).$$

wobei

$$\beta(u, v) \equiv \sum_{n, k} \beta_{n, k} u^n v^{n-k}$$

die erzeugende Funktion der von G. KREWERAS ^[2] so benannten β -Verteilung ist. Es gilt explizit:

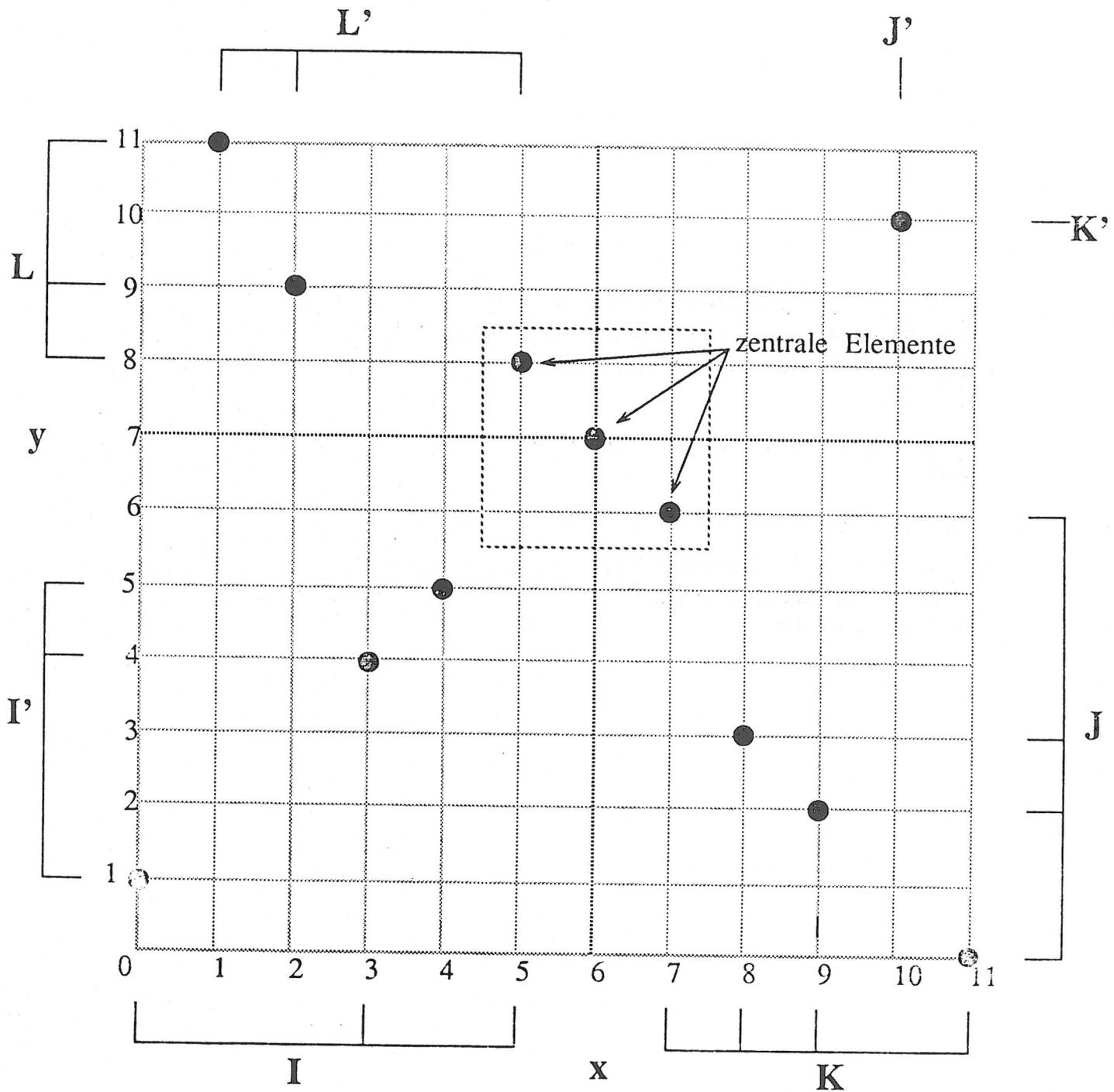
$$\beta_{n, k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k-1} \binom{n}{k} \quad (1 \leq k \leq n)$$

Diese Zahlen, gelegentlich auch als RUNYON-Zahlen (in ^[3]) oder NARAYANA-Zahlen bezeichnet, sind wiederholt in der Literatur behandelt worden. Interessante kombinatorische Eigenschaften dieser Zahlen, die überdies eng mit den hier behandelten Problemen zusammenhängen, findet man in der these ^[4] von M. VAUCHAUSSADE DE CHAUMONT.

