

DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES ET DÉVELOPPEMENTS DE TAYLOR COMBINATOIRES*

PAR

GILBERT LABELLE**

Résumé. – Soit \mathcal{Q} l'ensemble des classes d'isomorphie d'espèces de structures atomiques, soit \mathbb{K} un demi-anneau binomial et $\overline{\mathbb{K}}$ sa clôture rationnelle. Le demi-anneau différentiel $\mathbb{K}[[\mathcal{Q}]]$ des \mathbb{K} -espèces au sens de Yeh est une extension combinatoire et algébrique du demi-anneau $\mathbb{K}[[X]]$ des séries formelles en une indéterminée X . En utilisant la substitution dans $\overline{\mathbb{K}[[\mathcal{Q}]}$ et la \mathcal{Q} -espèce \hat{X} des "pseudo-singletons" nous étudions deux nouvelles notions : la *dérivation directionnelle combinatoire* d'une \mathbb{K} -espèce dans la direction d'une autre \mathbb{K} -espèce ainsi que les *développements de Taylor* dans $\mathbb{K}[[\mathcal{Q}]}$. L'utilisation des $\overline{\mathbb{K}}$ -espèces est essentielle dans nos démarches. Nous explicitons, en cours de route, certaines analogies ainsi que certaines différences qu'entretiennent ces nouvelles notions avec leurs analogues classiques dans $\mathbb{K}[[X]]$. Des tables sont données pour les petites cardinalités.

Abstract. – Let \mathcal{Q} be the set of all isomorphism classes of atomic species, let \mathbb{K} be a binomial half-ring and $\overline{\mathbb{K}}$ its rational closure. The differential half-ring $\mathbb{K}[[\mathcal{Q}]}$ of all \mathbb{K} -species in the sense of Yeh is a combinatorial and algebraic extension of the half-ring $\mathbb{K}[[X]]$ of all formal power series in one indeterminate X . Using the operation of substitution in $\overline{\mathbb{K}[[\mathcal{Q}]}$ and the \mathcal{Q} -species \hat{X} of "pseudo-singletons" we study two new notions : the *combinatorial directional derivative* of a \mathbb{K} -species in the direction of another \mathbb{K} -species and *Taylor expansions* in $\mathbb{K}[[\mathcal{Q}]}$. The use of $\overline{\mathbb{K}}$ -species is essential here. We show, along the way, certain similarities and differences between these new notions and their classical analogues in $\mathbb{K}[[X]]$. Tables are given for small cardinalities.

1. Introduction

Le développement de Taylor usuel dans le contexte de l'anneau $\mathbb{Q}[[X]]$ des séries formelles en une indéterminée X peut se formuler comme suit : Soit $F = F(X) \in \mathbb{Q}[[X]]$ et soit Y une autre indéterminée, on a alors la décomposition

$$\begin{aligned} F(X+Y) &= F(X) + Y F'(X) + (Y^2 / 2!) F''(X) + \dots + (Y^k / k!) F^{(k)}(X) + \dots \\ &= F(X) + (Y\partial/\partial X) F(X) + \dots + [(Y\partial/\partial X)^k / k!] F(X) + \dots \\ &= e^{Y\partial/\partial X} F(X), \end{aligned}$$

selon les puissances ascendantes de Y .

* Ce texte a été préparé sur micro-ordinateur Macintosh au moyen des logiciels MacWrite, MacΣqn et MacDraw, puis imprimé sur LaserWriter.

** Travail fait dans le cadre des subventions FCAC EQ1608 (Québec) et CRSNG A5660 (Canada).

Telles qu'écrites, ces formules ne fonctionnent plus dans le contexte, plus riche, de la théorie combinatoire des espèces de structures au sens de A. Joyal [J2, J4] (voir aussi [L4, L8, L9]). En effet, considérons l'espèce $F = C_4 = C_4(X)$ de tous les cycles orientés sur 4 points de sorte X et soit Y une autre sorte de points. Désignons les points de sorte X (resp. Y) par des points noirs (resp. blancs). La figure 0 montre que l'espèce $F(X+Y) = C_4(X+Y)$ de tous les cycles orientés sur 4 points noirs ou blancs se décompose ainsi :

$$C_4(X+Y) = C_4(X) + X^3 Y + X^2 Y^2 + E_2(XY) + X Y^3 + C_4(Y)$$

où $E_2 = E_2(X)$ désigne l'espèce des paires (non ordonnées) de points.

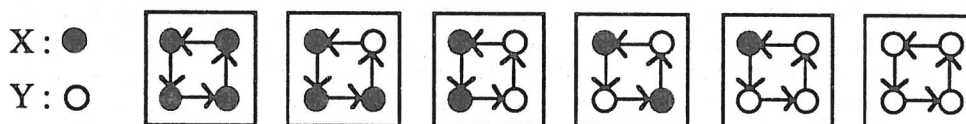


Figure 0

Cependant, un calcul direct basé sur l'interprétation combinatoire usuelle de l'opérateur différentiel $Y\partial/\partial X$ fournit plutôt le développement

$$e^{Y\partial/\partial X} C_4(X) = C_4(X) + X^3 Y + (3/2)X^2 Y^2 + X Y^3 + (1/4)Y^4 .$$

Ceci montre bien que $C_4(X+Y) \neq e^{Y\partial/\partial X} C_4(X)$.

Pour redonner un sens aux développements de Taylor dans le nouveau contexte, il est nécessaire de réinterpréter les opérateurs $(Y\partial/\partial X)^k / k!$, $k \in \mathbb{N}$. Nous allons présenter 2 façons de le faire :

- La première façon (voir section 3) est à la base de la théorie des "éclosions combinatoires" [L2, L3] (voir aussi [B, L10]). Elle consiste essentiellement à utiliser, d'une façon analogue à [J4], p. 138, les *puissances symétriques* $(Y\partial/\partial X)^k / \mathfrak{S}_k$ de l'opérateur $(Y\partial/\partial X)$.

- La deuxième façon (voir section 4) conserve la division par $k!$ au prix d'une modification fondamentale de l'opérateur $(Y\partial/\partial X)$ lui-même. Elle consiste à utiliser plutôt les *fractions de puissances* $(Y\partial/\partial X)^k / k!$ d'un opérateur associé $(Y\partial/\partial X)^\wedge$. Ce dernier est obtenu en substituant $(Y\partial/\partial X)$ dans la \mathbb{Q} -espèce \hat{X} des *pseudo-singletons* introduite récemment dans [L7].

DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES

Afin de faciliter la présentation de ces réinterprétations des opérateurs $(Y\partial/\partial X)^k / k!$, nous avons choisi de les faire précéder par quelques courts rappels (section 2) concernant les espèces moléculaires, atomiques ainsi que les \mathbb{K} -espèces au sens de Y.-N. Yeh [Y]. Quelques applications sont données (section 5) : des généralisations combinatoires de la formule classique de Faa di Bruno, une nouvelle expression pour la dérivée directionnelle [L7] d'une \mathbb{K} -espèce dans la direction d'une autre et une amorce d'extension du calcul des différences finies. Nous concluons (section 6) par une table de toutes les espèces atomiques sur $n \leq 5$ points ainsi que des tables des dérivées directionnelles et développements de Taylor qui leur sont associés.

2. Espèces moléculaires, atomiques et \mathbb{K} -espèces

Soient F et G deux espèces de structures. Nous ferons systématiquement l'abus (courant) de notation qui consiste à utiliser le symbole d'égalité, $F = G$, dans le cas où F et G sont deux espèces isomorphes. Les notions d'espèces moléculaires et atomiques [L5, L7, L9, Y] seront indispensables à notre étude. Voici donc un rappel de leurs définitions.

Définition. Une espèce M est dite *moléculaire* ssi $M \neq 0$ (l'espèce vide) et $[M = P + Q \implies P = 0 \text{ ou } Q = 0]$. En d'autres termes, $M \neq 0$ est moléculaire ssi il existe un unique type d'isomorphie de M -structures.

Exemples. – L'espèce T des *arborescences* n'est pas moléculaire puisqu'il y a une infinité de types d'arborescences (la figure 1 en montre deux).

