Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1988, 341/S-16
Actes 16e Séminaire Lotharingien, p. 127-128

SU ALCUNE PROPRIETÀ DEI SEMIGRUPPI FINITI

DA

GIUSEPPE PIRILLO

Sommario. Dato un semigruppo finito S, il più piccolo intero n per il quale S ha la proprietà P_n può essere considerato come una "misura" di quanto S si discosta dall'essere abeliano. Questo intero nel caso dei gruppi finiti di ordine non superiore a 32 è stato trovato, utilizzando anche il calcolatore, ed è al massimo 6, valore che viene raggiunto solo nel caso del gruppo simmetrico su 4 oggetti.

Per le definizioni delle proprietà P_n, P^*_n, P e P* ci riferiamo, per esempio, a [3].

Dato un semigruppo finito S (risp. gruppo finito G), è facile convincersi che esso ha la proprietà $P_{|S|+1}$ (risp. $P_{|G|}$); è però altrettanto facile constatare che in molti casi esso ha la proprietà P_n per un intero n molto più piccolo di $|S|+1$ (risp. $|G|$).

Ci sembra auspicabile avere dei risultati che permettano di associare ad un dato semigruppo finito S sia il minimo intero, diciamo m(S), tale che esso abbia la proprietà $P_{m(S)}$ sia il minimo intero, diciamo m*(S), tale che esso abbia la proprietà $P^*_{m^*(S)}$.

E' ovvio che $m^*(S) \leq m(S)$. Inoltre m(S) ci fornisce una sorta di "misura" di quanto S si discosta dall'essere abeliano.

Per facilitare il nostro compito, per il momento, ci siamo limitati a calcolare gli interi sopra definiti per ogni gruppo finito G di ordine non superiore a 32.

Per il calcolo di m(G) sono stati utili, per limitarci a fare solo due esempi, i risultati 3.6 di pagina 142 di [1] e 3.3 di pagina 387 di [2]. Non sempre però è stato possibile calcolare m(G), diciamo così, per via teorica: siamo pertanto ricorsi all'uso del calcolatore.

Indichiamo con $\mathfrak{S}_4$ il gruppo simmetrico su 4 oggetti, con C_k il gruppo ciclico di ordine k e con Q il gruppo dei quaternioni; usiamo poi il simbolo $\rtimes$ per indicare il prodotto semidiretto.

Per quanto riguarda l'intero m(G) i risultati ottenuti possono essere così riassunti:

$$m(\mathfrak{S}_4)=6;$$

$$m(C_7 \rtimes C_3)=5;$$

$$m(Q \rtimes C_3)=5;$$

inoltre per tutti gli altri gruppi non abeliani G di ordine non superiore a 32 si ha che se $|G'|=2$ allora $m(G)=3$ altrimenti $m(G)=4$.

Per quanto riguarda l'intero $m^*(G)$ si ha invece

$$m^*(\mathfrak{S}_4)=m^*(C_7 \rtimes C_3)=m^*(Q \rtimes C_3)=4$$

e per tutti gli altri gruppi non abeliani G di ordine non superiore a 32 l'intero $m^*(G)$ è 3.

I dottori Postiglione e Rispoli, presso il Centro di Calcolo della Università di Salerno, hanno provveduto a preparare con pazienza e cura delle tavole contenenti gli interi m(G) ed m*(G) per i gruppi finiti di ordine non superiore a 32. Queste tavole appariranno in un lavoro che stanno preparando (si veda [4]) e da esse abbiamo tratto i dati qui riferiti.

Desideriamo ringraziare i dottori Postiglione e Rispoli per la loro efficace collaborazione.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. M. CURZIO, P. LONGOBARDI, M. MAJ, Su di un problema combinatorio in teoria dei gruppi, Atti Acc. Lincei Rend. fis. VIII,74,136-142(198
2. M. CURZIO, P. LONGOBARDI, M. MAJ, D.J.S. ROBINSON, A permutational property of groups, Arch. Math., 44, 385-389 (1985).
3. G. PIRILLO, Sulle proprietà P e P* nei semigruppi, Seminaire Lotharingien de Combinatoire, Schloβ Schney, 08.10-11.10.1986
4. A. POSTIGLIONE, A. RISPOLI, lavoro in preparazione.