Literatur

1. Strehl V., Combinatorics of Jacobi-configurations II: a rational approximation of the generating function, *Seminaire Lotharingien de Combinatoire*, 13e session, Bologna 1985, (G. Nicoletti, ed.), Publications de l'IRMA, Strasbourg, 1986, pp. 113-133.
2. Kreweras G., Sur les éventails de segments, *Cahiers du B.U.R.O* 15 (1975), pp. 3-41.
3. Riordan J., *Combinatorial Identities*, Wiley, 1968.
4. Vauchassade de Chaumont M., *Nombre de Strahler, langages algebriques et denombrement de structures secondaires en biologie moleculaire*, these, Universite de Bordeaux I, 1985.

Anhang A-I : zum Beweis der Identität von Brock



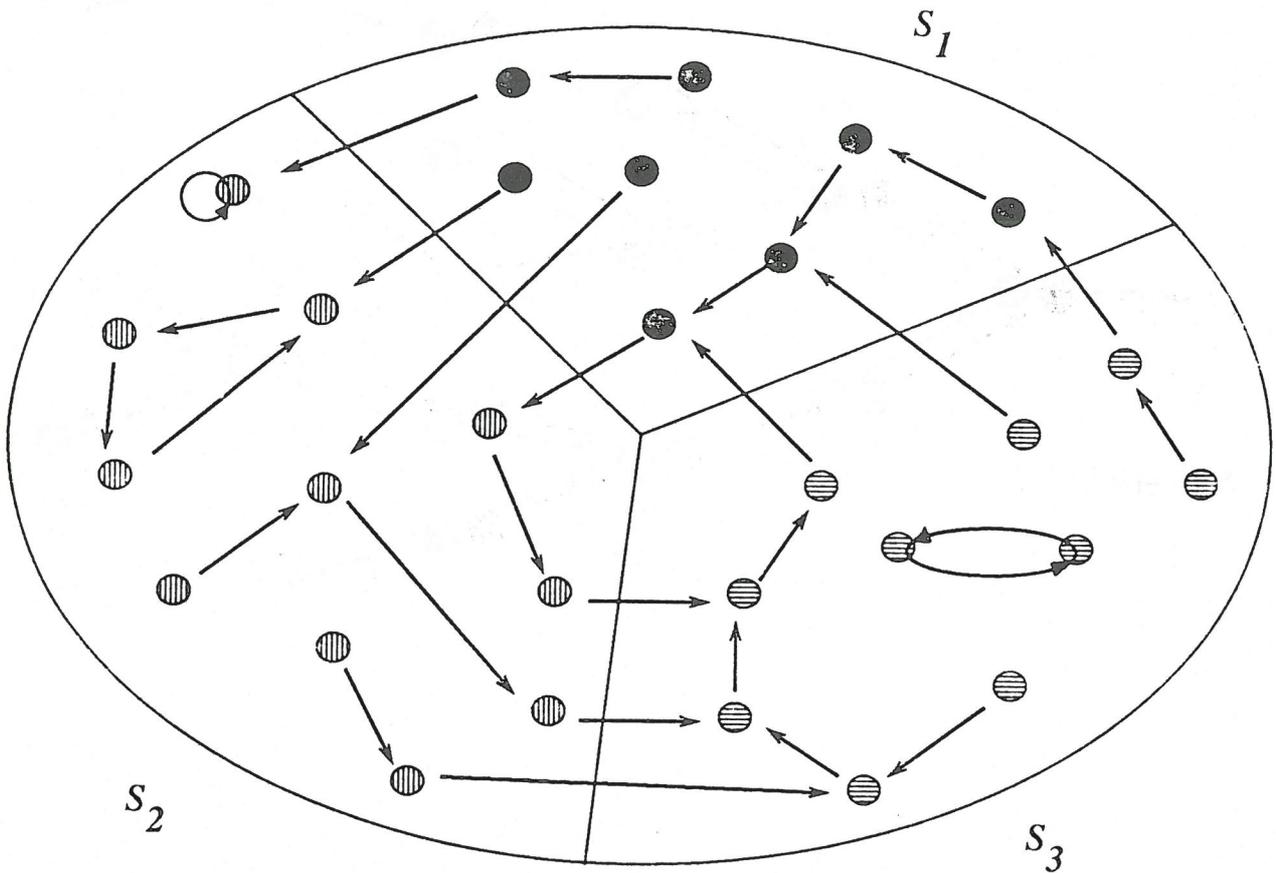
Beispiel zum Beweis der Identität von Brock:

$$m = 4, n = 7, x = 6, y = 7$$

$$I = \{0, 3, 5\}, J = \{0, 2, 3, 6\}, K = \{7, 8, 9, 11\}, L = \{8, 9, 11\};$$

$$zI = \{(5, 8), (6, 7), (7, 6)\}$$

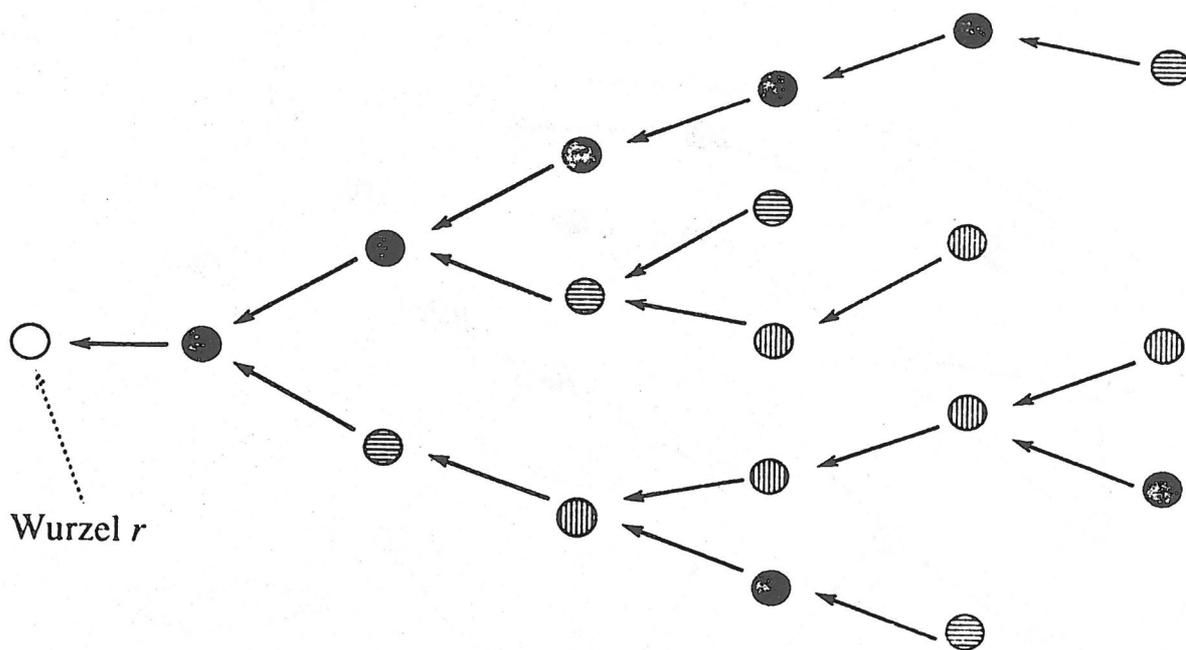
Anhang A-II : PLI-Endofunktionen



Beispiel für eine PLI-Endofunktion ($p=3$); die Bewertung für diese Funktion ist:

$$w_{X,A}(\Phi) = (1+\alpha_2)^2 (1+\alpha_3) x_1^8 x_2^{11} x_3^{10}$$

Anhang A-III : PLI-Bäume



$$T = \{ " \text{ (solid black) } ", " \text{ (horizontally striped) } ", " \text{ (vertically striped) } " \}$$