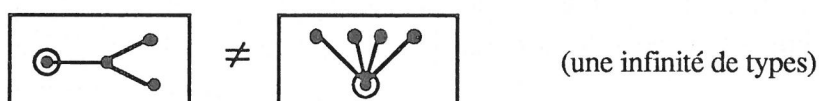


Figure 1

– L'espèce T_3 des *arborescences sur 3 points* n'est pas moléculaire puisqu'il y a de deux types exactement (figure 2).

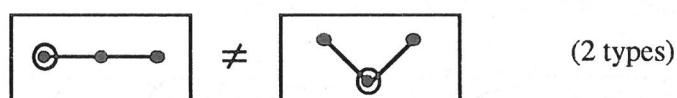
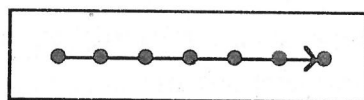


Figure 2

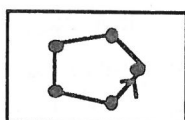
– L'espèce X^7 des *ordres linéaires sur 7 points* est moléculaire (figure 3).



(1 type)

Figure 3

- L'espèce C_5 des *cycles orientés sur 5 points* est moléculaire (figure 4).



(1 type)

Figure 4

Définition. Une espèce A est dite *atomique* ssi A est moléculaire, $A \neq 1$ (l'espèce de l'ensemble vide) et $[A = P \cdot Q \implies P = 1 \text{ ou } Q = 1]$. La dernière condition peut se représenter intuitivement par la figure 5, où il est supposé que (P, Q) est un couple ordonné quelconque d'espèces $\neq 1$.

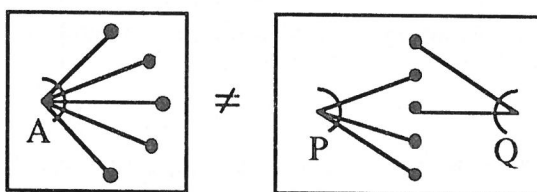


Figure 5

Exemples. - L'espèce T des *arborescences* n'est pas atomique puisqu'elle n'est même pas moléculaire.

- L'espèce moléculaire X^7 des *ordres linéaires sur 7 points* n'est pas atomique car, par exemple, la figure 6 montre que $X^7 = X^3 \cdot X^4$.

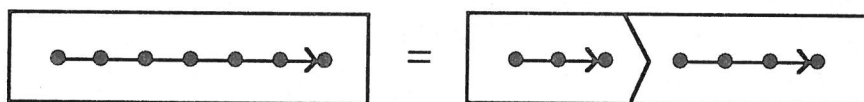


Figure 6

- L'espèce S_λ des *permutations de type* $\lambda = 2^3 3^2$ n'est pas atomique (figure 7).

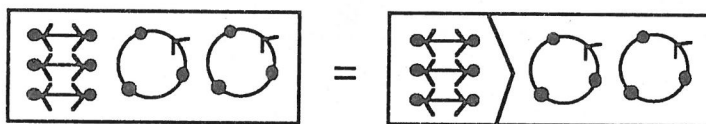


Figure 7

– L'espèce X des *singletons* est évidemment atomique.

– L'espèce C_5 des *cycles orientés sur 5 points* est aussi atomique (figure 8).

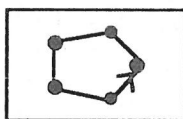


Figure 8

Ces illustrations laissent voir qu'il est facile d'expliciter des familles infinies d'espèces moléculaires ou atomiques. Par exemple, pour tout $n \geq 0$, l'espèce X^n (des *ordres linéaires sur n points*) est moléculaire tandis que pour tout $n \geq 1$, l'espèce C_n des *cycles orientés de cardinalité n* ainsi que l'espèce E_n des *ensembles de cardinalité n* sont atomiques. On vérifie, plus généralement, que chaque espèce moléculaire ou atomique ne vit que sur une seule cardinalité. De plus : sur chaque cardinalité $n \in \mathbb{N}$, ne vivent qu'un nombre fini de telles espèces (à isomorphisme d'espèces près). Le lecteur trouvera dans l'appendice, une table (inspirée de [L9]) illustrant toutes les espèces atomiques vivant sur $n \leq 5$ points.

Voici pourquoi les espèces moléculaires et atomiques sont importantes:

Théorème. a) Toute espèce F se décompose de façon unique comme somme finie ou dénombrable d'espèces moléculaires (à isomorphisme d'espèces près et à l'ordre des termes près). b) (Y.-N. Yeh [Y]) Toute espèce moléculaire se décompose de façon unique comme produit fini d'espèces atomiques (à isomorphisme d'espèces près et à l'ordre des facteurs près). ■

En conséquence : *toute espèce possède une unique décomposition atomique et le demi - anneau des espèces (à iso. d'espèces près) est isomorphe au demi - anneau de séries formelles $\mathbb{N}[[\mathcal{A}]]$ où \mathcal{A} est l'ensemble dénombrable de toutes les espèces atomiques (à iso. d'espèces près).*

Exemple. La figure 9 montre que l'espèce T des *arborescences* possède la décomposition atomique

$$T = X + X^2 + (X^3 + XE_2) + (2X^4 + X^2 E_2 + XE_3) \\ + (3X^5 + 3X^3 E_2 + X^2 E_3 + X \cdot (E_2 \circ X^2) + XE_4) + \dots$$

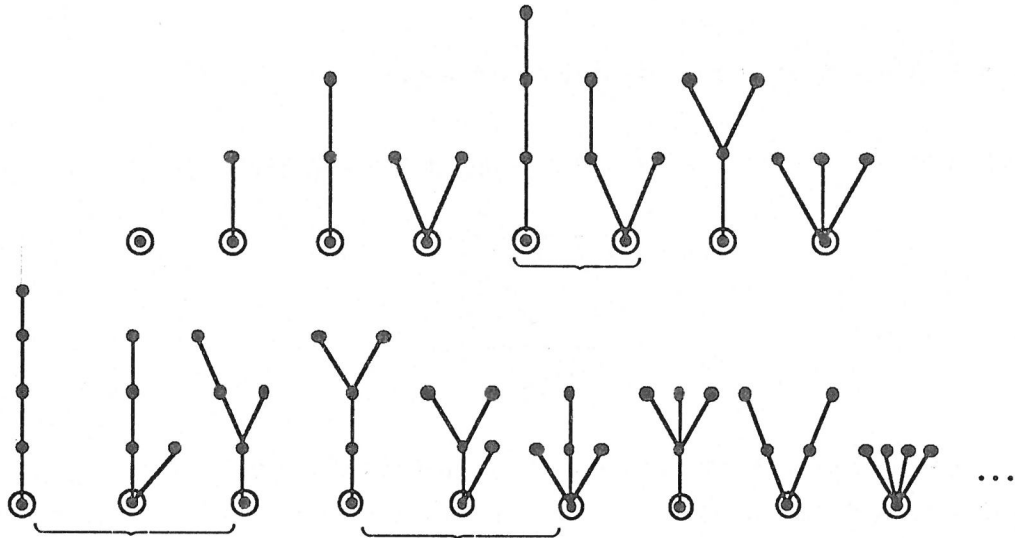


Figure 9

Pour des raisons d'ordres algébrique et combinatoire, il nous sera utile de nous situer dans un contexte plus large en remplaçant le demi - anneau \mathbb{N} des coefficients par un demi - anneau \mathbb{K} plus général. Par exemple, le cas où \mathbb{K} est un demi - anneau *binomial* est particulièrement intéressant.

Définition. a) Un demi-anneau (commutatif) \mathbb{K} est dit *binomial* ssi \mathbb{K} est contenu dans une \mathbb{Q} - algèbre \mathbb{L} et

$$\forall t \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N} : t(t-1)(t-2) \cdots (t-n+1) / n! \in \mathbb{K}.$$

- b) La *clôture rationnelle* d'un demi - anneau binomial \mathbb{K} est la plus petite \mathbb{Q} - algèbre $\overline{\mathbb{K}}$ contenant \mathbb{K} .
- c) Soit \mathbb{K} un demi - anneau binomial. Une \mathbb{K} - *espèce*, au sens de Yeh [Y], est un élément de $\mathbb{K}[[\mathcal{C}]]$; si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ on dit plutôt *espèce virtuelle* [J3].

