Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1988, 341/S-16
Actes 16^e Séminaire Lotharingien, p. 129-131

ANMERKUNGEN ZU EINER ANZAHLFORMEL VON G. KREWERAS FÜR NUMERIERTE WURZELBAÜME

VON

VOLKER STREHL

Kürzlich hat G.Kreweras [1] folgende Anzahlformel für bestimmte Klassen numerierter Wurzelbäume vorgetragen (die Notation weicht hier unwesentlich vom Original ab): man betrachtet Wurzelbäume auf $\{1,2,\ldots,n\}$, wobei deren Kanten zur Wurzel hin gerichtet sein sollen; eine *aufsteigende* Kante in einem solchen Baum ist eine Kante $i \to j$ mit $i < j$. Gibt man sich nun ein System $\{(i_1,j_1),(i_2,j_2),\ldots,(i_k,j_k)\}$ mit paarweise verschiedenen i_ν vor, so kann man fragen, wieviele Wurzelbäume genau diese Paare (i_ν,j_ν) als aufsteigende Kanten $i_\nu \to j_\nu$ besitzen. Die von Kreweras gefundene Antwort auf diese Frage lautet:

$$\frac{(n-1)!}{i_1 \cdot i_2 \cdot \cdots \cdot i_k}$$

Das auf den ersten Blick Erstaunliche an diesem Resultat ist, dass diese Anzahl nur von den i_ν's nicht aber von den j_ν's abhängt. Der von Kreweras gegebene Beweis ist induktiver Natur und erklärt *diesen* Aspekt des Resultats keineswegs. Kreweras hat selbst in seinem Vortrag die Frage nach einem "eleganten" Beweis dieser Anzahlformel gestellt. In der vorliegenden Note wird ein solcher Beweis gegeben, der sich auf bijektive Manipulationen mit Bäumen stützt. Das Verfahren ist nicht neu, es ist eigentlich nichts anderes als eine Anwendung von A.Joyal's Beweis (vgl. [2]) für Cayley's wohlbekannte Anzahlformel für numerierte Bäume.

Für jede positive natürliche Zahl n bezeichne $F(\mathbf{n})$ die Menge aller Abbildungen von $\mathbf{n} = \{1,2,\ldots,n\}$ in sich. Die Struktur solcher Abbildungen $f \in F(\mathbf{n})$ ist wohlbekannt,cf. [3] [4] [5] : es gibt eine maximale (nichtleere) Teilmenge R_f von $\mathbf{n}$, die Menge der f *-rekurrenten* Elemente von $\mathbf{n}$, auf der f eine Permutation ρ_f induziert; jedes $r \in R_f$ ist die Wurzel eines Baumes, dessen übrige Knoten genau diejenigen $x \in A - R_f$ sind, für die r das erste zu R_f gehörige Element der Folge $f^0(x)=x, f^1(x), f^2(x), \cdots$ ist. Ein $f \in F(\mathbf{n})$ heisst *Kontraktion*, wenn R_f einelementig ist - Kontraktionen kann man also mit numerierten Wurzelbäumen identifizieren. $C(\mathbf{n})$ steht für die Menge der Kontraktionen auf $\mathbf{n}$ und Cayley's Formel besagt gerade, dass $\# C(\mathbf{n}) = n^{n-1}$ ist.

Seien nun $I = (i_1,i_2,\cdots,i_k)$, $J = (j_1,j_2,\cdots,j_k) \in \mathbf{n}^k$, wobei noch $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ gelten soll, insbesondere also $k \le n$. Es bezeichne dann $F_{I,J}(\mathbf{n})$ die Menge aller $f \in F(\mathbf{n})$ mit

$$f(i_\nu) = j_\nu \text{ für } 1 \le \nu \le k \quad \text{und} \quad f(i) \le i \text{ für } i \in \mathbf{n} - \{i_1,\cdots,i_k\}$$

Analog ist $C_{I,J}(\mathbf{n})$ definiert. Die Anzahl $\# F_{I,J}(\mathbf{n})$ lässt sich offenbar direkt angeben:

$$\# F_{I,J}(\mathbf{n}) = \prod \{ i \in \mathbf{n} \,; i \notin \{i_1,\cdots,i_k\} \} = \frac{n!}{\prod\limits_{1 \le \nu \le k} i_\nu} \tag{1}$$

Insbesondere ist in dieser Situation auch sofort klar, warum die gesuchte Anzahl nur von den i_ν's, nicht aber von den j_ν's abhängt. Gilt für I,J wie oben zusätzlich noch $i_\nu < j_\nu$ für $1 \le j \le k$, so schreiben wir $I << J$. Das Resultat von Kreweras lautet dann:

Für jedes Paar $(I,J) \in \boldsymbol{n}^k \times \boldsymbol{n}^k$ mit $I << J$ gilt

$$\# C_{I,J}(\boldsymbol{n}) = \frac{(n-1)!}{\prod_{1 \le \nu \le k} i_\nu} \tag{2}$$

oder - wegen (1) - anders ausgedrückt:

$$\# C_{I,J}(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{n} \cdot \# F_{I,J}(\boldsymbol{n}) \tag{3}$$