Beispiel für einen PLI-Baum vom Typ 1 ; die Bewertung dieses Baumes ist

$$v_x(\tau) = x_1^7 x_2^6 x_3^5$$

Anhang A-IV : Komposition von PLI-Bäumen zu PLI-Endofunktionen

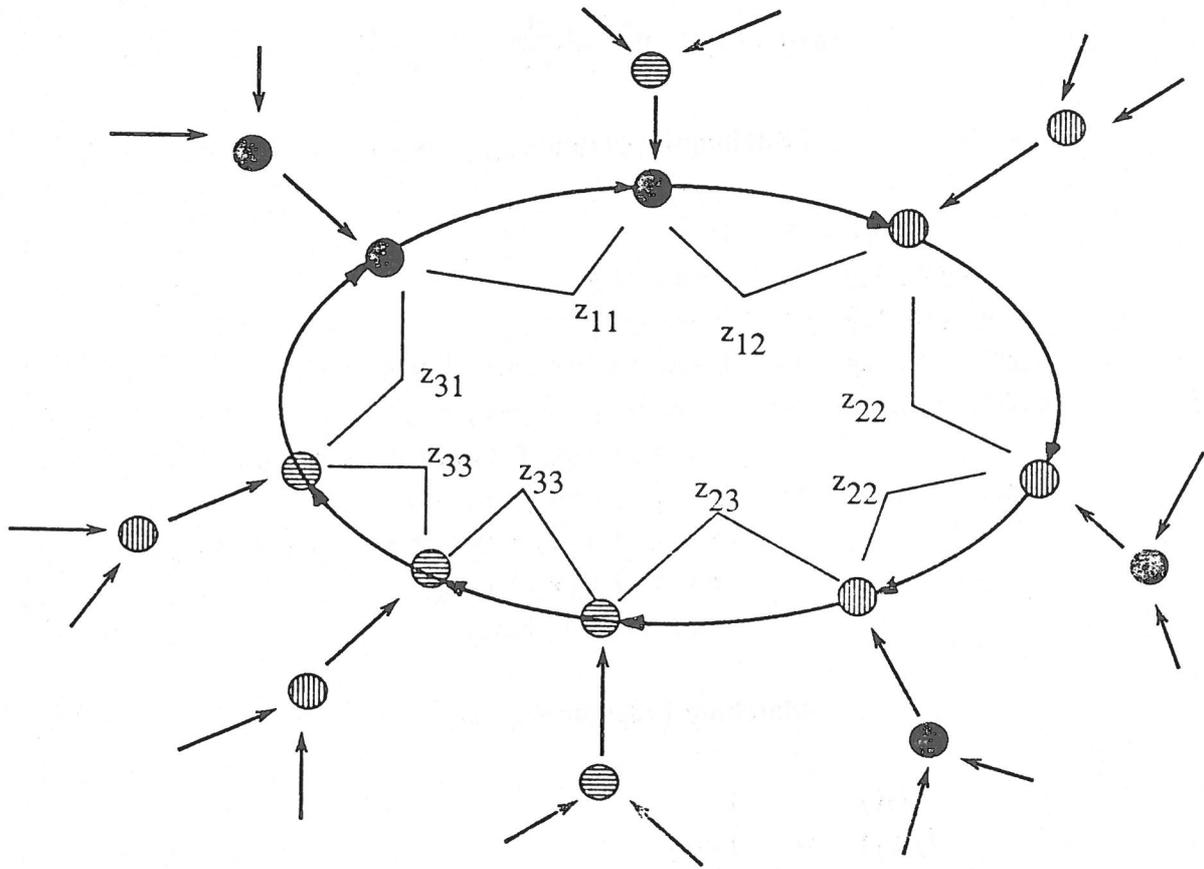


Illustration für die erlaubte Zusammensetzung von PLI-Bäumen zu PLI-Endofunktionen (vgl. Abschnitt 3, vor Satz 3).