Exemples. Les demi - anneaux \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{C} , $\mathbb{Q}[i]$ et $\mathbb{N} + \mathbb{Q}\varepsilon$ (où $\varepsilon^2 = 0$) sont tous binomiaux tandis que \mathbb{F}_p (pour p premier) et $\mathbb{Z}[i]$ ne le sont pas. Évidemment, toute espèce est (à iso. près) une \mathbb{N} - espèce.

Théorème (Y.-N. Yeh [Y]). Soit \mathbb{K} un demi-anneau binomial. Le demi-anneau $(\mathbb{K}[[\mathcal{C}]], +, \cdot, 0, 1)$ est muni d'opérations supplémentaires de *substitution* \circ , de *produit cartésien* \times et de *dérivation* $\partial/\partial X$ qui étendent les opérations correspondantes qui existent au niveau des espèces.

Remarques. – Les inclusions canoniques du diagramme "en cube" suivant

DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES

sont des homomorphismes de demi - anneaux et chacune préserve les opérations \circ , \times et $\partial/\partial X$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}[[X]] & \hookrightarrow & \mathbb{Q}[[X]] \\
 \searrow & & \searrow \\
 \mathbb{N}[[\mathcal{Q}]] & \hookrightarrow & \mathbb{Q}[[\mathcal{Q}]] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{K}[[X]] & \hookrightarrow & \overline{\mathbb{K}}[[X]] \\
 \searrow & & \searrow \\
 \mathbb{K}[[\mathcal{Q}]] & \hookrightarrow & \overline{\mathbb{K}}[[\mathcal{Q}]]
 \end{array}$$

– Toutes les notions et résultats précédents peuvent s'étendre au cas des espèces et \mathbb{K} - espèces (pondérées ou non) sur plusieurs sortes X, Y, Z, \dots de points.

– Les formules évidentes

$$\begin{aligned}
 (t F)(X + Y) &= t(F(X + Y)), \\
 (F + G)(X + Y) &= F(X + Y) + G(X + Y), \\
 (F \cdot G)(X + Y) &= F(X + Y) \cdot G(X + Y),
 \end{aligned}$$

ramènent l'étude des développements de Taylor dans $\mathbb{K}[[\mathcal{Q}]]$ à l'étude des développements de Taylor que nous qualifierons de *fondamentaux* et qui sont de la forme

$$A(X + Y) = A(X) + \dots + A(Y), \quad A : \text{atomique.}$$

Le membre de droite de l'égalité étant, par définition, la décomposition atomique de l'espèce $A(X + Y)$, à deux sortes X, Y de points. Bien entendu, tout développement de Taylor dans $\mathbb{K}[[\mathcal{Q}]]$ peut s'écrire comme une \mathbb{K} - combinaison linéaire (finie ou dénombrable) de produits finis de tels développements fondamentaux.

Exemples. – L'égalité rencontrée dans l'introduction

$$C_4(X + Y) = C_4(X) + X^3 Y + X^2 Y^2 + E_2(XY) + X Y^3 + C_4(Y),$$

concernant l'espèce C_4 des cycles orientés sur 4 points, constitue un développement de Taylor fondamental.

– On a le développement de Taylor fondamental

$$E_n(X + Y) = E_n(X) + E_{n-1}(X)Y + \dots + E_k(X)E_{n-k}(Y) + \dots + XE_{n-1}(Y) + E_n(Y),$$

de l'espèce E_n des ensembles de cardinalité n .

– L'identité habituelle du binôme de Newton

$$(X + Y)^n = X^n + \binom{n}{1} X^{n-1} Y + \dots + \binom{n}{k} X^{n-k} Y^k + \dots + \binom{n}{n-1} X Y^{n-1} + Y^n,$$

est le développement de Taylor de l'espèce moléculaire $M(X) = X^n$.

– Voici les premiers termes du développement de Taylor détaillé de l'espèce T des arborescences (jusqu'au degré total 4 en X et Y) :

$$\begin{aligned} T(X + Y) = & (X + Y) + (X^2 + 2XY + Y^2) + (X^3 + XE_2(X) + 4X^2Y + E_2(X)Y \\ & + XE_2(Y) + 4XY^2 + YE_2(Y) + Y^3) + (2X^4 + X^2E_2(X) + XE_3(X) \\ & + 9X^3Y + 3XE_2(X)Y + E_3(X)Y + 2X^2E_2(Y) + 14X^2Y^2 + 2E_2(X)Y^2 \\ & + XE_3(Y) + 3XE_2(Y)Y + 9XY^3 + YE_3(Y) + Y^2E_2(Y) + 2Y^4) + \dots \end{aligned}$$

On trouvera dans la section 6 une table complète du développement de Taylor pour chacune des espèces atomiques vivant sur $n \leq 5$ points.

3. Les opérateurs $(Y\partial/\partial X)^k / \mathfrak{S}_k$

Les puissances symétriques $(Y\partial/\partial X)^k / \mathfrak{S}_k$, $k \in \mathbb{N}$, de l'opérateur $(Y\partial/\partial X)$ sont faciles à définir. Elles correspondent essentiellement à l'opérateur obtenu en substituant $(Y\partial/\partial X)$ dans l'espèce E_k des ensembles de cardinalité k . De façon plus précise, on pose la définition suivante :

Définition. Soit $k \in \mathbb{N}$ et F une espèce. La *puissance symétrique* $k^{\text{ième}}$ de l'opérateur $(Y\partial/\partial X)$ est l'opérateur $E_k(Y\partial/\partial X) = (Y\partial/\partial X)^k / \mathfrak{S}_k$ défini par

$$E_k(Y\partial/\partial X) F(X) = F_{-,k}(X, Y),$$

où une $F_{-,k}(X, Y)$ - structure est une F - structure sur des points de sorte X et de sorte Y dont exactement k sont de sorte Y . Dans le cas plus général où F est une \mathbb{K} - espèce, on prolonge cette définition par linéarité.

Une $F_{-,k}$ - structure peut se visualiser (pour $k = 3$) par la figure 10.

DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES

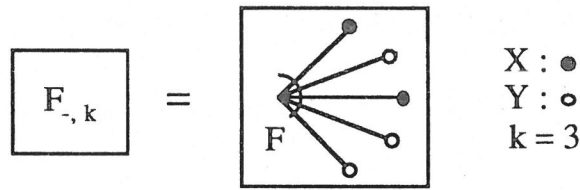


Figure 10

Étant donné que l'espèce $E = E(X)$ des ensembles (finis) possède la décomposition atomique

$$E = E_0 + E_1 + E_2 + \dots + E_k + \dots,$$

et que chaque $F(X+Y)$ - structure est une $F_{-,k}(X, Y)$ - structure pour une unique valeur de k (= le nombre de ses points de sorte Y), on a de façon presque tautologique:

Théorème. Pour toute \mathbb{K} - espèce $F = F(X)$ et toute sorte Y de points (distincte de X), on a les développements de Taylor

$$\begin{aligned} F(X+Y) &= E(Y\partial/\partial X) F(X) \\ &= F(X) + YF'(X) + E_2(Y\partial/\partial X) F(X) + \dots + E_k(Y\partial/\partial X) F(X) + \dots \\ &= F(X) + YF'(X) + (Y\partial/\partial X)^2/\mathfrak{S}_2 F(X) + \dots + (Y\partial/\partial X)^k/\mathfrak{S}_k F(X) + \dots, \end{aligned}$$

selon les degrés ascendants en Y . ■

Bien entendu, en considérant la décomposition atomique de chacun des termes $E_k(Y\partial/\partial X) F(X)$ (considéré comme \mathbb{K} - espèce à deux sortes X et Y), on obtient la décomposition atomique complète de $F(X+Y)$.