Um dies zu beweisen, betrachten wir Paare $(c,s) \in C(\boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n}$, anschaulich also $\boldsymbol{n}$-numerierte Wurzelbäume, bei denen noch ein weiterer Knoten markiert ist (der mit der Wurzel zusammenfallen kann). Es gibt dann eine eindeutig bestimmten kürzesten Weg von s zu der Wurzel r_c von c :

$$r_c = a_1 \leftarrow a_2 \leftarrow \cdots \leftarrow a_m = s \tag{4}$$

wobei die Pfeile einen Ausschnitt aus der Funktion c darstellen. [A.Joyal [5] , [2] nennt die Objekte vom Typ (c,s) "Wirbeltiere"(=vertébrés) und diesen Weg (4) die "Wirbelsäule"(=colonne vertébrale)]. Für die Folge $a_1, a_2, \cdots, a_m$ wird nun die übliche Zerlegung nach Leiterindices (left-to-right-maxima) durchgeführt: es seien $1 = l_1 < l_2 < \cdots < l_t$ diejenigen Indices $\lambda \in \boldsymbol{m}$ mit $a_\lambda = \max\{a_i \, ; i \le \lambda\}$. Zusätzlich sei $l_{t+1} := m+1$. Diese Vorbereitungen erlauben die Definition eines $f \in F(\boldsymbol{n})$ wie folgt:

$$f(x) := \begin{cases} c(x) & \textit{falls } x \notin \{a_{l_1}, \cdots, a_{l_t}\} \\ \\ a_{l_{\tau+1}-1} & \textit{falls } x = a_{l_\tau} \quad (1 \le \tau \le t) \end{cases}$$

Es ist bekannt (und leicht nachzuvollziehen), dass die so definierte Abbildung $(c,s) \to f$ eine Bijektion von $C(\boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n}$ auf $F(\boldsymbol{n})$ ist. (und daraus folgt Cayley's Formel unmittelbar). c und f können sich nur an den Stellen $a_{l_1}, \cdots, a_{l_t}$ unterscheiden. Aufgrund der Konstruktion gilt aber

$$c(a_{l_1}) = a_{l_1} \,, f(a_{l_1}) = a_{l_2 - 1} \le a_{l_1} \text{ und } c(a_{l_\tau}) = a_{l_\tau - 1} < a_{l_\tau} \,, \; f(a_{l_\tau}) = a_{l_{\tau+1}-1} < a_{l_\tau} \quad (2 \le \tau \le t)$$

Somit hat diese Bijektion die Eigenschaft:

$$c(x) > x \;\leftrightarrow\; f(x) > x \quad (x \in \boldsymbol{n}) \tag{5}$$

Mit anderen Worten: für $(I,J) \in \boldsymbol{n}^k \times \boldsymbol{n}^k$ mit $I << J$ gilt

$$c \in C_{I,J}(\boldsymbol{n}) \;\leftrightarrow\; f \in F_{I,J}(\boldsymbol{n}) \tag{6}$$

Die Aussage (3) folgt also ganz einfach daraus, dass die Bijektion $(c,s) \to f$ eine n-zu-1-Abbildung $f \to c$ von $F(\boldsymbol{n})$ auf $C(\boldsymbol{n})$ induziert, für die (6) gilt.

Was bei dem obigen Beweis geschieht, ist also schlicht dies: die Wirbelsäule (4) eine Wirbeltiers (c,s), aufgefasst als eine lineare Liste, wird durch eine Permutation so ersetzt, dass diese gerade zum ρ_f der entstehenden Funktion f wird. Diese Manipulation ist nichts anderes als Foata's (inverse) Fundamentaltransformation, vgl. prop.5.9 in [4] , wo auch die Eigenschaft (5) festgehalten ist.

Der angegebene Beweis für (2) leistet (wegen (5)) gleich noch die folgende Verallgemeinerung: sei $I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in \boldsymbol{n}^k$ mit $i_1<i_2<\cdots<i_k$ und sei $J=(J_1,J_2,\cdots,J_k)$ ein k-Vektor von nichtleeren Mengen $J_\nu \subseteq \{i_\nu+1,i_\nu+2,\cdots,n\}$ und bezeichne $C_{I,J}(\boldsymbol{n})$ die Menge aller Kontraktionen c von $\boldsymbol{n}$ mit

$$c(i_\nu)\in J_\nu \quad \text{für } 1\le \nu\le k \quad \text{und} \quad c(i)\le i \quad \text{für } i\in \boldsymbol{n}-\{i_1,\cdots,i_k\}$$

so gilt

$$\#C_{I,J}(\boldsymbol{n})=(n-1)!\cdot \prod_{1\le \nu\le k} \frac{\#J_\nu}{i_\nu}$$

Für den Fall $J_\nu=\{i_\nu+1,\cdots,n\}$ wurde die entsprechende Formel schon von Kreweras angegeben.

Referenzen

1. G. Kreweras, Vortrag beim 16.Treffen des *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, Liebfrauenberg, 12.-14.März 1987 .
2. J. Labelle, Applications diverses de la théorie des espèces de structures, *Ann.sc.math. Québec* **17** *(1983)* ,ch.2.5 .
3. L. Comtet, *Advanced Combinatorics* , Reidel 1974, ch.I.18 .
4. D. Foata, *La série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumération,* Presses de l'Université de Montréal 1974, ch. V.9 und VI.1 .
5. A. Joyal, Une théorie combinatoire des séries formelles, *Adv.Math.* **42** (1981), ch. 2.1 und 2.2 .

Volker STREHL,
Informatik I,
Universität Erlangen-Nürnberg,
Martensstrasse 3,
D-8520 Erlangen.