Anhang B : Matching-Polynome

Dieser Anhang enthält als ergänzende Beispiele zu den Abschnitten IV und V die matching-Polynome $c_n, l_n, \lambda_n, \gamma_n$ für $1 \leq n \leq 6$. Dabei werden die Polynome γ_n , die in dieser Arbeit nicht vorkommen, aus den Polynomen c_n in der gleichen Weise durch Spezialisierung gewonnen wie die λ_n aus den l_n , nämlich:

$$\gamma_n(u, v) := v^n \cdot c_n\left(\frac{u}{v^2}, \dots, \frac{u}{v^2}\right).$$

Matching-Polynome $c_n, 1 \leq n \leq 6$

$$\begin{aligned} c_1(x_1) &= 1 \\ c_2(x_1, x_2) &= 1 - x_1 - x_2 \\ c_3(x_1, x_2, x_3) &= 1 - x_1 - x_2 - x_3 \\ c_4(x_1, \dots, x_4) &= 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_1x_3 + x_2x_4 \\ c_5(x_1, \dots, x_5) &= 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ &\quad + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_5 \\ c_6(x_1, \dots, x_6) &= 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 \\ &\quad + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_2x_6 \\ &\quad + x_3x_5 + x_3x_6 + x_4x_6 \\ &\quad - x_1x_3x_5 - x_2x_4x_6 \end{aligned}$$

Matching-Polynome $l_n, 1 \leq n \leq 6$

$$\begin{aligned} l_1() &= 1 \\ l_2(x_1) &= 1 - x_1 \\ l_3(x_1, x_2) &= 1 - x_1 - x_2 \\ l_4(x_1, x_2, x_3) &= 1 - x_1 - x_2 - x_3 + x_1x_3 \\ l_5(x_1, \dots, x_4) &= 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ &\quad + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 \\ l_6(x_1, \dots, x_5) &= 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ &\quad + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_5 \\ &\quad - x_1x_3x_5 \end{aligned}$$

ENDLICHE FUNKTIONEN

Matching-Polynome λ_n , $1 \leq n \leq 6$

$$\begin{aligned}\lambda_1(u, v) &= v \\ \lambda_2(u, v) &= v^2 - u \\ \lambda_3(u, v) &= v^3 - 2uv \\ \lambda_4(u, v) &= v^4 - 3uv^2 + u^2 \\ \lambda_5(u, v) &= v^5 - 4uv^3 + 3u^2v \\ \lambda_6(u, v) &= v^6 - 5uv^4 + 6u^2v^2 - u^3\end{aligned}$$

Matching-Polynome γ_n , $1 \leq n \leq 6$

$$\begin{aligned}\gamma_1(u, v) &= v \\ \gamma_2(u, v) &= v^2 - 2u \\ \gamma_3(u, v) &= v^3 - 3uv \\ \gamma_4(u, v) &= v^4 - 4uv^2 + 2u^2 \\ \gamma_5(u, v) &= v^5 - 5uv^3 + 5u^2v \\ \gamma_6(u, v) &= v^6 - 6uv^4 + 9u^2v^2 - 2u^3\end{aligned}$$

Die matching-Polynome $\lambda_n(u, v)$ und $\gamma_n(u, v)$ lassen sich leicht explizit angeben:

$$\begin{aligned}\lambda_n(u, v) &= \sum_{0 \leq 2i \leq n} \binom{n-i}{i} (-u)^i v^{n-2i} \\ \gamma_n(u, v) &= \sum_{0 \leq 2i \leq n} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} (-u)^i v^{n-2i}\end{aligned}$$

Der Zusammenhang mit den Tschebycheff-Polynomen $U_n(x) = \sin(n \arccos x)$ und $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ist folgendermassen:

$$\begin{aligned}\lambda_n(u^2, v) &= u^n \cdot U_n\left(\frac{v}{2u}\right) \\ \gamma_n(u^2, v) &= 2u^n \cdot T_n\left(\frac{v}{2u}\right)\end{aligned}$$