Il est facile d'étendre le domaine d'application des opérateurs $E_k(Y\partial/\partial X)$ aux espèces à deux sortes $G = G(X, Y)$ en disant qu'une $E_k(Y\partial/\partial X) G(X, Y)$ - structure est une $G(X, Y)$ - structure dans laquelle exactement k points de sorte X ont été remplacés par des points de sorte Y . Cette extension sera utile dans la prochaine section. On a la formule $G(X + Y, Y) = E(Y\partial/\partial X) G(X, Y)$.

4. Les opérateurs $(Y\partial/\partial X)^k / k!$

Nous savons que $E(Y\partial/\partial X) \neq e^{Y\partial/\partial X}$. Ceci est fondamentalement dû au fait que pour tout $k \geq 2$ et toute espèce $F = F(X)$:

$[(Y\partial/\partial X)^k / \mathfrak{S}_k] F(X)$ est une espèce (à deux sortes)
 tandis que
 $[(Y\partial/\partial X)^k / k!] F(X)$ est, en général, une \mathbb{Q} - espèce (à deux sortes)
 qui n'est pas une espèce.

Afin de pouvoir conserver (comme en analyse classique) la division "numérique" de nos opérateurs différentiels par $k!$, il nous faudra travailler dans les $\overline{\mathbb{K}}$ - espèces (où $\overline{\mathbb{K}}$ est la clôture rationnelle du demi - anneau binomial \mathbb{K}). De plus, l'opérateur $Y\partial/\partial X$ devra lui - même subir une modification. Cette modification s'obtient en le substituant dans la \mathbb{Q} - espèce \hat{X} des pseudo - singletons définie comme suit :

Définition [L7]. La \mathbb{Q} - espèce des *pseudo - singletons* (de sorte X) est le logarithme analytique de l'espèce $E = E(X)$ des ensembles :

$$\hat{X} = \ln E = \ln (1 + E^*) = E^* - \frac{1}{2}E^{*2} + \frac{1}{3}E^{*3} - \frac{1}{4}E^{*4} + \dots,$$

où $E^* = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + \dots$ désigne l'espèce des ensembles non vides .

Remarques. - Puisque les singletons sont les ensembles connexes, on peut considérer que l'espèce X des singletons est le "logarithme combinatoire" de l'espèce E des ensembles. Ceci justifie la notation \hat{X} et la terminologie de "pseudo - singletons" lorsque l'on prend plutôt le "logarithme analytique" (celui de l'analyse numérique des séries formelles) de l'espèce $E = 1 + E^*$. On en déduit que l'espèce E des ensembles est l'"exponentielle analytique" de la \mathbb{Q} - espèce \hat{X} des pseudo - singletons: $E(X) = e^{\hat{X}}$ (dans $\mathbb{Q}[[\mathbb{C}]]$).

On a aussi les formules : $(X + Y)^\wedge = \hat{X} + \hat{Y}$ et $(tX)^\wedge = t\hat{X}$ ($t \in \overline{\mathbb{K}}$).

- En développant complètement \hat{X} selon la définition qui précède on obtient la décomposition atomique explicite

$$\begin{aligned} \hat{X} = & X + (E_2 - \frac{1}{2}E_1^2) + (E_3 - E_1E_2 + \frac{1}{3}E_1^3) + (E_4 - \frac{1}{2}E_2^2 - E_1E_3 + E_1^2E_2 - \frac{1}{4}E_1^4) \\ & + \dots + \left(\sum_{\substack{v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \dots = n \\ v_i \geq 1}} (-1)^{v_1 + v_2 + \dots - 1} \frac{(v_1 + v_2 + \dots - 1)!}{v_1! v_2! \dots} E_1^{v_1} E_2^{v_2} \dots \right) + \dots \end{aligned}$$

DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES

où n prend successivement les valeurs $1, 2, 3, \dots$.

Théorème. Soit $F = F(X)$ une \mathbb{K} -espèce et considérons l'opérateur $(Y\partial/\partial X)^\wedge$ défini sur les $\overline{\mathbb{K}}$ -espèces à deux sortes X et Y par

$$(Y\partial/\partial X)^\wedge = \hat{X} \circ (Y\partial/\partial X) = Y\partial/\partial X + (E_2(Y\partial/\partial X) - \frac{1}{2}E_1^2(Y\partial/\partial X)) + \dots$$

On a le développement de Taylor

$$\begin{aligned} F(X + Y) &= e^{(Y\partial/\partial X)^\wedge} F(X) \\ &= F(X) + (Y\partial/\partial X)^\wedge F(X) + \dots + \frac{1}{k!} (Y\partial/\partial X)^\wedge{}^k F(X) + \dots \end{aligned}$$

Le développement de Taylor plus général

$$\begin{aligned} F(X + tY) &= e^{t(Y\partial/\partial X)^\wedge} F(X) \\ &= F(X) + t(Y\partial/\partial X)^\wedge F(X) + \dots + \frac{t^k}{k!} (Y\partial/\partial X)^\wedge{}^k F(X) + \dots, \end{aligned}$$

est aussi valable pour tout $t \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Dans l'anneau $\overline{\mathbb{K}}[[\mathcal{U}]]$ on a l'identité $E(X) = e^{\hat{X}}$. En substituant $Y\partial/\partial X$ à la place de X dans les deux membres on obtient

$$E(Y\partial/\partial X) = e^{(Y\partial/\partial X)^\wedge}.$$

On conclut en utilisant la formule $F(X+Y) = E(Y\partial/\partial X) F(X)$. Le développement plus général s'obtient en faisant appel à l'égalité

$$(tY\partial/\partial X)^\wedge = t(Y\partial/\partial X)^\wedge,$$

qui découle de l'identité $(tX)^\wedge = t\hat{X}$, valable dans $\overline{\mathbb{K}}[[\mathcal{U}]]$. ■

5. Quelques applications

Les versions combinatoires du développement de Taylor que nous venons de donner permettent de mieux dégager certaines similitudes qui existent entre l'analyse

classique (des séries formelles) et la théorie des \mathbb{K} - espèces.

— Par exemple, la formule bien connue de Faa di Bruno qui explicite les dérivées successives de la composée $G \circ F$ de deux séries formelles prend dans le contexte des \mathbb{K} - espèces les deux formes suivantes:

Corollaire (Faa di Bruno). Soient $F = F(X)$ et $G = G(X)$ deux \mathbb{K} - espèces, $F(0) = 0$. Pour tout $n \geq 0$, on a les deux identités:

$$E_n(Y\partial/\partial X)(G \circ F)(X) = \sum_{v_1+2v_2+\dots+nv_n=n} E_{v_1}(T_1\partial/\partial T_0) E_{v_2}(T_2\partial/\partial T_0) \dots E_{v_n}(T_n\partial/\partial T_0) G(T_0) \Bigg|_{\substack{T_i := E_i(Y\partial/\partial X)F(X) \\ i=0, 1, \dots, n}}$$

et

$$[(Y\partial/\partial X)^n / n!](G \circ F)(X) = \sum_{v_1+2v_2+\dots+nv_n=n} \frac{(T_1\partial/\partial T_0)^{v_1}}{v_1!} \frac{(T_2\partial/\partial T_0)^{v_2}}{v_2!} \dots \frac{(T_n\partial/\partial T_0)^{v_n}}{v_n!} G(T_0) \Bigg|_{\substack{T_i := (Y\partial/\partial X)^i / i! F(X) \\ i=0, 1, \dots, n}}$$

où T_0, T_1, \dots désigne une suite auxiliaire dénombrable de sortes de points.

Démonstration. On obtient la première identité en isolant les termes vivant sur la cardinalité n en Y dans les membres extrêmes de la suite d'égalités

$$\begin{aligned} (G \circ F)(X+Y) &= G(F(X+Y)) \\ &= G(F(X) + E_1(Y\partial/\partial X)F(X) + E_2(Y\partial/\partial X)F(X) + \dots) \\ &= G(T_0 + T_1 + T_2 + \dots) \Bigg|_{T_i := E_i(Y\partial/\partial X)F(X), i \geq 0} \\ &= E(T_1\partial/\partial T_0) E(T_2\partial/\partial T_0) \dots G(T_0) \Bigg|_{T_i := E_i(Y\partial/\partial X)F(X), i \geq 0} \end{aligned}$$

On procède de façon similaire pour la deuxième identité. ■

Remarque. Dans le cas particulier où F et G sont des séries formelles on a les égalités $E_i(Y\partial/\partial X)F(X) = [(Y\partial/\partial X)^i / i!]F(X) = Y^i F^{(i)}(X) / i!$. Ainsi, les deux formules plus haut se dégènèrent (après simplification des facteurs Y^n et regroupement des termes) en l'identité unique

DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES

$$\frac{(G \circ F)^{(n)}(X)}{n!} = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{\substack{v_1 + 2v_2 + \dots + nv_n = n \\ v_1 + v_2 + \dots + v_n = k}} \frac{1}{v_1! v_2! \dots v_n!} (F'(X))^{v_1} (F''(X))^{v_2} \dots (F^{(n)}(X))^{v_n} \right) G^{(k)} \circ F(X),$$

qui constitue la version classique de la formule de Faa di Bruno [J1]. On sait que cette dernière formule permet de développer $G \circ F$ dans le cas où F et G sont des séries formelles. Il en est de même pour ses relèvements combinatoires puisque l'on a les égalités générales suivantes:

$$(G \circ F)(Y) = (G \circ F)(X+Y)|_{X:=0} = E(Y\partial/\partial X)(G \circ F)(X)|_{X:=0} = e^{(Y\partial/\partial X)}(G \circ F)(X)|_{X:=0}.$$

Il est cependant possible de décrire un développement beaucoup plus raffiné en utilisant les décompositions moléculaires de F et de G :

Corollaire. Soit \mathfrak{M} un système de représentants de toutes les espèces moléculaires (à isomorphisme d'espèces près) et posons $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M} \setminus \{1\}$. Soient $G(X)$ et $F(X)$, $F(0) = 0$, deux $\overline{\mathbb{K}}$ -espèces ayant les décompositions moléculaires

$$G(X) = \sum_{M \in \mathfrak{M}} g_M M, \quad F(X) = \sum_{N \in \mathfrak{M}^+} f_N N, \quad g_M, f_N \in \overline{\mathbb{K}}.$$

Finalement, donnons-nous, pour chaque $M \in \mathfrak{M}$, une sorte auxiliaire T_M de points. On a alors la formule (où l'on a posé $T_1 = T$ pour simplifier)

$$G(F(X)) = \sum_{M \in \mathfrak{M}} g_M \prod_{N \in \mathfrak{M}^+} e^{f_N (T_N \partial/\partial T)^N} M(T) \Big|_{T:=0, T_N:=N, N \in \mathfrak{M}^+},$$

qui permet d'exprimer $G(F(X))$ comme combinaison linéaire infinie (à coefficients dans $\overline{\mathbb{K}}[[\mathcal{U}]]$) de monômes en les "variables" g_M et f_N , ($M \in \mathfrak{M}$, $N \in \mathfrak{M}^+$).

Démonstration. Par linéarité, $G(F(X)) = \sum g_M M(F(X))$. De plus

$$M(F(X)) = M\left(T + \sum_{N \in \mathfrak{M}^+} f_N T_N\right) \Big|_{T:=0, T_N:=N, N \in \mathfrak{M}^+}$$

$$= \prod_{N \in \mathfrak{M}^+} e^{f_N(T_N \partial/\partial T)^N} M(T) \Big|_{T := 0, T_N := N, N \in \mathfrak{M}^+} \quad \blacksquare$$

— Voici un autre exemple d'application. Nous avons défini [L7] la notion de *dérivée directionnelle* d'une \mathbb{K} -espèce $F = F(X)$ dans la direction d'une \mathbb{K} -espèce $H = H(X)$, $H(0) = 0$, comme étant l'unique $\overline{\mathbb{K}}$ -espèce, notée $D_H F = D_H F(X)$, satisfaisant

$$F(X + tH) = F(X) + t(D_H F)(X) + O(t^2).$$

Ici t est un "élément variable" de \mathbb{K} et $O(t^2)$ désigne une $\overline{\mathbb{K}}$ -espèce dont tous les coefficients de la décomposition atomique sont des polynômes en t factorisables par t^2 . Un certain nombre de méthodes de calcul pour $D_H F$ ont été proposées [L7]. L'opérateur $(Y\partial/\partial X)^\wedge$ permet ici d'en dégager une nouvelle:

Corollaire. On a la formule $D_H F = (Y\partial/\partial X)^\wedge F(X) \Big|_{Y := H}$.

Démonstration. On a successivement

$$\begin{aligned} F(X + tH) &= F(X + tY) \Big|_{Y := H} = e^{t(Y\partial/\partial X)^\wedge} F(X) \Big|_{Y := H} \\ &= F(X) + t(Y\partial/\partial X)^\wedge F(X) \Big|_{Y := H} + O(t^2) \Big|_{Y := H} \\ &= F(X) + t(D_H F)(X) + O(t^2), \end{aligned}$$

à cause de l'unicité de $(D_H F)(X)$. ■

Remarques. Il y a une analogie évidente avec la formule

$$D_H F = (Y\partial/\partial X) F(X) \Big|_{Y := H} = H \cdot F'$$

qui est valable lorsque F et H sont des séries formelles. Dans le cas général des \mathbb{K} -espèces, il ne faut cependant pas confondre $D_H F$ et $H \cdot F'$ comme le montre l'exemple $F = E_2$ (les paires non ordonnées) et $H = X$ (les singletons):

$$D_X E_2 = (1/2) X^2 + E_2 \neq X^2 = X \cdot E_2'.$$

La *règle du produit* $D_H (F \cdot G) = (D_H F) \cdot G + F \cdot (D_H G)$ et la bilinéarité de $D_H F$ montrent que le calcul des dérivées directionnelles générales peut se réduire au

DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES

calcul des

$D_M A$ où M : moléculaire et A : atomique.

Pour les espèces atomiques A vivant sur les cardinalités ≤ 5 , le calcul des $D_M A$ peut être fait en utilisant le corollaire précédent en conjonction avec la table des $(Y\partial/\partial X)^A$ donnée dans la section 6, plus bas.

— Une autre situation où les présentes méthodes peuvent s'appliquer utilise les rapports qui existent entre les *opérateurs de dérivation directionnelle* D_Φ et les *opérateurs de différence directionnelle* Δ_F définis [J4] (voir aussi L1, L6, L7) par

$$\Delta_F: \mathbb{K}[[Q]] \rightarrow \mathbb{K}[[Q]], \quad \Delta_F G = G \circ F - G.$$

Le contexte se résume comme suit [L7]: pour toute \mathbb{K} -espèce F *normalisée*, c'est-à-dire ayant une décomposition atomique de la forme

$$F(X) = X + aX^2 + bE_2 + cX^3 + dC_3 + eXE_2 + fE_3 + \dots, \quad a, b, c, \dots \in \mathbb{K},$$

il existe une unique famille

$$F^{<t>}(X) = X + a(t)X^2 + b(t)E_2 + c(t)X^3 + d(t)C_3 + e(t)XE_2 + f(t)E_3 + \dots, \quad t \in \mathbb{K}$$

de \mathbb{K} -espèces, appelées *les itérées généralisées de F* , caractérisée par les trois conditions

- i) $\forall n \in \mathbb{N} : F^{<n>} = F \circ F \circ \dots \circ F$ (itération d'ordre n),
- ii) $\forall s, t \in \mathbb{K} : F^{<s+t>} = F^{<s>} \circ F^{<t>}$,
- iii) les coefficients $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, ... de la décomposition atomique de $F^{<t>}$ sont des polynômes en t .

On a le résultat suivant concernant le *générateur infinitésimal* Φ de F , défini par

$$\Phi = \text{gen } F = (d/dt) F^{<t>}|_{t=0} \in \overline{\mathbb{K}}[[Q]].$$

Théorème [L7]. Pour toute \mathbb{K} -espèce G , les équations suivantes sont satisfaites dans l'anneau $\overline{\mathbb{K}}[[Q]]$

$$(d/dt) G \circ F^{<t>} = D_\Phi (G \circ F^{<t>}) = (D_\Phi G) \circ F^{<t>}$$

où D_Φ désigne l'opérateur de dérivation dans la direction du générateur infinitésimal Φ de F . En particulier, pour $G = X$ on a les formules

$$(d/dt) F^{<t>} = D_\Phi F^{<t>} = \Phi \circ F^{<t>}. \quad \blacksquare$$

Résolvant ces équations différentielles on en déduit les identités

$$G \circ F^{<t>} = e^{t D_\Phi} G, \quad F^{<t>} = e^{t D_\Phi} X,$$

qui se spécialisent, faisant $t = 1$, en les formules remarquables

$$G \circ F = e^{D_\Phi} G, \quad F = e^{D_\Phi} X.$$

D'où l'on tire immédiatement:

Corollaire. Soit $\Phi = \text{gen } F$, alors les opérateurs Δ_F et D_Φ sont reliés par les formules

$$\Delta_F = e^{D_\Phi} - I, \quad D_\Phi = \ln(I + \Delta_F),$$

où I désigne l'opérateur identité $I: \overline{\mathbb{K}}[[\mathcal{U}]] \rightarrow \overline{\mathbb{K}}[[\mathcal{U}]]$.

Démonstration. On a successivement

$$\Delta_F G = G \circ F - G = e^{D_\Phi} G - G = (e^{D_\Phi} - I) G.$$

D'où la première égalité. On en déduit que $I + \Delta_F = \exp(D_\Phi)$. En conséquence,

$$D_\Phi = \ln(I + \Delta_F) = \Delta_F - \frac{1}{2} \Delta_F^2 + \frac{1}{3} \Delta_F^3 - \frac{1}{4} \Delta_F^4 + \dots \quad \blacksquare$$

Remarques. L'analogie avec le calcul des différences finies [J1] est ici évidente. En effet, en travaillant dans l'anneau de polynômes $\overline{\mathbb{K}}[X] \subset \overline{\mathbb{K}}[[\mathcal{U}]]$ et en prenant pour F le polynôme (non normalisé) $F = F(X) = X + 1$, on obtient $F^{<t>} = F^{<t>}(X) = X + t$. Donc $\Phi = (d/dt) F^{<t>}|_{t=0} = (d/dt)(X + t)|_{t=0} = 1$. Ainsi, $\Delta_{X+1} = \Delta$ et $D_1 = D = d/dX$ où

DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES

$$\Delta_{X+1} G = G(X+1) - G(X) = \Delta G, \quad D_1 G = G'(X) = D G = (d/dX) G.$$

On retrouve donc les identités usuelles

$$\Delta = e^D - I, \quad D = \ln(I + \Delta),$$

de l'analyse numérique. Cette analogie va plus loin. Par exemple, en élevant à la puissance k chacune des deux identités du dernier corollaire on obtient les formules

$$D_{\Phi}^k = k! \sum_{n \geq k} \frac{S_n^k}{n!} \Delta_F^n, \quad \Delta_F^k = k! \sum_{n \geq k} \frac{\mathfrak{S}_n^k}{n!} D_{\Phi}^n,$$

où les S_n^k et les \mathfrak{S}_n^k désignent respectivement les nombres de Stirling de la première et de la deuxième sorte (la notation utilisée pour les nombres de Stirling est celle de Jordan [J1]).

Soulignons cependant la différence fondamentale suivante entre les deux contextes: les opérateurs Δ et D diminuent le degré des polynômes auxquels ils sont appliqués tandis que (pour les \mathbb{K} - espèces normalisées F) les opérateurs Δ_F et D_{Φ} augmentent l'ordre de contact avec 0 des \mathbb{K} - espèces auxquels ils sont appliqués (voir [L7] pour plus de détails).

Pour conclure, donnons deux dernières illustrations de l'analogie avec le calcul des différences finies. Il s'agit des versions combinatoires suivantes de la formule sommatoire d'Euler - Maclaurin et de la formule d'intégration de Gregory [J1].

Corollaire. Soit Φ le générateur infinitésimal d'une \mathbb{K} - espèce normalisée donnée F et soit H une $\overline{\mathbb{K}}$ - espèce quelconque. Alors:

a) (Euler - Maclaurin) Toute solution $G \in \overline{\mathbb{K}}[[\mathcal{U}]]$ de l'équation $\Delta_F G = H$ peut s'écrire sous la forme

$$G = \Gamma - \frac{1}{2} H + \frac{1}{12} D_{\Phi} \Gamma - \frac{1}{720} D_{\Phi}^3 H + \dots + \frac{B_n}{n!} D_{\Phi}^{n-1} H + \dots,$$

où Γ est une solution de l'équation $D_{\Phi} \Gamma = H$ et les B_n désignent les nombres de Bernoulli définis par la série génératrice exponentielle

$$\frac{X}{e^X - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n.$$

b) (Gregory) Toute solution $\Gamma \in \overline{\mathbb{K}}[[\mathcal{C}]]$ de l'équation $D_\Phi \Gamma = H$ peut s'écrire sous la forme

$$\Gamma = G + \frac{1}{2}H - \frac{1}{12}\Delta_F H + \frac{1}{24}\Delta_F^2 H - \frac{19}{720}\Delta_F^3 H + \dots + b_n \Delta_F^{n-1} H + \dots,$$

où G est une solution de l'équation $\Delta_F G = H$ et les b_n désignent les nombres de Bernoulli "de la deuxième sorte" définis (voir [J1], p. 279) par la série génératrice

$$\frac{X}{\ln(1+X)} = \sum_{n \geq 0} b_n X^n.$$

Démonstration. a) On a successivement

$$\begin{aligned} \Delta_F G = H & \text{ ssi } (e^D - I)G = H \text{ ssi } D_\Phi [(e^D - I)/D_\Phi]G = H \\ & \text{ ssi } D_\Phi \Gamma = H \text{ où } \Gamma = [(e^D - I)/D_\Phi]G. \end{aligned}$$

La dernière égalité équivaut à

$$G = \frac{D_\Phi}{(e^D - I)} \Gamma = \Gamma + \sum_{n \geq 1} \frac{B_n}{n!} D_\Phi^{n-1} H.$$

b) On a successivement

$$\begin{aligned} D_\Phi \Gamma = H & \text{ ssi } \ln(I + \Delta_F) \Gamma = H \text{ ssi } \Delta_F [(\ln(I + \Delta_F))/\Delta_F] \Gamma = H \\ & \text{ ssi } \Delta_F G = H \text{ où } G = [(\ln(I + \Delta_F))/\Delta_F] \Gamma. \end{aligned}$$

La dernière égalité équivaut à

DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES

$$\Gamma = \frac{\Delta_F}{\ln(I + \Delta_F)} G = G + \sum_{n \geq 1} b_n \Delta_F^{n-1} H. \quad \blacksquare$$

Ce corollaire implique, en particulier, que

$$\Delta_F G = H \text{ est résoluble (pour } G) \iff D_\Phi \Gamma = H \text{ est résoluble (pour } \Gamma).$$

De telles équations ne sont cependant pas toujours résolubles. Par exemple,

$$D_{E_2 + X^2} G = X^2 \text{ n'a pas de solution dans } \overline{\mathbb{K}}[[\mathcal{C}]].$$

En effet, toute solution G devrait nécessairement s'écrire sous la forme

$$G = a + bX + cX^2 + dE_2 + \dots, \quad \text{avec } a, b, c, d, \dots \in \overline{\mathbb{K}}.$$

Or les tables de la section 6 montrent que l'on doit nécessairement avoir

$$D_{E_2 + X^2} G = bX^2 + bE_2 + \dots,$$

ce qui est contradictoire avec l'équation proposée.

Il serait intéressant de déterminer des critères de résolubilité de ces équations et d'analyser la nature précise de leurs solutions, lorsqu'elles existent.

6. Tables

Voici trois tables permettant d'illustrer, sur les petites cardinalités, les divers concepts et résultats du présent travail.

– La première table, inspirée de [L5] et [L9], a été construite en collaboration avec H. Décoste. Elle contient (à isomorphismes d'espèces près) la liste complète de toutes les espèces atomiques vivant sur $n \leq 5$ points. À droite de la formule identifiant chacune d'elles, nous donnons un diagramme représentant le type des structures de l'espèce considérée. Certaines de ces espèces (P_5 / \mathbb{Z}_2 et $(X^2 \cdot C_3(X)) / \mathbb{Z}_2$) sont des espèces quotient sous l'action du groupe \mathbb{Z}_2 . Pour obtenir plus d'explications sur

$$\Gamma = \frac{\Delta_F}{\ell n(I + \Delta_F)} G = G + \sum_{n \geq 1} b_n \Delta_F^{n-1} H. \quad \blacksquare$$

Ce corollaire implique, en particulier, que

$$\Delta_F G = H \text{ est résoluble (pour } G) \iff D_\Phi \Gamma = H \text{ est résoluble (pour } \Gamma).$$

De telles équations ne sont cependant pas toujours résolubles. Par exemple,

$$D_{E_2 + X^2} G = X^2 \text{ n'a pas de solution dans } \overline{\mathbb{K}}[[\mathcal{U}]].$$

En effet, toute solution G devrait nécessairement s'écrire sous la forme

$$G = a + bX + cX^2 + dE_2 + \dots, \quad \text{avec } a, b, c, d, \dots \in \overline{\mathbb{K}}.$$

Or les tables de la section 6 montrent que l'on doit nécessairement avoir

$$D_{E_2 + X^2} G = bX^2 + bE_2 + \dots,$$

ce qui est contradictoire avec l'équation proposée.

Il serait intéressant de déterminer des critères de résolubilité de ces équations et d'analyser la nature précise de leurs solutions, lorsqu'elles existent.

6. Tables

Voici trois tables permettant d'illustrer, sur les petites cardinalités, les divers concepts et résultats du présent travail.

– La première table, inspirée de [L5] et [L9], a été construite en collaboration avec H. Décoste. Elle contient (à isomorphismes d'espèces près) la liste complète de toutes les espèces atomiques vivant sur $n \leq 5$ points. À droite de la formule identifiant chacune d'elles, nous donnons un diagramme représentant le type des structures de l'espèce considérée. Certaines de ces espèces (P_5/\mathbb{Z}_2 et $(X^2 \cdot C_3(X))/\mathbb{Z}_2$) sont des espèces quotient sous l'action du groupe \mathbb{Z}_2 . Pour obtenir plus d'explications sur

DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES

les notations utilisées, le lecteur est invité à consulter le texte [L9] de J. Labelle.

– La deuxième table contient le développement de Taylor de chacune des espèces atomiques $A = A(X)$ vivant sur $n \leq 5$ points. Il s'agit de la décomposition atomique de chacune des espèces à deux sortes $A(X + Y)$.

– La troisième table permet le calcul des dérivées directionnelles de chaque espèce atomique vivant sur $n \leq 5$ points. À côté de l'espèce atomique $A(X)$ nous avons écrit la décomposition atomique de l'espèce à deux sortes $(Y\partial/\partial X)^A A(X)$. Le calcul final des dérivées directionnelles elles-mêmes se fait à l'aide de la formule

$$D_M A(X) = (Y\partial/\partial X)^A A(X)|_{Y := M(X)}.$$

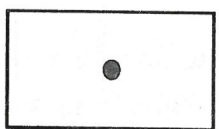
Remerciements

L'auteur désire remercier Hélène Décoste pour son aide technique précieuse dans l'élaboration de la table des espèces atomiques, Jacques Labelle pour sa vérification méticuleuse des deux autres tables ainsi que les collègues qui ont bien voulu examiner la version initiale du manuscrit.

LES ESPÈCES ATOMIQUES SUR $n \leq 5$ POINTS

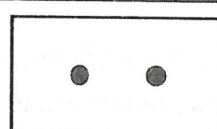
n=1

X :



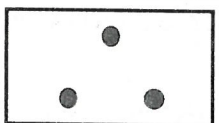
n=2

E_2 :

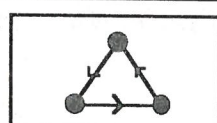


n=3

E_3 :

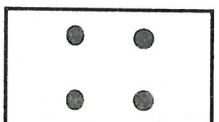


C_3 :

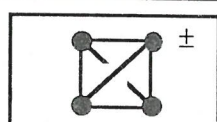


n=4

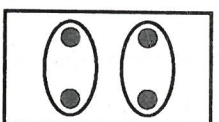
E_4 :



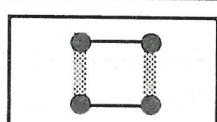
E_4^\pm :



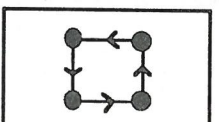
$E_2 \circ E_2$:



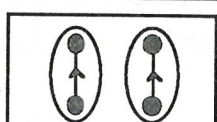
P_4^{bic} :



C_4 :

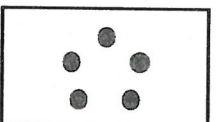


$E_2 \circ X^2$:

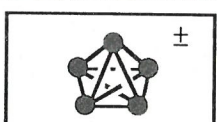


n=5

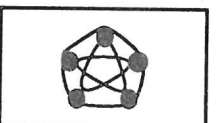
E_5 :



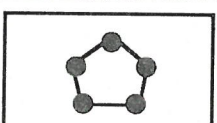
E_5^\pm :



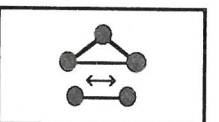
P_5 / \mathbb{Z}_2 :



P_5 :



$(X^2 C_3) / \mathbb{Z}_2$:



C_5 :

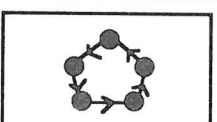


TABLE DU DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR
DES ESPÈCES ATOMIQUES SUR $n \leq 5$ POINTS

A(X)	A(X + Y)
n=1 X	X + Y
n=2 $E_2(X)$	$E_2(X) + XY + E_2(Y)$
n=3 $E_3(X)$ $C_3(X)$	$E_3(X) + E_2(X)Y + XE_2(Y) + E_3(Y)$ $C_3(X) + X^2Y + XY^2 + C_3(Y)$
n=4 $E_4(X)$ $E_4^\pm(X)$ $E_2^\circ E_2(X)$ $P_4^{\text{bic}}(X)$ $C_4(X)$ $E_2(X^2)$	$E_4(X) + E_3(X)Y + E_2(X)E_2(Y) + XE_3(Y) + E_4(Y)$ $E_4^\pm(X) + C_3(X)Y + E_2(XY) + XC_3(Y) + E_4^\pm(Y)$ $E_2^\circ E_2(X) + XE_2(X)Y + E_2(X)E_2(Y) + E_2(XY) + XYE_2(Y) + E_2^\circ E_2(Y)$ $P_4^{\text{bic}}(X) + X^3Y + 3E_2(XY) + XY^3 + P_4^{\text{bic}}(Y)$ $C_4(X) + X^3Y + X^2Y^2 + E_2(XY) + XY^3 + C_4(Y)$ $E_2(X^2) + 2X^3Y + 2X^2Y^2 + 2E_2(XY) + 2XY^3 + E_2(Y^2)$
n=5 $E_5(X)$ $E_5^\pm(X)$ $P_5(X) / \mathbb{Z}_2$ $P_5(X)$ $(X^2C_3(X)) / \mathbb{Z}_2$ $C_5(X)$	$E_5(X) + E_4(X)Y + E_3(X)E_2(Y) + E_2(X)E_3(Y) + XE_4(Y) + E_5(Y)$ $E_5^\pm(X) + E_4^\pm(X)Y + (C_3(X)Y^2) / \mathbb{Z}_2 + (X^2C_3(Y)) / \mathbb{Z}_2 + XE_4^\pm(Y) + E_5^\pm(Y)$ $P_5(X) / \mathbb{Z}_2 + C_4(X)Y + XE_2(XY) + E_2(XY)Y + XC_4(Y) + P_5(Y) / \mathbb{Z}_2$ $P_5(X) + E_2(X^2)Y + 2XE_2(XY) + 2E_2(XY)Y + XE_2(Y^2) + P_5(Y)$ $(X^2C_3(X)) / \mathbb{Z}_2 + XC_3(X)Y + E_2(X^2)Y + (C_3(X)Y^2) / \mathbb{Z}_2 + X^3Y^2 + XE_2(XY) + E_2(XY)Y + X^2Y^3 + (X^2C_3(Y)) / \mathbb{Z}_2 + XE_2(Y^2) + XC_3(Y)Y + (Y^2C_3(Y)) / \mathbb{Z}_2$ $C_5(X) + X^4Y + 2X^3Y^2 + 2X^2Y^3 + XY^4 + C_5(Y)$

TABLE DE DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES
POUR LES ESPÈCES ATOMIQUES SUR $n \leq 5$ POINTS

Formule générale: $D_M A(X) = (Y\partial/\partial X)^n A(X)|_{Y:=M}$

A(X)	$(Y\partial/\partial X)^n A(X)$
n=1	
X	Y
n=2	
$E_2(X)$	$XY + (E_2(Y) - (1/2)Y^2)$
n=3	
$E_3(X)$	$E_2(X)Y + X(E_2(Y) - (1/2)Y^2) + (E_3(Y) - YE_2(Y) + (1/3)Y^3)$
$C_3(X)$	$X^2Y + (C_3(Y) - (1/3)Y^3)$
n=4	
$E_4(X)$	$E_3(X)Y + E_2(X)(E_2(Y) - (1/2)Y^2) + X(E_3(Y) - YE_2(Y) + (1/3)Y^3) + (E_4(Y) - (1/2)(E_2(Y))^2 - YE_3(Y) + Y^2E_2(Y) - (1/4)Y^4)$
$E_4^\pm(X)$	$C_3(X)Y + (E_2(XY) - (1/2)X^2Y^2) + X(C_3(Y) - (1/3)Y^3) + (E_4^\pm(Y) - (1/2)E_2(Y)^2 - YC_3(Y) + (1/2)Y^4)$
$E_2^\circ E_2(X)$	$XE_2(X)Y + (E_2(X)E_2(Y) + E_2(XY) - (1/2)E_2(X)Y^2 - (1/2)X^2Y^2) + (E_2^\circ E_2(Y) - (1/2)(E_2(Y))^2 - (1/2)E_2(Y)^2 + (1/4)Y^4)$
$P_4^{bic}(X)$	$X^3Y + (3E_2(XY) - (3/2)X^2Y^2) + (P_4^{bic}(Y) - (3/2)E_2(Y)^2 + (1/2)Y^4)$
$C_4(X)$	$X^3Y + (E_2(XY) - (1/2)X^2Y^2) + (C_4(Y) - (1/2)E_2(Y)^2)$
$E_2(X^2)$	$2X^3Y + (2E_2(XY) - X^2Y^2)$
n=5	
$E_5(X)$	$E_4(X)Y + E_3(X)(E_2(Y) - (1/2)Y^2) + E_2(X)(E_3(Y) - YE_2(Y) + (1/3)Y^3) + X(E_4(Y) - (1/2)(E_2(Y))^2 - YE_3(Y) + Y^2E_2(Y) - (1/4)Y^4) + (E_5(Y) - YE_4(Y) - E_2(Y)E_3(Y) + Y^2E_3(Y) + Y(E_2(Y))^2 - Y^3E_2(Y) + (1/5)Y^5)$
$E_5^\pm(X)$	$E_4^\pm(X)Y + ((C_3(X)Y^2)/Z_2 - (1/2)C_3(X)Y^2) + ((X^2C_3(Y))/Z_2 - E_2(XY)Y + (1/3)X^2Y^3) + (XE_4^\pm(Y) - (1/2)XE_2(Y)^2 - XYC_3(Y) + (1/2)XY^4) + (E_5^\pm(Y) - YE_4^\pm(Y) - (Y^2C_3(Y))/Z_2 + Y^2C_3(Y) + YE_2(Y)^2 - (3/5)Y^5)$
$P_5(X)/Z_2$	$C_4(X)Y + X(E_2(XY) - (1/2)X^2Y^2) + X(C_4(Y) - (1/2)E_2(Y)^2) + (P_5(Y)/Z_2 - YC_4(Y) + (1/5)Y^5)$
$P_5(X)$	$E_2(X^2)Y + X(2E_2(XY) - X^2Y^2) + (P_5(Y) - YE_2(Y)^2 + (2/5)Y^5)$
$(X^2C_3(X))/Z_2$	$(XC_3(X) + E_2(X^2))Y + ((C_3(X)Y^2)/Z_2 + XE_2(XY) - (1/2)C_3(X)Y^2 - (1/2)X^3Y^2) + ((X^2C_3(Y))/Z_2 - E_2(XY)Y + (1/3)X^2Y^3)$
$C_5(X)$	$X^4Y + (C_5(Y) - (1/5)Y^5)$

RÉFÉRENCES

- [B] F. Bergeron. *Combinatorial Representations of some Lie Groups and Lie Algebras*, in Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec 1985, eds. G. Labelle and P. Leroux, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, No.1234, 1986, 34-47.
- [J1] C. Jordan. Calculus of Finite Differences, Chelsea Publishing Company, 3nd ed., 1965.
- [J2] A. Joyal. *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Advances in Mathematics 42, 1981, 1-82.
- [J3] A. Joyal. *Règle des signes en algèbre combinatoire*, Comptes Rendus Mathématiques de l'Académie des Sciences du Canada VII, 5, 1985, 285-290.
- [J4] A. Joyal. *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, in Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec 1985, eds. G. Labelle and P. Leroux, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, No.1234, 1986, 126-159.
- [L1] G. Labelle. *Sur l'inversion et l'itération continue des séries formelles*, Journal Européen de Combinatoire 1, 1980, 113-138.
- [L2] G. Labelle. *Éclosions combinatoires appliquées à l'inversion multidimensionnelle des séries formelles*, Journal of Combinatorial Theory, Series-A 39, No.1, 1985, 52-82.
- [L3] G. Labelle. *Une combinatoire sous-jacente au théorème des fonctions implicites*, Journal of Combinatorial Theory, Series-A 40, No.2, 1985, 377-393.
- [L4] G. Labelle. *Some New Computational Methods in the Theory of Species*, in Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec 1985, eds. G. Labelle and P. Leroux, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, No.1234, 1986, 192-209.
- [L5] G. Labelle. *On Combinatorial Differential Equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 113, No.2, 1986, 344-381.
- [L6] G. Labelle. *Interpolation dans les \mathbb{K} -espèces*, in Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 14^e session: Burg Feuerstein, Actes du séminaire - Supplément, ed. Volker Strehl, 1986, 60-70.
- [L7] G. Labelle. *On the generalized iterates of Yeh's combinatorial \mathbb{K} -species*, Journal of Combinatorial Theory, Series-A (à paraître).
- [L8] J. Labelle. *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures*, Annales des sciences mathématiques du Québec 7, no.1, 1983, 59-94.
- [L9] J. Labelle. *Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité*, Annales des sciences mathématiques du Québec 9, no.1, 1985, 31-58.
- [L10] P. Leroux et G. X. Viennot. *Combinatorial resolution of systems of differential equations, I. Ordinary differential equations*, in Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec 1985, eds. G. Labelle and P. Leroux, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, No.1234, 1986, 210-245.
- [Y] Y.-N. Yeh. *The calculus of virtual species and \mathbb{K} -species*, in Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec 1985, eds. G. Labelle and P. Leroux, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, No.1234, 1986, 351-369.

Gilbert Labelle
 Dép. de mathématiques et d'informatique
 Université du Québec à Montréal (UQAM)
 C.P. 8888, succ. "A"
 Montréal (Québec), CANADA H3C 3P8

